SOC
7130

198.3

Library of the Museum

OF

COMPARATIVE ZOÖLOGY,

AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

Founded by private subscription, in 1861.

In Exchange from the
"Société Royale des Sciences de Liège."
No. 167.
Received October 23. 1875.

25

# MÉMOIRES

DE LA

# SOCIÉTE ROYALE DES SCIENCES

## DE LIÉGE.

# MÉMOIRES

DE LA

# SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

## DE LIÉGE.

*Nec temere nec timide.*

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IV.

DÉPOTS :

**BRUXELLES,**
chez H. Merzbach, succr de C. Muquardt,
**Leipzig, même maison.**

**PARIS,**
chez Roret, libraire,
**rue Hautefeuille, 10bis.**

**LONDRES,**
chez Willams et Norgate,
**Henrietta Str., 14.**

**BERLIN,**
chez Friedländer et Sohn,
**Carlstrasse, 11.**

BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

NOVEMBRE 1874.

# LISTE

DES

# MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 15 NOVEMBRE 1874.

## Bureau.

| | |
|---|---|
| *Président*, | M. Vanlair. |
| *Vice-président*, | » Van Beneden. |
| *Secrétaire général*, | » Candèze. |
| *Trésorier*, | » de Koninck. |
| *Bibliothécaire*, | » Dewalque. |

## Membres effectifs.

1835 Gloesener, M., professeur émérite à la faculté des sciences de l'université de Liége, membre fondateur.

1842 de Koninck, L. G., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

Chandelon, J. T. P., id., id.

Sélys-Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Trasenster, L., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

1844 Schmit, J. P., agrégé à l'université de Liége.

1844 Kupfferschlaeger, Is., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

1845 Delvaux de Fenffe, Ad., ingénieur honoraire des mines, à Liége.

1847 De Cuyper. A. C., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

Schwann, T., professeur à la faculté de médecine de l'université de Liége.

1853 Bède, E., industriel, à Verviers.

Candèze, E., membre de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Glain (Liége).

Chapuis, F., id., id., à Verviers.

Pâque, ancien professeur de mathématiques, à Liége.

1855 Dewalque, G., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

Bourdon, J., docteur en sciences naturelles, à Liége.

1856 Catalan, C. E., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

1857 Houtain, L., docteur en sciences physiques et mathématiques, à Liége.

1860 Gillon, A., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

1861 Pérard, L., id., id.

Morren, Éd., id., id.

1865 Folie, F., administrateur-inspecteur de l'université de Liége.

Charlier, E., docteur en médecine, à Liége.

1868 Graindorge, L. A. J., docteur spécial en sciences physico-mathématiques, à Liége.

1869 Habets, A., ingénieur honoraire des mines, à Liége.

1870 Masius, V., professeur à la faculté de médecine de l'université de Liége.

Vanlair, C., id., id.,

1871 Van Beneden, Éd., professeur à la faculté des sciences de l'université de Liége.

1871 Le Boulengé, P., capitaine d'artillerie, à Liége.
Devos, A., professeur à l'école moyenne, à Liége.
1874 Malherbe, R., ingénieur des mines, à Liége.
Firket, Ad., id., id.
Falisse, J.-V., professeur demathématiques à l'athénée de Liége.

## Membres correspondants.

1833 D'Omalius d'Halloy, membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Halloy (Ciney).
Du Mortier, B., id., id., à Tournai.
1842 Van Beneden, P., professeur à l'université de Louvain.
Laguesse, ingénieur en chef des mines, à Mons.
Neuens, général d'artillerie, à Anvers.
1843 Decaisne, J., professeur au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
Stas, J., membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Bruxelles.
Nyst, H., id., id.
Keyserling (comte A. de), membre de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg.
Gervais, P., professeur à la faculté des sciences, à Paris.
Sundevall, professeur à la faculté des sciences, à Stockholm.
Putzeys, secrétaire général au ministère de la Justice, à Bruxelles.
Reichert, professeur à l'université de Berlin.
Valentin, id., id., de Berne.
Steichen, id. à l'École militaire, à Bruxelles.
Lamarle, professeur émérite à la faculté des sciences de l'université de Gand.
Bréguet, mécanicien, à Paris.
1843 Simonoff, directeur de l'Observatoire de Kasan (Russie).
Cheffkine, général, aide de camp de S. M. l'Empereur de Russie, à St-Pétersbourg.

1843 Seyler, docteur en médecine, à Wiltz (grand-duché de Luxembourg).

1844 Lecointe, professeur de mathématiques supérieures, à Anvers.

Malherbe, juge au tribunal de Metz.

Carez, ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, à Bruxelles.

1845 Van Rees, professeur à l'université d'Utrecht (Néerlande).

Maus, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.

Navez, major d'artillerie en retraite, à Schaerbeek.

Coquilhat, général d'artillerie, à Anvers.

Hagen, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).

Chasles, M., membre de l'Institut, à Paris.

1847 Bosquet, pharmacien, à Maestricht (Néerlande).

1848 Klipstein (von), professeur à l'université de Giessen.

1849 Michaelis, professeur à l'Athénée de Luxembourg.

1850 Schroetter, secrét. perpétuel de l'Académie des sciences, à Vienne.

Ansted, professeur de géologie, à Londres.

Schlegel, conservateur du Muséum d'histoire naturelle, à Leyde (Néerlande).

1852 Le Conte, J. L., docteur en médecine, à Philadelphie (États-Unis).

Lyell (sir Ch.), membre de la Société royale de Londres.

Davidson, Th., id. id.; à Brighton (Angleterre).

Steinheil, professeur à l'université de Munich.

Ettingshausen (von), professeur de physique à l'université de Vienne.

Lamont, directeur de l'Observatoire, à Munich.

Dana, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle, à Philadelphie (États-Unis).

Ettingshausen (chevalier Constantin von), membre de l'Académie des sciences, à Vienne.

1853 Westwood, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).

1853 Parry (major F. J. Sidney), à Londres.
Waterhouse, conservateur au Musée Britannique, à Londres.
Perris, conseiller de préfecture, à Mont-de-Marsan (Fr.).
Petrina, professeur de physique, à Prague (Bohême).
1854 Koelliker, professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).
Dutreux, receveur général, à Luxembourg.
Drouet, H., naturaliste, à Charleville (France).
Weber, professeur de physique à l'université de Gœttingen (Prusse).
Stammer, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).
Erlenmeyer, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).
Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
Becquerel, A. C., membre de l'Institut, à Paris.
Liais, directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.
Dumoncel, physicien, à Paris.
Tchébycheff, P., membre de l'Académie des sciences, à S$^{t}$-Pétersbourg.
Michot (abbé), botaniste, à Mons.
1857 Jamin, J. C., membre de l'Institut, à Paris.
Ray, J., trésorier de la Société d'agriculture de Troyes (France).
Wright (D$^{r}$ Th.), membre de la Société royale d'Édimbourg, à Cheltenham (Angleterre).
Schmit, N. C., professeur à la faculté des sciences de l'université de Bruxelles.
1858 Binckhorst (van), J. T., propriétaire, à Maestricht (Néerlande).
Caligny (marquis de), correspondant de l'Institut, à Versailles (France).

1858 Wood, Edw., à Richmond, Yorkshire (Angleterre).
1859 Marseul (abbé de), entomologiste, à Paris.
Beyrich, professeur à l'université de Berlin.
Marcou, J., géologue, à Cambridge (États-Unis).
1860 Du Bois-Reymond, professeur à l'université de Berlin.
Brücke, professeur à l'université de Vienne.
Favre, A., professeur de géologie à l'Académie de Genève (Suisse).
Studer, B., professeur de géologie à l'université de Berne (Suisse).
Chevrolat, membre de la Société entomolog. de France, à Paris.
1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Kœnigsberg (Prusse).
Wartmann, É., professeur de physique, à Genève (Suisse).
1863 Baily, professeur à l'université de Dublin.
Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
Güblerl, professeur agrégé à la faculté de médecine, à Paris.
Delesse, professeur de géologie à l'École normale, à Paris.
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Gherardi (commandeur), directeur de l'Institut technique, à Florence.
Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).
Desmoulins, président de la Société linéenne, à Bordeaux (France).
Cialdi (commandeur), directeur des travaux maritimes, à Rome.
Bernard, Claude, professeur au collége de France, à Paris.
Hugueny, professeur, à Strasbourg.

1865 Murray, A., membre de la Société royale d'horticulture, à Londres.

Terssen, colonel d'artillerie, à Anvers.

De Colnet d'Huart, professeur à l'athénée de Luxembourg.

Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.

Milne Edwards, membre de l'Institut, à Paris.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

Le Joly, Archiviste perpétuel de la Société des sciences de Cherbourg (France).

Varley Cromwell, ingénieur en chef de la Compagnie des télégraphes électriques, à Londres.

Godwin Austen, membre de la Société royale de Londres, Chilworth Manor, Guilford (Angleterre).

Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.

De Borre, A., conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

Ledent, professeur au collége communal de Verviers.

Desains, professeur de physique à la Sorbonne, à Paris,

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).

Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de S$^{t}$-Pétersbourg.

Séguin, aîné, membre de l'Institut, à Paris.

Boncompagni (prince Balthasar), à Rome.

Secchi (le R. P. A.), à Rome.

1868 Renard (S. Ex. le chevalier), conseiller d'État, secrétaire de la Société impériale des naturalistes de Moscou.

Clausius, R., professeur de physique à l'université de Bonn (Prusse).

1868 HELMHOLTZ, professeur de physiologie, à Berlin.
CAILLETET, pharmacien et chimiste, à Charleville (France).
1869 MARIÉ DAVY, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris, à Paris.
SCHLOEMILCH, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
SIMON, E., naturaliste, à Paris.
PISCO, professeur à l'École industrielle de Vienne.
1870 DAGUIN, professeur à la faculté des sciences de Toulouse (France).
TRAUTSCHOLD, professeur à l'École d'agriculture à Pétrovskoi, près Moscou (Russie).
MALAISE, C., professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.
LIOUVILLE, J., membre de l'Institut, à Paris.
BERTRAND, J. L. F., id., id.
SERRET, J. A., id., id.
1871 VAN HOOREN, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.
HESSE, professeur à l'université de Munich.
IMSCHENETSKI, professeur à l'université de Karkoff (Russie).
MUELLER (baron VON), directeur du Jardin Botanique de Melbourne (Australie).
PLOEM, docteur en médecine, à Sindanglaia (Java).
HENRY, L., professeur à l'université de Louvain.
DURÉGE, professeur à l'École polytechnique de Prague (Bohême).
DE KONINCK, Lucien, ingénieur-chimiste, à Charleroi.
MAXWELL T. MASTERS, membre de la Société royale à Londres.
1871 THOMSON, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.
RIBEIRO, membre de l'Académie des sciences, à Lisbonne.
CAPELLINI (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Florence.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.

Garibaldi, professeur à l'université de Gênes (Italie).

Fradesso da Silveira, directeur de l'Observatoire, à Lisbonne.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).

Lucca, professeur de chimie à l'université de Naples (Italie).

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Martins, directeur du Jardin Botanique de Montpellier.

Bates, H., secrétaire-adjoint de la Société géographique de Londres.

Melsens, membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Hermite, membre de l'Institut, à Paris.

Darboux, agrégé de l'université, à Paris.

Fournier, Eug., Dr., secrétaire de la Société botanique de France, à Paris.

Hall (James), paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

Worthen, A. H., directeur du *Geological Survey* de l'Illinois (États-Unis).

Meek, F. B., paléontologiste de l'État, à Washington.

Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

Glaziou, botaniste, directeur du *Passeio publico*, à Rio de Janeiro.

Ladislaô Netto, botaniste, directeur du Musée impérial de Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Burmeister, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

1873 Areschoug, professeur-adjoint à l'université de Lund (Suède).

1874 Winkler, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).

Hayden, géologue de l'État, à Washington.

Van Rysselberghe, professeur de mathématique à l'école de navigation, à Ostende.

Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Haeckel, id., id., à Iéna.

Waldeyen, id., id., à Strasbourg.

Huxley, professeur à l'école des mines, à Londres.

# LISTE

DES

# SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

## LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications,

AVEC LE CATALOGUE DES OUVRAGES REÇUS DEPUIS L'IMPRESSION DU TOME V.

(1er novembre 1873. — 1er novembre 1874.)

## BELGIQUE.

**Bruxelles.** — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Annuaire, quarantième année; in-12. Bruxelles, 1874.
Bulletin, 2e série, tome XXXV.
— — — XXXVI.
— — — XXXVII.
— — — XXXVIII, nos 7 et 8; in-8°. Brux., 1873-1874.
Mémoires in-4°, t. XL. Bruxelles, 1873.
— couronnés in-4°, t. XXXVII et XXXVIII. Brux., 1873-1874.
— — collection in-8°, t. XXIII. Brux., 1873.

*Observatoire royal.*

Annales, avril à décembre 1873.

*Société entomologique de Belgique.*

Annales, t. XVI; in-8°. Bruxelles, 1873.

*Société malacologique de Belgique.*

Procès-verbaux des séances du 6 juillet 1873 au 4 juillet 1874.
Annales, t. VIII; in-8°. Bruxelles, 1871-1873.

**Mons.** — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

## ALLEMAGNE.

—

**Berlin.** — *Kœnigliche preussische Akademie der Wissenschaften.*

Monatsbericht, Februar-December, 1873; in-8°. Berlin, 1873-1874.
— Januar-Juli, 1874; in-8°. Berlin, 1874.
Abhandlungen aus den Jahren 1872-1873; in-4°. Berlin, 1873-1874.
Verzeichniss der Bibliothek; in-8°. Berlin, 1874.

*Deutsche Geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift, XXV Band, 3es und 4es Heft; in-8°. Berlin, 1873-1874.
— XXVI Band, 1es und 2es Heft — — 1874.

*Entomologischer Verein.*

Berliner entomologische Zeitschrift, 16er Jahrgang (1872), 2es bis 4es Vierteljaresheft, 1872.
— 17er Jahrgang (1873), 1873-1874.
— 18er — (1874), 1tes-2tes Vierteljahresheft, 1874.

*Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.*

(Redig. vom Prof. Dr Giebel, in Halle.)

Neue Folge, Band VII (Der ganze Reihe, XLI Bd); in-8°. Berlin, 1873.

**Bonn.** — *Naturhistorischer Verein der Preussisschen Rheinlande und Westphalens.*

**Breslau.** — *Schlesische Gesellschaft für vaterlaendische Cultur.*

Fünfzigster Jahres-Bericht im Jahre 1872; in-8°. Breslau, 1873.
Sechsigster — — 1873 — 1874.
Abhandlungen. Philosophisch-historische Abtheilung, 1872-1873; in-8°. Breslau, 1873.
— *Idem*, 1873-1874; in-8°. Breslau, 1874.
— Abtheilung für Naturwissenschaften und Medicin, 1872-1873; in-8°. Breslau, 1873.

**Colmar.** — *Société d'histoire naturelle.*

**Erlangen.** — *Physikalich-medicinische Societaet.*

Sitzungsberichte, 5 Heft, november 1872 bis August 1873; in-8°. Erlangen, 1873.

**Francfort.** — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Bericht, vom Juni 1872 bis Juni 1873; in-8°. Frankfurt, 1873.

**Fribourg.** — *Naturforschende Gesellschaft.*

Berichte über die Verhandlungen, Band VI, Heft II und III; in-8°. Freiburg, 1873.

**Giessen.** — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Neunter Bericht, im Mai 1862; in-4°. Giessen.
Zehnter — im August 1862; in-4°. —
Vierzehnter — im April 1873; in-8°. —

**Gottingue.** — *Koenigliche Gesellschaft der Wissenschaften- und Georg-August Universität.*

Nachrichten aus dem Jahre 1873; in-8°. 1873.

**Halle.** — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*

Mitglieder, 1848-1873.

*Naturforschende Gesellschaft.*

Abhandlungen, XII Band, 3es und 4es Heft; in-4°. Halle, 1873.
— XIII Band, 1es Heft.
Bericht, 1871, 1872 und 1873; in-4°. Halle.

**Koenigsberg.** — *Koenigliche physikalische-œkonomische Gesellschaft.*

Schriften, 13er Jahrg., 1872, 2te Abtheilung; in-4°. Kœnigsberg, 1872.

**Landshut.** — *Botanische Verein.*

4er Bericht über die Vereins-Jahre 1872-1873; in-8°. 1874.

**Metz.** — *Académie des sciences.*

**Munich.** — *Koenigliche Bayerische Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe, 1872, Heft III; 1873, Heft I und II; 1874, Heft III.
Abhandlungen, 11en Bandes, 2es Abtheilungen; in-4°. 1873.
— — — 3es — — 1874.
Verzeichniss der Mitglieder, 1873; in-4°. 1873.
Den Antheil an der Entwickelung der Electricitätslehre; in-4°. 1873.
Dr Th. L. W. von Bischoff : Eine Denkschrift über den Einfluss von J. von Liebig.
A. Vogel, *Idem.*
Dr Max von Pettenhofer : Zum Gedächtniss von J. von Liebig, 1874.

*Königliche Sternwarte.*

Annalen, XIX Band; in-4°. 1873.

**Offenbach.** — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Zehnter Bericht; in-8°. 1869.
Dreizehnter- und Vierzehnter Bericht; in-8°. 1873.

**Stettin.** — *Entomologischer Verein.*

34er Jahrgang, nr 7-12; in-8°. 1873.
35er — — 4- 9 — 1874.

**Stuttgard.** — *Verein für vaterlaendische Naturkunde in Würtemberg.*

Würtembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte, 29er Jahrgang; in-8°. Stuttgard, 1873.
*Idem*, 30er Jahrgang; in-8°. Stuttgard, 1874.

**Wiesbaden.** — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

**Wurzbourg.** — *Physikalische-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Verhandlungen, neue Folge, I Band, 4 (Schluss) Heft; in-8°. 1869.
— — II — — 1872.
— — III 1872.
— — IV 1873.
— — V 1873-1874.
— — V 1874.

*Naturwissenschaftliche Zeitschrift.*

4er Band, 1 Heft; in-8°. Würzburg, 1863.

**Zwickau.** — *Verein für Naturkunde.*

Jahresbericht für 1873. 1874.

# AUTRICHE-HONGRIE.

—

**Gorlitz.** — *Neues Lausitzisches Magazin.*

Band L, 1es und 2es Heft; in-8°. Gorlitz, 1873.

**Hermannstadt.** — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Verhandlungen und Mittheilungen, XXIII und XXIV Jahrgang; in-8°.

**Prague.** — *Koenigliche boehmische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen vom Jahre 1871-1872, 6e Folge, Band V; in-4°. 1872.
— — 1873, 6e Folge, Band VI; in-4°. 1874.
Sitzungsbericht, Jahrgang 1871-1872.
— — 1873, Januar-Juni 1873.

*Kaiserliche-Koenigliche Sternwarte.*

Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahr 1870-1871.

**Vienne.** — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, Sitzungsberichte,
LXVI Band, 1872.
LXVII Band, 1873.
LXVIII Band, I und II Heft, 1873 Juni und Juli (1te und 2te Abtheilung).
Phänologische Beobachtungen aus dem Pflanzen- und Thierreiche von Karl Fritsch; VIII Heft, Jahrgang 1857; in-4°. Wien, 1869.

*Kaiserliche-Koenigliche zoologische-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen, XXIII Band; in-4°. 1873.

*Kaiserliche-Koenigliche geologische Reichsanstalt.*

Abhandlungen, Band V, 1871-1873; in-4°.
— — VI, Heft 1, 1873.
— — VII, Heft 1 und 2, 1874.
Verhandlungen, Bericht vom 31 Juli 1873, nr 11; in-8°.
— — — 1874, nr 1-7; in-8°.
Jahrbuch, XXIII Band, nr 3, 1873.
— XXIV Band, nr 1 und 2, 1874.

## ESPAGNE.

—

**Madrid.** — *Real Academia de Ciencias.*

## FRANCE.

—

**Bordeaux.** — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*

Actes, 3e année 1841, 4e trimestre, in-8°.
— 18e — 1856, 2e et 4e trimestres.
— 19e — 1857.
— 20e — 1858.
— 21e — 1859, 1er, 2e et 3e trimestres. Paris, 1859.
— 22e — 1860, 3e série.
— 23e — 1861.
— 24e — 1862.
— 25e — 1863, 1er et 2e trimestres.
— 28e — 1866, 4e trimestre.
— 29e — 1867, 1er —
— 34e — 1872-1873, 1er, 2e et 3e trimestres.
— — — 1873, 4e trimestre. Paris, 1874.

*Société linnéenne.*

Actes, tome XXVII; 3e série, tome VII, 2e partie.
— — XXVIII — — VIII, 1re et 2e parties; in-8°.

*Société des sciences physiques et naturelles.*

Mémoires, t. IX, 2e cahier; t. X, 1er cahier; in-8°, 1874.
Extrait des procès-verbaux des séances, in-8°. Bordeaux, 1869.

**Caen.** — *Société linnéenne de Normandie.*

**Cherbourg.** — *Société des sciences naturelles.*

Mémoires, t. XVII; in-8°. Paris et Cherbourg, 1873.
Catalogue de la bibliothèque, 2e partie, 1re livr., 31 décembre 1872.

**Dijon.** — *Académie des sciences.*

Mémoires, 2e série, tome XIV, années 1866-1867.
— — — XV, — 1868-1869.
— — — XVI, — 1870; in-8°. Paris et Dijon.

**Lille.** — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Mémoires, année 1872, 3e série, 10e et 11e vol. (2e partie).
Programme des concours : prix Wicar. Lille, 1874.

**Lyon.** — *Académie des sciences.*

*Société d'agriculture.*

Annales, 4e série, t. IV; in-8°. Paris et Lyon, 1871.

*Société linnéenne.*

**Montpellier.** — *Académie des sciences et lettres.*

**Nancy.** — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Statuts. Nancy, 1874.

**Paris.** — *Société Géologique de France.*

Bulletin, 2e série, t. XXIX; in-8°. Paris, 1871-1872.

*Société Philomathique.*

Bulletin, t. X. Janvier-juin 1873. In-8°.

*Muséum d'histoire naturelle.*

*L'Abeille,* journal d'entomologie; directeur : M. de Marseul.

Dixième année, 11e et 12e livraison, in-20°. 1873.
Onzième année, 1-12. 1874.

**Rouen.** — *Société des amis des sciences naturelles.*

Neuvième année, 1873. In-8°.

**Toulouse.** — *Académie des sciences.*

**Troyes.** — *Société académique de l'Aube.*

Mémoires, tome IX, 3e série. Année 1872; in-8°.
— — X, — — 1873; —

## GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

**Dublin.** — *Royal Irish Academy.*

Transactions, volume XXIV. Sciences. Parts XVI and XVII; in-4°. Dublin, 1870.
— volume XXV. Sciences. Parts I, II, III; in-4°. Dublin, 1872.
Proceedings, volume I, ser. II. Session 1870-1871; nos 2 and 3; in-4°. Dublin, 1871.

Proceedings, volume I, ser. II. Session 1871-1872; nos 4, 5, 6; in-4°.
Dublin, 1871.

*Natural history Society.*

**Edimbourg.** — *Geological Society.*

Transactions, vol. II, part II; in-4°. 1873.

**Glasgow.** — *Geological Society.*

*Natural history Society.*

**Londres.** — *Geological Society.*

The quarterly Journal, volume XXIX, part. 2, 3. 1873.
— — — XXX, — 1. 1874; in-8°.
The list at November 1873.

*Linnean Society.*

Additions to the library, received from June 1871 to June 1872.
List of the members, 1872.
Proceedings (session 1872-1873).
The Journal, volume XI. Zoology; n° 55. 1872.
— — — n° 56. 1873.
— — XIII. Botany; n° 68. 1872.
— — — nos 69, 70, 71 et 72. 1873; in-8°.
The Transactions, vol. XXVIII and XXIX. 1873; in-4°.

*Mac Millan Office.*

*Royal Society.*

Philosophical Transactions for the year MDCCCLXXII, vol. 162, part II. In-4°, 1872.
*Idem* for the year MDCCCLXXIII, vol. 163. 1874.

Proceedings, volume XX and XXI; nos 138-145. In-8°.
— — XXI and XXII; — 146-150. —
The council of the Royal Society, 30 th. November 1872. In-4°.
— — — — 1873. —

*Zoological Society.*

**Manchester.** — *Litterary and philosophical Society.*

## ITALIE.

**Bologne.** — *Academia delle Scienze.*

**Catane.** — *Academia gioenia di scienze naturali.*

**Florence.** — *R. Comitato geologico d'Italia.*

Bolletino, 1872; volume III.
— 1873; — IV. Firenze, 1873.
— 1874; nos 1-6. Roma, 1874; in-8°.

**Gênes.** — *Observatorio della R. Universita.*

Stato meteorologico della citta di Genova per 1872.
Relazione del dottore P. M. Garibaldi; in-4°. Genova, 1873.

**Modène.** — *Societa dei naturalisti.*

Annuario, anno VII. Dispensa 1 et 2; Aprile e Septemb. 1872; in-8°.
Modena, 1872.
— anno VII. Dispensa 3 et 4; Aprile e Ottobre 1873; in-8°.
Modena, 1873.
— anno VIII. Serie II, fascicolo primo; in-8°. Modena, 1874.

**Naples.** — *Societa Reale.*

**Palerme.** — *Instituto tecnico.*

**Rome.** — *Bolletino di bibliografia delle scienze matematiche.*

Tome VI; anno 1873.
— VII; — 1874. Gennaïo-Marzo, 1874; in-4°.

*Reale Academia dei Nuovi Lincei.*

Atti, tomo XXVI, sess. 1ª del 1° Decembre (1872); in-4°. Roma, 1873.

## LUXEMBOURG.

**Luxembourg.** — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

Publications, t. XIII; in-8°. 1873.

## NÉERLANDE.

**Amsterdam.** — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Afdeeling-natuurkunde. Processen-verbaal van de gewone vergaderingen van Mei 1873 tot en met April 1873.
Afdeeling-natuurkunde. Verslagen en mededeelingen; tweede reeks, zevende deel; in-8°. 1873.
Afdeeling-letterkunde. Tweede reeks, derde deel; in-8°. Amsterdam, 1873.
Afdeeling-letterkunde. Verhandelingen; dertiende deel; in-4°. Amsterdam, 1873.
Afdeeling-letterkunde. Jaarboek gevestigd te Amsterdam voor 1872; in-4°. Amsterdam, 1872.

**Harlem.** — *Société hollandaise des Sciences.*

Archives néerlandaises, t. VIII, 3e et 4e livr.; in-8°. La Haye, 1873.
Programme, année 1874.

**Rotterdam.** — *Société expérimentale.*

Programme, année 1874.

## RUSSIE.

—

**Helsingfors.** — *Société des sciences de Finlande.*

**Moscou.** — *Société impériale des naturalistes.*

Bulletin, année 1872, n° 4; année 1873, nos 1, 2 et 3; in-8°.

**St-Pétersbourg.** — *Académie impériale des sciences.*

Bulletin, t. XVIII, nos 3, 4 et 5; t. XIX, nos 1, 2 et 3; in-4°.

*Société d'archéologie et de numismatique.*

*Société entomologique.*

Horæ societatis entomologicæ rossicæ, t. IX, nos 3 et 4; 1873.

*Société impériale de minéralogie.*

## SUÈDE ET NORWÈGE.

—

**Christiania.** — *Kongelige Frederiks Universitet.*

**Stockholm.** — *Académie royale des sciences.*

*Nordist medicinskt Arkiv,* directeur : Dr Axel Key.

Sjette Bandet, andrea Häftet. Stockholm, 1874; in-8°.

## SUISSE.

—

**Berne.** — *Naturforschende Gesellschaft.*

Mittheilung aus dem Jahre 1870; N^r^ 711-744.
— — 1872; N^r^ 792-811.
— — 1873; N^r^ 812-827; in-8°.

*Société helvétique des sciences naturelles.*

Actes, 55^e^ session. Compte-rendu de 1872; in-8°.
Nouveaux Mémoires, t. XXV; in-4°. 1873.

**Neuchâtel.** — *Société des sciences naturelles.*

Bulletin, t. IX, 3^e^ cahier, 1870-1873; in-8°.

**Schafhouse.** — *Naturforschende Gesellschaft.*

Verhandlungen, am 18, 19 et 20 Aug. 1873. 56^e^ Jahresversammlung.
Jahresbericht 1872-1873; in-8°. Schaffhausen, 1874.

---

## AMÉRIQUE.

—

## ÉTATS-UNIS.

*American Association for advancement of sciences.*

Proceedings of the twentieth meeting, 1871. Cambridge, 1872; in-4°.
— — twenty-first — 1872. — 1873; —

**Boston.** — *American Academy of arts and sciences.*

Proceedings, vol. VIII, from May 1868 to May 1873; in-8°, Boston et Cambridge, 1873.
— — XV, part. III and IV. 1873.
— — XVI, — I and II. 1873-1874.

*Society of natural History.*

Memoirs, vol. II, part. II, N^r IV; in-4°. 1873.
— — — III, N^r I and III; in-4°. 1873.

**Cambridge.** — *Museum of comparative zoology.*

**Columbus.** — *Ohio State agricultural Society.*

**Madison.** — *Wiscousin Academy of sciences, letters and arts.*

Transactions, vol. X, 1871; vol. XI, 1872; in-8°.

**New-Haven.** — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

**Newport.** — *Orleans County Society of natural Sciences.*

**New-York.** — *Lycœum of natural History.*

Catalogue of the Phalænidæ of California, n° II. Boston, 1874; in-8°.
— — Pyralidæ of California, vol. X, n° 9. New-York, 1873.

**Philadelphie.** — *Academy of natural Sciences.*

*American philosophical Society.*

*Wagner Free Institute of Sciences.*

**Portland.** — *Natural History Society.*

**Salem.** — *The American Naturalist.*

*Essex Institute.*

The ancestry of insects, 1873.
Third annual Report on the injurious and beneficial insects of Massachussetts, 1873.

*Peabody Academy of sciences.*

**San-Francisco.** — *Californian Academy of sciences.*

**Washington.** — *Smithsonian Institution.*

Sixth annual report of the United-States geological Survey of the territories, by F. V. Hayden. Washington, 1873; in-8°.
Miscellaneous publications, n^os^ 4 and 5. 1874; in-8°.
Bulletin, n^os^ 1 et 2; 1874.

## GUATEMALA.

—

**Guatemala.** — *Sociedad economica.*

## RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

—

**Buenos-Ayres.** — *Academia de ciencias exactas.*

Extracto del bolletino, secunda entreca. 1874; in-8°.

# ASIE.

## INDES ANGLAISES.

**Calcutta.** — *Asiatic Society of Bengal.*

Journal, nos 1 à 4, 1873, et no 1, 1874.

## INDES NÉERLANDAISES.

**Batavia.** — *Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsche Indie.*

Natuurkundig Tijdschrift, 2de reeks, 2de deel, aflev. 4-6 ; in-8o.

# RÉVISION

DE LA

# MONOGRAPHIE DES ÉLATÉRIDES,

PAR

**ERNEST CANDÈZE,**

Docteur en médecine, chevalier de l'Ordre de Léopold,
membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique, de la Société royale
des sciences de Liége, des Sociétés entomologiques de Bruxelles, de Paris,
de Londres, de Berlin, de St-Pétersbourg, etc.

---

## PREMIER FASCICULE.

---

# AVANT-PROPOS.

En abordant autrefois l'étude des Élatérides dans le but d'en publier la monographie, mon premier soin fut, ainsi qu'il est d'usage, d'établir leur bibliographie aussi complétement que possible et de rechercher, dans les auteurs qui s'en étaient occupés d'une manière générale, dans les travaux d'Eschscholtz, de Latreille, de Germar, d'Erichson et de Le Comte, les formules de classification que chacun d'eux avait émises.

En constatant la divergence d'opinions de ces auteurs quant aux bases à adopter comme point de départ dans l'arrangement des Élatérides, et en étudiant moi-même ces insectes, je ne tardai pas à m'apercevoir combien était ardue la tâche de les grouper méthodiquement. Lacordaire qui, à la même époque, était arrivé à cette famille dans la rédaction de son *Genera*, frappé également des difficultés que présente leur classification, les déclare excessives et peut-être insolubles.

Vingt années pendant lesquelles je me suis occupé de ces insectes, avec plus ou moins d'assiduité mais sans jamais en abandonner complétement l'étude, m'ont convaincu que l'appré-

ciation de Lacordaire était juste. Voici à quel résultat je suis arrivé de mon côté.

Il est facile de reconnaître, chez les Élatérides, une vingtaine de types assez naturels, caractérisés chacun par une particularité saillante. La présence, sous le prothorax, de cavités destinées à loger les antennes au repos, la saillie plus ou moins forte du front, l'existence de lamelles aux tarses, la pectination des crochets, etc., constituent des caractères qui, sans être exclusifs, peuvent être considérés ici comme de premier ordre.

Ces formes typiques ainsi établies, on peut rattacher à chacune d'elles un groupe de genres qui, tout en divergeant, c'est-à-dire en s'écartant de ce type suivant des tendances qui les rapprochent des autres, conservent toujours quelque particularité prédominante qui détermine leur parenté avec lui plutôt qu'avec un autre. On arrive ainsi à former un certain nombre de *tribus* assez naturelles, quant à leur ensemble, mais possédant toutes des membres aberrants qui se tiennent sur leurs limites et qui font entre elles l'office de trait d'union.

Jusqu'ici les choses se passent d'une manière assez satisfaisante. Mais où gît la difficulté, je crois même pouvoir dire l'impossibilité, c'est de disposer les groupes de telle sorte que leur succession forme une série naturelle. J'ai tenté en vain de le faire et j'y ai renoncé. Dans la *Révision* que j'ai entreprise on trouvera la famille divisée en *tribus*, c'est-à-dire en groupes de genres comme ils ont été primitivement établis, avec cette seule différence que j'ai élevé au rang de *tribus* mes anciennes *sous-tribus* en supprimant le nom collectif d'*Élatérides vrais* qui réunissait ces dernières, mais quant à l'ordre des tribus lui-même, je l'ai laissé à peu près tel qu'il existe dans la Monographie, n'ayant aucune bonne raison pour le bouleverser.

On doit, en effet, considérer chaque tribu comme formant un groupe de genres dont les affinités avec les autres groupes sont multiples.

Il en résulte que dans l'ordre suivi, il y a eu çà et là des disjonctions forcées. Ainsi les *Ludius* et genres voisins constituant la tribu des *Ludiites* se relient par des formes intermédiaires avec les *Chalcolépidiites*, les *Cardiorhinites*, les *Pomachiliites*, les *Élatérites*, etc. Les *Athous* ont des rapports étroits avec les *Asaphites* qui en ont eux-mêmes de très-intimes avec les *Corymbites*. Ceux-ci d'autre part sont si peu distincts des *Pyrophorus* que je ne puis qu'invoquer la seule distribution géographique, pour ne pas les fondre en un seul genre. Or les *Corymbites* et les *Pyrophorus* ne seraient pas déplacés à la suite des *Alaites*, mais cette place est occupée non sans d'autres bons motifs par les *Chalcolépidiites*.

Je pourrais poursuivre beaucoup plus loin, en l'appuyant d'exemples, la démonstration de cet enchevêtrement des groupes entre eux, mais ce que j'en ai dit suffit, je pense, pour montrer l'impossibilité d'arriver à un arrangement satisfaisant à cet égard. Les entomologistes qui se sont occupés de faunes locales, celle de l'Europe, celle de l'Amérique du Nord, par exemple, sont parvenus à classer leurs Élatérides d'une façon rationnelle; mais tout autre est la difficulté lorsqu'on est en présence des espèces de tout le globe, avec les faunes si diverses du Brésil, du Chili, de l'Australie, de Madagascar, etc.

Un fait intéressant a étudier, c'est le changement que subissent certaines formes typiques suivant les régions où elles se montrent.

Nous venons de voir que le type *Corymbites* se transforme en *Pyrophorus* dans l'Amérique intertropicale, ou, si l'on veut, que

les *Pyrophorus* perdent, en dehors de ces régions, leurs vésicules lumineuses. On peut de même considérer les *Cardiorhinus* et les *Cosmesus* comme tenant lieu de nos *Agriotes* dans le nouveau continent, et ces mêmes *Agriotes*, tous de couleur si uniformément terne dans notre pays, deviennent aux Indes orientales de brillants *Agonischius*.

Le genre *Tetralobus*, l'un des plus remarquables de la faune africaine, possède des caractères tels qu'il paraît tout à fait isolé dans la famille. Toutefois il a des représentants en Australie où le type s'altère considérablement, et l'une de ces formes altérées rappelle assez bien le *Pythiobius anguinus* de l'Amérique du Nord, dont la parenté avec les *Athous* est évidente.

Les *Hemirhipus* américain ont pour analogues aux Indes orientales les *Tetrigus*. Or ceux-ci ont une tendance visible à se rapprocher des *Aphanobius* et des *Ludius* par quelques détails de leur structure.

Il serait possible de multiplier ces exemples, mais comme ils sont relevés dans les généralités de chacun des genres, je me borne ici à en citer quelques-uns pour montrer combien il est nécessaire, pour bien juger des rapports des différents genres entre eux, d'étudier la famille, non dans une région limitée comme l'Europe ou l'Amérique, mais dans son ensemble universel.

Les quelques changements que j'ai apportés à la classification des Élatérides, dans le présent ouvrage, justifient le titre de *Révision de la Monographie* que je lui ai donné préférablement à celui de *Supplément*, qu'il mériterait mieux si l'on ne considérait que l'augmentation notable des espèces décrites.

J'ai adopté, dans sa rédaction, le plan qu'a suivi Boheman dans son quatrième volume de la *Monographia Cassididarum*, c'est-à-dire que j'ai cité tous les genres et les espèces de ma Monogra-

phie, en rectifiant les erreurs commises, supprimant certaines fausses espèces et ajoutant à leur place méthodique les espèces nouvelles. Il a été nécessaire, pour les genres qui recevaient un grand accroissement d'espèces, de refaire les tableaux dichotomiques, mais je les ai abrégés autant que possible en supprimant les embranchements qui ne renferment pas d'espèces nouvelles et qui n'auraient été ainsi qu'une répétition inutile des premiers, auxquels on peut toujours recourir pour les compléter. J'ai donné, chaque fois qu'il m'a été possible, une description ou au moins une diagnose des espèces qui, ayant été décrites depuis la publication de la Monographie, ne s'y trouvent pas comprises, en sorte qu'avec ce dernier ouvrage et celui que je publie actuellement, on aura la description de tous les Élatérides connus à cette date et dont le nombre, autant que je puis l'estimer aujourd'hui, ne sera pas beaucoup au-dessous de trois mille cinq cents.

Un mot encore sur la classification. On s'étonnera peut-être de l'absence de tableaux dichotomiques pour les tribus, qui servent de point de départ dans la recherche du nom d'un Élatéride quelconque, en le classant d'abord dans l'une ou l'autre des divisions primaires. A cela je répondrai par une déclaration d'impuissance. Chaque tribu renferme, il est vrai, un type assez nettement défini, mais autour de lui viennent se placer trop de formes aberrantes pour qu'il soit possible de donner une caractéristique exacte de chaque tribu, et il faut bien, aujourd'hui que l'entomologie descriptive a pris un développement énorme et que les espèces comprises dans les collections sont devenues innombrables, supposer à ceux qui entreprennent l'étude approfondie de l'une ou l'autre famille d'insectes, au moyen des monographies, des connaissances préalables puisées dans les traités élémentaires et dans l'examen des collections bien nommées.

En tant que *Supplément*, c'est l'importante collection de M. Éd. Janson qui a servi de base au présent ouvrage. M. Janson s'est appliqué, depuis nombre d'années, à réunir et à fondre, dans son propre musée, toutes les collections d'Élatérides qu'il a pu acquérir et ceux de ces insectes récoltés par les naturalistes voyageurs. Outre l'ancienne collection du marquis de la Ferté Sénecterre qui renfermait elle-même les Élatérides de Dejean, de Gory, de M. Buquet, etc., sa collection comprend la totalité ou une grande partie des espèces récoltées par Mouhot, MM. Wallace, Bukley et bien d'autres, en sorte que cette collection est de loin la plus importante qui existe pour la famille dont il est ici question.

J'arrive à la nomenclature adoptée.

Aujourd'hui que les entomologistes sont divisés en deux camps sur la question de savoir si l'on doit revenir aux noms anciens et oubliés depuis longtemps, pour les substituer à ceux qui ont usurpé leur place et que la tradition a consacrés, ou bien si l'on doit admettre, pour les noms scientifiques, une sorte de prescription légitimant ces usurpations; en présence de cette discussion dans laquelle les uns et les autres appuient leurs opinions d'excellents arguments, j'ai dû nécessairement prendre un parti.

Ennemi de toute règle exclusive et absolue, je n'ai suivi rigoureusement aucun des deux systèmes, me laissant guider par l'un ou l'autre, selon qu'ils me paraissaient plus rationnels dans tel ou tel cas. Ainsi, tandis que pour l'*Adelocera atomaria*, nom admis autrefois par moi, j'adopte la rectification qui lui attribue le nom de *carbonaria*, plus ancien de quelques années, je repousse celui de *punctata* que l'on voudrait de nouveau lui substituer comme le plus légitime.

Je n'ignore nullement les critiques auxquelles je m'expose en agissant de la sorte, mais je pense que les esprits modérés

m'approuveront et que tôt ou tard une sorte de transaction rallierа le plus grand nombre. Ce n'est pas ici le lieu de justifier le parti que j'ai adopté, ce qui serait sortir du cadre restreint où je dois me renfermer dans ces quelques lignes d'*avant-propos ;* j'ai tenu toutefois à déclarer que si, dans les pages qui suivent, tantôt je me range du côté des *réformateurs*, tantôt je reste avec les *conservateurs*, ce n'a pas été sans des raisons que je crois bonnes.

Je me suis abstenu, en général, d'établir ou, pour me servir du terme consacré, de *créer* des espèces sur des exemplaires uniques, sauf le cas où ceux-ci présentaient des caractères assez tranchés pour que le doute ne fût guère possible. L'étude scrupuleuse et longtemps continuée d'un groupe d'insectes finit par façonner l'organe visuel de telle sorte, par lui donner une habileté distinctive si étonnante, qu'on arrive à voir des *différences notables*, là où il n'y a que de minimes variations sans importance réelle et, la plupart du temps, individuelles. Je me suis mis en garde contre cette tendance. Remarquons à ce propos que de faibles différences de structure, parfois même de couleur ou de disposition de dessin, sont plus significatives dans tel genre que dans tel autre; que certains genres sont composés d'espèces où la forme et la couleur sont plus fixes et mieux arrêtées. Ainsi les couleurs, et leur disposition pour former des dessins, n'ont aucune valeur chez certains *Cardiorhinus*, où l'on ne trouve pas deux individus identiquement semblables, tandis que chez les *Adelocera*, les *Alaus*, les *Elater*, etc., les indices tirés de ces caractères ont plus de signification. Il en est de même de la forme : celle-ci paraît extrêmement instable chez les *Athous*, par exemple, et l'on doit se montrer très-réservé dans l'établissement des espèces de ce genre éminemment variable, à moins que l'on n'ait sous les yeux un nombre suffisant d'exemplaires.

Les espèces décrites comme *nouvelles* dans ce premier fascicule sont au nombre de 158, réparties dans les quatre tribus des *Agrypnites*, des *Alaites*, des *Chalcolépidiites* et des *Oxynoptérites*. En tenant compte des espèces établies depuis la publication du premier volume de la Monographie, les trois premières tribus qui, à cette époque, comprenaient respectivement 190, 58 et 121 espèces sont actuellement composées de 324, 115 et 146 espèces. On peut juger par là de l'accroissement rapide qu'elles ont pris depuis une vingtaine d'années.

On remarquera que, pour la désignation des tribus, j'ai changé la terminaison *ide* en *ite*. Cette dernière était primitivement réservée aux *sous-tribus*, mais comme j'ai cru devoir élever celles-ci au rang de *tribus* en supprimant la désignation d'*Élatérides vrais* appliquée à la grande masse des insectes de la famille, j'ai dû choisir entre l'une ou l'autre de ces terminaisons. J'ai opté pour la seconde, afin de ne pas avoir en même temps la *tribu* et la *famille* des Élatérides.

# TRIBU I.

# AGRYPNITES.

Cette tribu correspond exactement à celle des Agrypnides telle qu'elle est exposée dans la *Monographie;* il n'y a de changé que l'ordre dans lequel plusieurs genres sont placés. Quant aux espèces, elles se sont considérablement accrues, surtout dans le genre *Lacon.*

## AGRYPNUS.

Eschs. *Entom. Arch.,* t. I, p. 32. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 20.

Les espèces de ce genre sont particulièrement répandues dans les régions chaudes de l'ancien continent. L'Amérique et l'Australie en renferment quelques-unes. Il n'en existe pas en Europe. Comme elles présentent une grande uniformité dans la couleur et la forme, ce qui en rend l'étude très-difficile, je les ai réparties dans quatre groupes, suivant leur habitat. Cette mesure me permet en outre de rendre plus facile la recherche des noms spécifiques dans le tableau ci-dessous.

### 1er groupe.

Afrique, Arabie, Syrie, Perse.

A Stries des élytres non ponctuées, au moins à la base.
  *a* Élytres profondément striées . . . . . 1. *A. caliginosus.*
  *aa* Élytres faiblement striées . . . . . 3. *A. substriatus.*

AA Stries des élytres ponctuées.
*a* Antennes aussi longues que la moitié du corps. . . . . 4. *A. infuscatus.*
*aa* Antennes moins longues que la moitié du corps.
α Troisième article des antennes notablement plus court que le quatrième.
* Deux fossettes sur le prothorax . . . . . 11. *A. Dewalquei.*
** Pas de fossettes sur le prothorax . . . . 9. *A. pubescens.* 10. *A. rufus.*
αα Troisième article des antennes aussi long ou à peu près que le quatrième.
* Pubescence ne formant pas de taches sur le prothorax.
× Téguments brun plus ou moins obscur ou rougeâtre.
+ Prothorax atténué peu à peu d'arrière en avant. . . . . 12. *A. arabicus.*
++ Prothorax aussi ou plus large au milieu qu'à la base.
o Un fort tubercule au bord basilaire du prothorax, au-devant de l'écusson. . 2. *A. notodonta.*
oo Tubercule basilaire du prothorax faible.
c Prothorax plus ou moins parallèle. . 8. *A. crassiusculus.*
cc Côtés du prothorax arqués.
x Toutes les stries des élytres bien marquées.
y Angles postérieurs du prothorax atténués et divergents . . . 5. *A. puber.*
yy Ces angles non divergents. . . 6. *A. attenuatus.*
xx Stries internes obsolètes . . . . 7. *A. australis.*
×× Téguments noirs.
+ Pattes noires . . . . . 13. *A. judaicus.*
++ Pattes rouges. . . . . 14. *A. persicus.*
** Pubescence formant des taches sur le prothorax.
+ Des espaces lisses sur le prothorax . . . 15. *A. maculicollis.*
++ Pas d'espaces lisses sur le prothorax. . . 16. *A. luridus.*

## 2me groupe.

### Indes orientales, Chine, Japon, Archipel malais.

A Élytres entières au bout.
*a* Prothorax plus ou moins pubescent, mais ne présentant pas de taches formées par des poils plus serrés.
α Stries 2-3-4, des élytres très-fortement imprimées à la base.
* Corps luisant.
× Stries fortement ponctuées . . . . . 18. *A. rufipes.*
×× Stries finement ponctuées . . . . . 24. *A. attonitus.*
** Corps mat.
× Pubescence très-courte, grisâtre . . . . . 19. *A. opacus.*
×× Pubescence soyeuse, rougeâtre . . . . . 20. *A. rubiginosus.*
αα Stries des élytres normales.

* Corps noir brillant, presque glabre. . . . . 17. *A. fuscipes.*
** Pubescent.
× Prothorax déprimé le long du bord latéral.
\+ Écusson oblong.
o Stries des élytres effacées sur le dos . . 21. *A. æqualis.*
oo Stries distinctes jusqu'à la suturale . . . 23. *A. mœstus.*
\+\+ Écusson large et pentagonal, ses angles latero-postérieurs relevés. . . . . 22. *A. punctatus.*
×× Prothorax non déprimé vers les bords . . . . 26. *A. bipunctatus.*
*aa* Des taches formées par des poils sur le prothorax.
26. *A. lacertosus.* 27. *A. ocellatus.* 28. *A. fusiformis.* 29. *A. cinereus.*
AA Élytres tronquées ou échancrées à l'extrémité.
*a* Deux fossettes sur le prothorax . . . . . 30. *A. bifoveatus.*
*aa* Pas de fossettes sur le prothorax.
α Angles postérieurs du prothorax obtus, comme tronqués à l'extrémité. . . . . 35. *A. resectus.*
αα Ces angles aigus.
* Pas de taches formées par des poils plus denses sur le prothorax . . . . . 34. *A. politus.*
** Des taches pileuses sur le prothorax.
× Élytres mucronées au bout . . . . . 33. *A. mucronatus.*
×× Élytres échancrées au bout.
\+ Cette échancrure large . . . . . 31. *A. tomentosus.*
\+\+ Cette échancrure étroite . . . . . 32. *A. javanus.*

### 3me groupe.

Continent australien.

36. *A. Mastersi.*

### 4me groupe.

Amérique.

A Prothorax plus long que large . . . . . 37. *A. Sallei.*
AA Prothora moins long que large. . . . . 38. *A. Schotti.*

1" GROUPE.

1. A. CALIGINOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 28.

Sénégal.

2. A. NOTODONTA. — LATR. — CAILL. *Voy. à Méroé, Ins.*, p. 5, pl. LVIII, fig. 6. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 27.

Sénégal, Soudan, Haute-Égypte, Nubie, Abyssinie, Arabie.

3. A. SUBSTRIATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 25.

Sénégal.

4. A. INFUSCATUS. — KLUG, PETERS *Reise n. Mozamb.* 1855, p. 647. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 28.

Mozambique.

5. A. PUBER. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 30.

Sénégal.

6. A. ATTENUATUS. — *Fuscus, subnitidus, griseo-pilosolus; antennis brevibus, articulo tertio quarto æquali; prothorace convexo, apice angusto, crebre et inæqualiter punctato; elytris parum profunde punctato-striatis, apice attenuatis; pedibus rufescentibus.*

Long. 20-25 mill., lat. 6-7 mill.

Brunâtre, un peu luisant, revêtu peu densément de poils gris. Antennes courtes, rougeâtres, leur troisième article de la taille du quatrième. Prothorax aussi large que long, convexe surtout en avant, couvert de points très-inégaux, rétréci assez fortement au sommet, les côtés arqués, non sinueux en avant des angles postérieurs, ceux-ci courts, le bord postérieur dépourvu de tubercule antéscutellaire. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au milieu, assez fortement atténuées en arrière,

entières au bout, peu profondément ponctuées-striées, les intervalles finement ponctués. Pattes rougeâtres.

Guinée, bouches du Niger. (Coll. Jans.)

Peu distinct du précédent si ce n'est par la forme générale et l'aspect un peu plus luisant.

7. A. AUSTRALIS. — *Fusco-brunneus, opacus, griseo-pilosus; antennis articulo tertio quarto æquali; prothorace latitudine haud longiore, basi apiceque angustato, lateribus arcuato, convexo, creberrime inæqualiter punctato; elytris subnitidis, castaneis, striis externis punctatis, internis obsoletis.*

Long. 22 mill., lat. 7 mill.

Voisin également du *puber*, mais d'une forme plus raccourcie et plus poilu. Brunâtre avec les élytres châtain, revêtu assez densément de poils gris, le prothorax opaque, les élytres un peu luisantes. Antennes à troisième article aussi grand que le quatrième. Prothorax aussi long que large, rétréci à la base et au sommet avec les côtés arqués, convexe avec les parties latérales un peu déprimées, densément couvert de points inégaux, ses angles postérieurs recourbés en dehors, le tubercule antéscutellaire petit et transversal. Élytres de la largeur de la base du prothorax, deux fois et demie plus longues, un peu élargies vers le milieu, déprimées sur le dos, ponctuées-striées extérieurement, les stries internes effacées. Pattes châtain clair.

Des environs du lac N'Gami.

Cette espèce, que j'ai trouvée dans la collection Castelnau, est, à ma connaissance, la plus australe de l'Afrique.

8. A. CRASSIUSCULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 30.

Sénégal; Kordofan.

9. A. PUBESCENS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 31.

Sénégal, Haute-Égypte, Nubie; Abyssinie, Arabie méridionale.

Var. *a. Minor, totus rufus.*

*A. Bocandei.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 32.

10. A. RUFUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 33.

Je ne doute aucunement que cette espèce ne soit africaine et des mêmes régions que les précédentes. C'est par erreur dans l'indication de provenance qu'elle a été attribuée à la Guyane.

11. A. DEWAILQUEI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 34.

Benguela.

12. A. ARABICUS. — *Piceus, parum nitidus, pube grisea, subsericea tectus; antennis articulo tertio quarto longitudine æquali; prothorace a basi attenuato, lateribus recto, convexo, crebre punctato, angulis posticis retrorsum productis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, punctatis; pedibus castaneis.*

Long. 27 mill., lat. 8 mill.

Noirâtre, les élytres brunâtres, peu luisant, revêtu d'une pubescence couchée, courte, subsoyeuse, grise. Antennes à troisième article aussi long que le quatrième. Prothorax un peu plus long que large, rétréci peu à peu depuis la base jusqu'au sommet, convexe, densément ponctué, les points plus gros en avant, finement canaliculé au milieu, ses angles postérieurs robustes, dirigés en arrière, fortement carénés. Élytres un peu plus de deux fois plus longues que le prothorax, curvilinéaires sur les côtés, finement ponctuées-striées, les stries presque effacées près de la suture. Pattes châtain.

Arabie. (Coll. Casteln.)

13. A. JUDAICUS. — REICHE *Ann. Fr.*, 1856, p. 418, pl. XII, fig. 11. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 36.

Syrie et Mésopotamie.

14. A. PERSICUS. — *Niger, tenuiter et parcius griseo-pilosulus; prothorace latitudine longiore, dorso subtiliter, antice lateribusque densius et fortius punctato; elytris punctato-striatis, dorso deplanatis; antennis pedibusque rufis.*

Long. 23 mill., lat. 6 $^1/_2$ mill.

Tournure du *judaicus* dont il se rapproche beaucoup. On l'en distinguera à sa forme un peu plus déprimée, sa ponctuation moins forte sur le prothorax, ses élytres à premières stries plus distinctes, enfin à ses antennes et à ses pattes rouges.

Perse.

Je n'en ai vu qu'un exemplaire dans la collection de M. Fry.

15. A. MACULICOLLIS. — *Fuscus vel rufo-brunneus, flavescenti-pubescens; antennis articulo tertio quarto fere æquali; prothorace latitudine paulo longiore, antice arcuatim angustato, punctato, discum versus laxius punctato, linea media plagisque duabus anterioribus lævibus, his pube densiore circumdatis, angulis posticis divaricatis, connatis; élytris punctato-substriatis, apice integris.*

Long. 22-35 mill., lat. 7-9 mill.

Zanzibar; Mozambique.

J'ai vu le type de cette espèce au musée de Berlin, et en outre trois spécimens de taille très-inégale, dans la collection de M. Janson.

16. A. LURIDUS. — FABR. *Ent. syst.*, II, 217, 4. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 37.

Je pense que cette espèce a son centre d'habitat en Arabie et que de là elle rayonne dans les pays voisins. Elle se retrouve jusque dans le nord-ouest de l'Hindoustan.

2me GROUPE.

17. A. FUSCIPES. — FABR. *Syst. Eleuth.*, t. II, p. 224, 17. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 24.

Hindoustan et Ceylan.

18. A. RUFIPES. — *Niger, nitidus, griseo-pilosulus; antennis ferrugineis; prothorace latitudine longiore, crebre antrorsum*

*fortius punctato; elytris striatis, striis fortiter punctatis; pedibus rufis.*

Long. 23 mill., lat. 6 $^1/_2$ mill.

De la tournure du *fuscipes,* mais plus petit et plus poilu. Noir, luisant, revêtu de poils gris, très-apparents sans le secours de la loupe. Antennes ferrugineuses. Prothorax plus long que large, subparallèle, un peu déprimé de chaque côté, ponctué plus fortement en avant qu'en arrière, ses angles postérieurs assez grands, un peu divergents, longuement carénés, le tubercule antéscutellaire assez saillant. Élytres de la largeur du prothorax et deux fois plus longues, assez fortement striées, les stries marquées de gros points sauf les deux ou trois premières ou les points sont plus petits, les intervalles convexes et ponctués. Pattes rougeâtres.

Pondichéry. (Coll. Jans.)

19. A. OPACUS. — *Ater, opacus, brevissime pilosulus; prothorace antice fortiter, postice densius subtiliusque punctato, angulis posticis validis, valde divaricatis; scutello pentagonali; elytris striato-punctatis, striis dorso evanescentibus, basi fortiter impressis, interstitio secundo basi oblique elevato.*

Long. 25-33 mill., lat. 8-10 mill.

Noir opaque, paraissant glabre à l'œil nu, mais revêtu en réalité de petits poils gris noirâtre. Antennes obscures, à troisième article presque aussi long que le quatrième. Prothorax aussi large que long, convexe, un peu déprimé le long du bord latéral, arqué sur les côtés, ponctué, les points très-gros en avant, plus fins et plus serrés en arrière, ses angles postérieurs robustes, très-divergents, leur carène forte et longuement prolongée le long du bord externe, le milieu du bord postérieur portant un fort tubercule. Écusson pentagonal. Élytres deux fois et un tiers plus longues que le prothorax, arquées sur les côtés, atténuées en arrière, entières au bout, ponctuées-striées latéralement, les stries réduites à de fines séries de points sur le dos, les 2$^e$, 3$^e$ et 4$^e$ fortement imprimées à la base, ou le deuxième intervalle forme une éléva-

tion oblique terminée en avant par une sorte de tubercule. Pattes noires.

Malacca. (Coll. Casteln.)

Espèce bien caractérisée par sa forme, sa couleur, son opacité, l'enfoncement des premières stries à la base des élytres, contrastant avec leur disparition au delà, etc.

20. A. RUBIGINOSUS. — *Niger, opacus, pube rufo-fulva sericea, appressa, vestitus; prothorace antice fortiter, postice subtilius punctato, angulis posticis validis, divaricatis; scutello oblongo, sulcato; elytris striato-punctatis, striis dorso subtilibus, basi fortiter impressis; antennis pedebusque ferrugineis.*

Long. 25-30 mill., lat. 9-10 mill.

CAND. *Mém. Acad. Brux.*, t. XVIII, 1865, p. 5.

Épais, noir mat, revêtu d'une pubescence couchée, soyeuse, rougeâtre. Antennes ferrugineuses, leur troisième article plus court que le quatrième. Prothorax aussi long que large, un peu convexe, déprimé latéralement, arqué sur les côtés, ponctué, les points plus forts en avant, fins et denses en arrière, les angles postérieurs robustes, très-divergents, longuement carénés, le bord postérieur portant au milieu un fort tubercule. Écusson oblong, ogival, creusé au milieu. Élytres plus longues que le prothorax, atténuées en arrière, entières au devant, striées-ponctuées plus fortement vers le bord latéral que vers la suture, les stries 2, 3 et 4 fortement imprimées à la base. Pattes ferrugineuses.

Bornéo. (Coll. du Musée de Leyde et Janson.)

Tournure de l'espèce précédente, mais bien distincte par la forme de son écusson, sa pubescence rouge, etc.

21. A. ÆQUALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 25.

Cette espèce est surtout propre au Siam et à la Cochinchine; j'en ai vu beaucoup d'exemplaires de cette région. Elle s'étend toutefois beaucoup plus loin à l'orient, car les collecteurs du Musée de Leyde et M. Wallace l'ont trouvée jusque dans les Moluques.

22. A. PUNCTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 26.

Var. *a. Prothorace elytrisque lateribus rufescentibus.*

*Agrypnus sondaicus.* — CAND. *loc. cit.*, p. 33.

Fort voisine de l'espèce précédente, mais cependant distincte par son corselet plus fortement ponctué, son écusson plus large avec ses angles postéro-externes redressés. Elle habite principalement les régions de l'Inde en deçà du Gange et Ceylan; on la trouve toutefois jusqu'à Java.

23. A. MOESTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 34.

*Agrypnus funestus.* — CAND. *loc. cit.*, p. 35.

*Agrypnus gilvus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, t. XVIII, p. 5.

Espèce très-voisine également de l'*æqualis*. Elle est toujours plus petite; ses élytres sont plus distinctement striées sur le dos, quelquefois même avec les intervalles convexes; son écusson est oblong avec ses angles latero-postérieurs non relevés comme chez la précédente. Je lui ai réuni deux formes que j'avais autrefois séparées avec des noms spécifiques distincts.

Elle est répandue dans tout l'Hindoustan; on la trouve aussi à Ceylan, en Birmanie, à Siam et dans la presqu'île Malaise.

J'ai vu beaucoup d'exemplaires de ces trois dernières espèces et j'avoue que j'ai beaucoup de doutes sur leur validité. Les caractères qui les distinguent n'ont pas grande valeur et l'on trouve des spécimens où ces mêmes caractères s'affaiblissent considérablement. Toutefois comme ce cas se présente dans tous les genres d'insectes où les espèces offrent une grande similitude dans la forme et la couleur, on est bien obligé de s'attacher a des caractères relativement faibles, pour y former des coupes spécifiques plus faciles à saisir par l'œil qu'à faire reconnaître par la description.

24. A. ATTONITUS. — *Niger, nitidus, sparsim breviterque griseo-pilosolus; antennis articulo tertio quarto paulo breviore; prothorace latitudine baseos haud longiore, a basi sensim angustato,*

*convexo, fortiter punctato, angulis posticis validis, retrorsum productis; elytris striato-punctatis, apice integris.*

Long. 26 mill., lat. 8 mill.

Noir, assez luisant, revêtu de petits poils grisâtres, modifiant peu la couleur du fond. Antennes brunes, leur troisième article un peu plus court que le quatrième. Prothorax aussi long que large à la base, peu à peu rétréci depuis celle-ci jusqu'au sommet, avec ses côtés droits, convexe, ponctué assez fortement, ses angles postérieurs robustes, fortement carénés, à pointe recourbée en arrière, le tubercule antéscutellaire fort. Écusson subquadrangulaire, ses angles postérieurs redressés. Élytres peu allongées, courbes sur les côtés, convexes, striées-ponctuées avec les stries fortement imprimées à la base, leurs intervalles plats et ponctués, entières à l'extrémité. Pattes brunes.

Indiqué comme de l'Inde. Il provient, je pense, de la presqu'île Hindoue. (Coll. Jans.)

25. A. BIPUNCTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 29.

Var. *a. Prothorace basi haud biimpresso.*

Hindoustan septentrional.

26. A. LACERTOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 38, pl. I, fig. 1.

Silhet.

27. A. OCELLATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 39.

Indes orientales.

28. A. FUSIFORMIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 39.

Chine méridionale.

29. A. CINEREUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 40.

Indes orientales.

Je n'ai pas revu les types de ces quatre dernières espèces dont l'une ou l'autre serait peut-être à retrancher.

30. A. BIFOVEATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 41.

Iles Philippines.

31. A. TOMENTOSUS. — FABR. *Entom. system., suppl.*, p. 138. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 41.

Iles Philippines.

32. A. JAVANUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 44.

Java, Sumatra, Malacca.

Très-voisin du *tomentosus*, mais toujours plus petit, la pubescence plutôt grise ou blanchâtre que jaune. Les exemplaires provenant de Malacca sont peu fortement ponctués.

33. A. MUCRONATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 42.

Bornéo.

J'ai revu un second exemplaire de cette espèce, capturé à Sarawack par M. le marquis Doria.

34. A. POLITUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 43.

L'exemplaire unique que j'ai vu de cette espèce, lorsque je l'ai décrite pour la première fois, était accidentellement glabre. J'en ai revu depuis plusieurs et j'ai pu constater qu'une pubescence fine, soyeuse, jaunâtre, couchée, existe chez les exemplaires très-bien conservés et qui n'ont pas fait un long séjour dans l'alcool. Son habitat paraît assez étendu. J'en ai vu de Chine. Le Musée de Leyde en possède envoyés du Japon par Siebold, ainsi que des exemplaires capturés au pied du volcan Ardjoeno, non loin de Sourabaia.

35. A. RESECTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 45.

Cette espèce n'est pas d'Australie, mais bien des Moluques et de la Nouvelle-Guinée. J'en ai revu plusieurs spécimens de ces îles.

3me GROUPE.

36. A. MASTERSI. — *Piceus, subnitidus, tenuiter fulvo-pubescens; antennis articulo tertio quarto breviore; prothorace latitudine vix longiore, lateribus antice rotundato, utrinque depresso, medio longitrorsum late elevato, disco subtiliter sparsim æqualiterque punctato; elytris striatis, striis interstitiisque punctulatis.*

Long. 22-32 mill., lat. 8-11 mill.

*Agrypnus Mastersii.* — MAC LEAY *Trans. ent. Soc. N. S. Wales*, t. II, p. 249.

*Agrypnus piceus.* — CAND., *in litt.*

Var. *a. Nitidior, latior, fere niger.*

*Agrypnus latior.* — MAC. LEAY, *loc. cit.*, p. 250.

Var. *b. Minor, magis opacus, fere glaber, pedibus rufis.*

*Agrypnus Duboulayi.* — CAND., *in litt.*

Var. *c. Brunneo-piceus, thoracis lateribus rufescentibus, elytris profundius striatis, interstitiis plus minusve convexis.*

*Agrypnus creptus.* — JANS., *Mss.*

J'ai sous les yeux un grand nombre de spécimens du genre actuel provenant du continent australien. Ces exemplaires, recueillis aussi bien à la côte orientale qu'à la côte occidentale, paraissent au premier abord constituer plusieurs espèces distinctes, mais lorsqu'il s'agit de préciser leurs caractères différentiels, on s'aperçoit bientôt qu'il n'y en a aucun de constant, et que la taille, la coloration, la ponctuation du prothorax et les stries plus ou moins marquées des élytres varient tellement, même chez des individus de provenance identique, qu'il est évident qu'on a affaire ici à un seul type spécifique de forme peu arrêtée. L'Australie nous offre d'autres exemples de ces espèces à formes indécises; je citerai notamment certains *Lacon* et *Monocrepidius* et surtout, parmi ces derniers, le *M. australasiæ*, qui présente des variations parallèles à celles dont il est ici question.

L'espèce paraît faire défaut au sud du continent et à la Tasmanie. Je n'en ai vu aucun qui arrivât à la latitude de Sydney, du moins à la côte orientale.

4me GROUPE.

37. A. Sallei. — Lec. *Am. phil. Soc. Trans.*, t. X, p. 491. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 36.

États-Unis du Sud : Louisiane.

38. A. Schotti. — Lec. *loc. cit.*, p. 492.

Rio-Grande.

### SCAPHODERUS.

Cand. *Monogr.*, t. I, p. 46.

S. Riehli. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 46.

Cafrerie.

### ADELOCERA.

(Latr.) Cand. *Monogr.*, t. I, p. 47.

Bien que ce genre soit à peu près cosmopolite, je ne l'ai pas scindé en sections établies d'après l'habitat, comme je l'ai fait pour les *Agrypnus*, parce que s'étendant beaucoup au nord, il a, dans les régions septentrionales des deux continents, des représentants qui doivent rester rapprochés.

#### Section I.

*Élytres ponctuées, les points ne formant pas neuf stries distinctes.*

A Élytres aplaties vers la suture.
  a Corps d'une seule teinte, ou semé d'écailles d'une autre couleur, mais sans taches ni marbrures.
    α Prothorax aussi ou plus long que large.
      * Noir ou avec des écailles blanches disséminées.
        × Un large sillon sur le prothorax.
          + Pas de sillons tarsaux sur les flancs du prothorax . . . . . 1. *A. carbonaria.*
          +-+ Des sillons tarsaux . . . . . 2. *A. sparsa.*
        ×× Un faible sillon en arrière sur le prothorax . . . 3. *A. græca.*
      ** Noir ou brun, généralement avec des écailles jaunes.
        × Prothorax canaliculé dans toute sa longueur.
          + Une impression de chaque côté du sillon médian, en arrière.
            o Écailles dorées et brunes, les premières en majorité sur les élytres . . . . . 4. *A. lepidoptera.*
            oo Écailles dorées en minorité.

x Sillon du prothorax profond . . . . . 5. *A. aurorata.*
xx Sillon du prothorax faible . . . . . 6. *A. impressicollis.*
+-+ Pas d'impression de chaque côté du sillon prothoracique, vers la base . . . . .
o Angles postérieurs du prothorax divergents . 8. *A. pyrsolepis.*
oo Angles postérieurs du prothorax non diverg. 7. *A. rorulenta.*
XX Prothorax non sillonné dans toute sa longueur.
+ Des squamules dorées, nombreuses. . . . 9. *A. cœca.*
+-+ Pas de squamules dorées . . . . . 10. *A. lithophila.*
*aa* Des taches ou des marbrures sur les téguments
α Prothorax fortement tuberculeux . . . . . 20. *A. chilensis.*
αα Prothorax sans tubercules.
* Sillons tarsaux nuls ou obsolètes.
X Prothorax rétréci à la base, ses angles postérieurs épaissis.
+ Fortement carénés . . . . . 11. *A. conspersa.*
+-+ Faiblement carénés . . . . . 12. *A. brevicornis.*
XX Angles postérieurs du prothorax non épaissis.
+ Une côte longitudinale au milieu de chaque élytre . . . . . 13. *A. obtecta.*
+-+ Pas de côte sur les élytres.
o Angles postérieurs du prothorax divergents.
x Prothorax sillonné . . . . . 14. *A. fasciata.*
xx Prothorax non sillonné . . . . . 21. *A. Oliveri.*
oo Ces angles courts, non divergents.
x Corps presque entièrement couvert de squamules dorées . . . . . 15. *A. profusa.*
xx Squamules dorées en minorité . . . . . 16. *A. cavicollis.*
** Des sillons tarsaux . . . 17. *A. marmorata.* 18. *A. quercea.* 19. *A. pennata.*

AA Élytres convexes jusqu'à l'extrémité.
*a* Flancs prothoraciques plus ou moins impressionnés, mais sans sillons tarsaux nettement accusés.
α Squamules d'une ou de deux teintes, mais dans ce dernier cas non disposées par taches.
* Prothorax aussi ou plus long que large.
X Élytres non sillonnées, si ce n'est parfois dans la région humérale.
+ D'un noir uniforme.
x Opaque. . . . . 22. *A. drusa.*
xx Luisant. . . . . 28. *A. inflata.*
+-+ Brun ou noir varié d'écailles de couleur claire.
x Corps de largeur normale.
y Angles prothoraciques divergents . . . 23. *A. unicolor.*
yy Angles prothoraciques non divergents. . 24. *A. avita.*
xx Très-étroit. . . . . 25. *A. linearis.*
XX Élytres sillonnées.
+ Angles postérieurs du prothorax divergents . 27. *A. tenebrioides.*
+-+ Angles postérieurs du prothorax non diverg. 26. *A. Mäklini.*
** Prothorax plus large que long . . . . . 32. *A. aberrans.*
αα Squamules disposées par taches.

* Une grande tache triangulaire noire sur les élytres. . 29. *A. dorsalis.*
** Des marbrures jaunes sur fond noir . . . . . 30. *A. maculata.*
*aa* Des sillons tarsaux nettement limités.
*α* Prothorax au moins aussi long que large . . . . . 31. *A. calabarica.*
*αα* Prothorax plus large que long. . . . . 34. *A. laticollis.*

## Section II.

### *Neuf stries de points distinctes, avec les intervalles plus finement ponctués, sur les élytres.*

A Un tubercule vers la base du prothorax vis-à-vis l'écusson.
42 *A. Jacquieri.* 46. *A. rubra.* 43. *A. Chabannei.* 44. *A. palliata.*
AA Prothorax sans tubercule devant l'écusson.
*a* Très-inégal ou plurituberculé.
*α* Plurituberculé.
* Prothorax aussi large que long. . . . . 33. *A. geographica.*
** Prothorax moins large que long.
× Prothorax avec deux tubercules au bord antérieur. 35. *A. cribrata.*
×× Prothorax avec deux tubercules en arrière.
+ Antennes pectinées . . . . . 40. *A. pectinata.*
+-+ Antennes non pectinées . . . . . 41. *A. mamillata.*
*αα* Très-inégal . . . . . 45. *A. inœqualis.*
*aa* Peu ou point inégal et sans tubercule.
*α* Couleur foncière noire ou brunâtre.
* Noire, sans taches . . . . . 37. *A. aurulenta.*
** Brunâtres avec des taches ou marbrures.
× Angles postérieurs du prothorax assez fortement recourbés en dehors . . . . . 36. *A. spurca.*
×× Angles postérieurs du prothorax brièvement divergents à la pointe.
+ Prothorax notablement plus long que large . 38. *A. Wallacei.*
+-+ Prothorax un peu plus long que large . . . 39. *A. modesta.*
*αα* Couleur foncière jaune ou rougeâtre.
* Extrémité des élytres plus obscure.
× Élytres brusquement déprimées le long de la suture. . . . . 49. *A. adspersa.*
×× Élytres non déprimées le long de la suture.
+ Une petite élévation longitudinale à la base des élytres de chaque côté de l'écusson. . 47. *A. pollinaria.*
+-+ Pas d'élévation à la base des élytres. . . . 48. *A. setosa.*
** Élytres unicolores.
× Prothorax plus long que large . . . . . 51. *A. mexicana.*
×× Prothorax plus large que long . . . . . 50. *A. subcostata.*

1re SECTION.

1. A. CARBONARIA. — SCHRANK. *Enum. Ins. Austr.*, 1781.

*A. atomaria.* — FABR. *Entom. system.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 51.

Europe.

2. A. SPARSA. — *Atra, opaca, squamis atris obducta, argenteis raris sparsis; prothorace late canaliculato, latitudine haud longiore; elytris deplanatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 14 1/2 mill., lat. 4 1/2 mill.

*Adelocera sparsa.* — CAND. *Mém. Acad. Br.*, 1865, p. 6.

Tout entier d'un noir mat, profond, revêtu d'écailles de même couleur parmi lesquelles brillent, çà et là, quelques-unes d'un blanc argenté. Prothorax très-densément et fortement ponctué, à peine aussi long que large, arqué sur les côtés, largement et profondément sillonné dans toute sa longueur, ses angles postérieurs très-petits, grêles, un peu divergents. Élytres de la largeur du prothorax et deux fois plus longues, curvilinéairement rétrécies seulement à partir du milieu, aplaties sur le dos, ponctuées comme le prothorax. Sillons des flancs prothoraciques bien marqués; angles postérieurs des arceaux de l'abdomen présentant chacun un point blanc.

Californie, Sacramento.

Semblable à notre *A. carbonaria,* mais plus court, quoique aussi large. (Coll. Dohrn, Janson, Thevenet, Candèze, etc.)

3. A. GRÆCA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 61.

Grèce; Asie Mineure.

4. A. LEPIDOPTERA. — GYLL. *Ins. suec.*, t. I, p. 379. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 52.

Europe septentrionale et Alpes du centre; Sibérie.

5. A. AURORATA. — SAY. *Trans. Am. phil. Soc.*, t. VI, p. 181. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 73.

États-Unis, New-Hampshire.

6. A. IMPRESSICOLLIS. — SAY. *Ann. Lyc.*, p. 260. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 57.

États-Unis du centre, de l'ouest et du sud.

7. A. RORULENTA. — *Brunnea, squamulis brunneis aureisque adspersa; prothorace latitudine paulo longiore, punctato, medio late et profunde sulcato, angulis posticis brevibus, haud divaricatis; elytris dorso deplanatis, punctatis; sulcis tarsorum male definitis.*

Long. 12 mill., lat. 3 $^1/_4$ mill.

*Adelocera rorulenta.* — LEC. *Proc. Acad. Phil.*, 1859, p. 283.

Orégon, Van Couver Isl.

8. A. PYRSOLEPIS. — *Castanea, confertim punctata, squamis fulvis dense tecta, paucis nigris intermixtis; thorace latitudine haud longiore, antice angustato, lateribus ante medium rotundatis, angulis posticis parvis divergentibus, haud carinatis, medio late canaliculato; elytris dorso depressis, punctis nigris marmoratis; subtus, antennis pedibusque fuscis.*

Long. 13 mill.

*Adelocera pyrsolepis.* — LEC. *Proc. Acad. Phil.*, 1866, p. 589.

N. Mexique.

9. A. COECA. — *Brunnea, opaca, pilis squamiformibus fulvis brunneisque intermixtis vestita; prothorace latitudine haud longiore, lateribus parum arcuato, convexo, crebre fortiterque punctato, angulis posticis rectis; elytris brevibus, ad suturam deplanatis, crebre punctatis; sulcis tarsorum, dimidiatis.*

Long. 13 mill., lat. 3 $^3/_4$ mill.

Brunâtre, opaque, revêtu de poils squamiformes d'un fauve

doré et bruns entremêlés. Front convexe en avant. Prothorax aussi long que large, peu rétréci en avant, sinon brusquement au sommet, ses côtés peu arqués, convexe, couvert de gros points serrés, ses angles postérieurs nullement divergents. Élytres de la largeur du prothorax et à peine deux fois plus longues, aplaties dans la région suturale, atténuées en arrière, couvertes de points comme le prothorax; sillons tarsaux des flancs prothoraciques faibles et incomplets.

Guatemala, Izabal. (Coll. Sallé.)

10. A. LITHOPHILA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 60.

Égypte.

11. A. CONSPERSA. — GYLL. *Ins. suec.*, t. I, p. 377. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 54.

Europe septentrionale et Sibérie.

12. A. BREVICORNIS. — LEC. *Trans. Am. phil. Soc.*, t. X, p. 490. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 73.

Lac Supérieur.

13. A. OBTECTA. — SAY. *Trans. Am. phil. Soc.*, t. VI, p. 181. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 73.

Maine et Vermont.

14. A. FASCIATA. — LINN. *System. Natur.*, t. I, 2, p. 655. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 53.

Europe.

15. A. PROFUSA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 54.

Orégon.

16. A. CAVICOLLIS. — *Fusco-brunnea, opaca, brunneo-squamosa, squamis fulvis adspersa; prothorace lato, basi coarctato, medio late sulcato, utrinque impresso, angulis posticis truncatis;*

*elytris latis, depressis, extrorsum sulcatis, sulcis tarsorum nullis.*

Long. 16 mill., lat. 5 mill.

*Adelocera cavicollis.* — Lec. *Proc. Ac. phil.*, 1859, p. 86.

Orégon.

17. A. MARMORATA. — Fabr. *System. Eleuth.*, t. II, p. 227. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 57,

États-Unis du sud.

18. A. QUERCEA. — Herbst. *Füssl. Arch.* — *A. varia* Ol. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 55.

Europe centrale.

19. A. PENNATA. — Fabr. *Syst. El.*, 2, 259. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 56.

États-Unis du centre et du sud.

20. A. CHILENSIS. — Solier, in Gay. *Hist. d. Chile.*, t. V, p. 7, pl. XIII, fig. 1. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 58, pl. I, fig. 13.

Chili.

21. A. Oliveri. — *Brunnea, opaca, brunneo-pilosa, flavo-marmorata; prothorace latitudine haud longiore, convexo, crebre tenuiterque punctato, angulis posticis brevibus, apice paulo divaricatis; elytris punctatis, dorso depressis, basi lateribusque sulcatis.*

Long. 15 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Brun, opaque, revêtu de poils bruns peu visibles et d'autres flaves formant des marbrures. Front impressionné au milieu et vers son bord antérieur. Prothorax aussi long que large, rétréci au sommet, assez convexe, densément et finement ponctué, un peu rétréci à la base, ses angles postérieurs petits, faiblement divergents. Élytres parallèles jusqu'au delà du milieu, aplaties sur le dos en avant, densément et assez finement ponctuées, pré-

sentant quelques sillons à la base et sur les côtés. Dessous et pattes de la couleur du dessus; pas de sillons tarsaux sur les flancs du prothorax.

Indes orientales, Dargeeling.

Un exemplaire sous ce nom dans la collection de M. Janson.

22. A. DRUSA. — *Atra, opaca, nigro-pilosa, pilis argenteis sparsim irrorata; fronte antrorsum biimpressa; prothorace latitudine longiore, postice canaliculato; elytris confertissime rugose punctatis, dorso haud depressis; antennis tarsisque brunneis.*

Long. 9 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

*Adelocera drusa*, MARS. *Abeille*, t. VI, p. 380.

Voisin de l'*A. græca*, mais plus opaque, plus rugueusement ponctué sur les élytres et bien distinct surtout par la convexité de celles-ci.

Syrie.

23. A. UNICOLOR. — *Brunnea, subnitida, brunneo-pilosula, pilis albidis raris irrorata; fronte antrorsum impressa; prothorace latitudine longiore, parallelo, convexo, postice impresso; elytris convexis, seriatim punctatis.*

Long. 16 mill., lat. 4 mill.

Brun, un peu luisant, revêtu de poils bruns peu denses et peu visibles et offrant quelques poils blancs disséminés çà et là. Front impressionné. Prothorax plus long que large, à peu près parallèle, convexe, très-ponctué, biimpressionné à la base, ses angles postérieurs un peu divergents, très-aigus au bout. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au milieu, convexes en dessus, couvertes de points serrés disposés en séries longitudinales. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

Perse. (Coll. Jans.)

24. A. AVITA. — SAY. *Trans. Am. phil. Soc.*, t. VI, p. 182.

États-Unis.

25. A. LINEARIS. — *Elongata, brunnea, subnitida, pilis subsquamiformibus brunneis pallidisque adspersa ; prothorace oblongo-quadrato, valde convexo, subinæquali; elytris prothorace angustioribus, linearibus, punctatis.*

Long. 13 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

*Adelocera linearis.* — CAND. *Elat. nouv.*, in *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 6.

Tournure du *Dilobitarsus petiginosus*. Étroit et allongé, subcylindrique, brun ferrugineux un peu luisant, revêtu de poils à peine squamiformes bruns et blanchâtres, mêlés sans ordre et trop clair-semés pour voiler la couleur du fond. Front un peu concave. Antennes faiblement dentées. Prothorax en carré long, droit et parallèle sur les côtés, très-bombé, inégal, ponctué, subsillonné au milieu, ses côtés perpendiculaires, ses angles postérieurs nettement divergents, acuminés. Élytres plus étroites que le prothorax, plus de trois fois plus longues que larges, linéaires, déprimées vers la suture, ses côtés tombant perpendiculairement, ponctuées assez finement, subsillonnées vers la base, arrondies au bout.

Cayenne.

26. A. MÄKLINI. — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 6. — IBID. *Ins. rec. p. M. Lewis* (*Mém. Soc. Liége*, sér. II, V), p. 1.

Japon méridional.

27. A. TENEBRIOIDES. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 61 (emend.)

Madagascar.

28. A. INFLATA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 62.

Madagascar.

29. A. DORSALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 62, pl. I, fig. 4.

Madagascar.

30. A. MACULATA. — *Nigra, supra nigro-squamosa, confertim punctata, maculis pallide aureis, squamosis, ornata; prothorace*

*latitudine longiore, convexo, antice angustato, lateribus parallelis, antice rotundatis, angulis posticis rectis planis, haud divergentibus; elytris extrorsum obsolete striatis, dorso vix depressis; subtus pallide squamosa, antennis pedibusque fuscis.*

Long. 13 mill.

*Adelocera maculata.* — Lec. *Proceed. Acad. Phil.*, 1866, p. 389.

États-Unis de l'est.

31. A. CALABARICA. — *Fusca, pilis squamiformibus aureis sparsis; prothorace latitudine haud longiore, lateribus fere recto subsinuato, convexo, cribrato; elytris brevibus, crebre punctatis, ad suturam antice depressis et atrinque basi tumidis; sulcis tarsorum profundis.*

Long. 14 mill., lat. 4 mill.

Brunâtre, avec des poils squamiformes d'un jaune doré, épars, dirigés en divers sens et formant sur le prothorax deux lignes transversales. Front concave en avant. Antennes très-courtes. Prothorax aussi large que long, ses côtés presque parallèles et subsinueux, très-convexe et criblé de gros points, ses angles postérieurs non divergents, aigus au bout. Élytres courtes, de la largeur du prothorax, curvilinéairement rétrécies depuis le tiers antérieur, déprimées vers la suture en avant, faiblement tuberculeuses vers la base derrière l'écusson, fortement ponctuées. Flancs du prothorax présentant une fossette basilaire et un profond sillon pour loger les pattes antérieures. Dessous, surtout le prosternum et le métathorax, criblés de gros points.

Vieux-Calabar. (Coll. Jans.)

32. A. ABERRANS. — *Fusco-brunnea, crassa, pilis squamiformibus flavis brunneisque intermixtis adspersa; prothorace longitudine latiore, gibbo, crebre punctato; elytris convexis, crebre punctatis; sulcis tarsorum obsoletis.*

Long. 12 mill., lat 5 $^1/_2$ mill.

Aspect de *Lacon*. Court, épais, brunâtre, couvert de poils squamiformes fauve-clair et bruns entremêlés. Antennes à deuxième article grand et triangulaire comme le suivant. Prothorax transversal, très-bombé, criblé de gros points, ses angles postérieurs très-acuminés au bout. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, convexes, criblées de points comme le prothorax. Flancs présentant un sillon tarsal obsolète.

Caracas.

Cette espèce a l'apparence du *Lacon dubius*, mais la conformation des antennes et des sillons prosternaux ne laisse aucun doute sur la place qu'elle doit occuper. Je l'ai vue dans la collection de M. Sallé.

33. A. LATICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 59.

Cayenne.

2me SECTION.

34. A. GEOGRAPHICA. — *Nigra, opaca, pilis squamiformibus brunneis griseo-cervinisque marmoratim dense obducta; fronte concava, cristata; prothorace latitudine haud longiore, basin versus coarctato, quinque tuberculato; elytris convexis, seriatim grosse punctatis.*

Long. 28 mill., lat. 9 mill.

*Adelocera geographica.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 7.

Noir mat, revêtu de poils squamiformes assez serrés pour masquer la couleur des téguments, d'un brun jaunâtre et gris, ceux-ci formant des taches déchiquetées sur les élytres. Front fortement excavé, redressé de chaque côté, avec une crête transversale reliant les crêtes latérales. Prothorax aussi large que long, arrondi sur les côtés en avant, un peu rétréci en arrière, portant cinq tubercules plus ou moins obsolètes, criblé de gros points, ses angles postérieurs divergents, aplatis. Élytres convexes, atté-

nuées en arrière, striées-ponctuées, les intervalles plats. Sillons tarsaux très-forts sur les flancs du prothorax.

Bornéo et Malacca. (Coll. Jans. et Cand.)

35. A. CRIBRATA. — CAND. *Monogr.*, t. 1, p. 63, pl. I, fig. 7.

*Adelocera lacerta.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 7.

Malacca.

Cette espèce, que j'ai décrite autrefois d'après un seul exemplaire défectueux et privé d'indication d'origine, est de la Malaisie et non de la Guyane, comme je l'ai supposé. J'ai eu, depuis, l'occasion d'en voir de nombreux spécimens dans la collection de M. de Castelnau. Elle a des téguments revêtus de squamules d'un gris jaunâtre sale, assez caduques, en sorte qu'on rencontre parfois des individus qui en sont dépourvus.

L'*A. lacerta* est la même en bon état de conservation.

36. A. SPURCA. — *Fusca, squamulis sordide griseis brunneisque minus dense obducta; prothorace tumido, lateribus arcuato, cribrato; elytris seriatim grosse punctatis, sulcis tarsorum profundis.*

Long. 20-24 mill., lat. 5-6 mill.

Épais, brunâtre, revêtu de poils squamiformes d'un gris sale, entremêlés de bruns, formant quelques dessins peu apparents sur les élytres. Front concave, l'excavation divisée en deux par une ligne saillante transversale. Prothorax un peu plus long que large, rétréci en arrière, arrondi sur les côtés, très-bombé, criblé de très-gros points, ses angles postérieurs courts, recourbés en dehors. Écusson oblong, pentagonal, déclive. Élytres de la largeur de la portion antérieure du prothorax, plus de deux fois plus longues, marquées de lignes de très-gros points rapprochés, les intervalles ponctués. Dessous criblé de points comme le dessus; flancs prothoraciques présentant un sillon tarsal courbe, très-profondément imprimé.

Laos.

Trouvé par Mouhot. (Coll. Janson, Saunders, Candèze.)

37. A. AURULENTA. — *Nigra, parum nitida, pilis squamiformibus auratis adspersa; prothorace latitudine longiore, crebre fortiterque punctato, angulis posticis divaricatis haud carinatis; elytris prothorace latioribus, apice subacuminatis, dorso subdepressis, seriatim punctatis.*

Long. 20 mill., lat. 5-5 $^1/_2$ mill.

*Adelocera aurulenta.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 6.

Noir, presque mat, revêtu de poils squamiformes d'un jaune doré obscur, médiocrement serrés et ne masquant pas la couleur du fond. Front excavé en avant. Prothorax plus long que large, à peu près aussi large au sommet qu'à la base, un peu élargi vers le milieu, ses côtés par conséquent très-faiblement courbes, assez convexe, sans impressions ni bosselures, faiblement sillonné au milieu, criblé de très-gros points, ses angles postérieurs brusquement divergents, non carénés. Écusson en carré long, échancré latéralement. Élytres plus larges que le prothorax et deux fois et trois quarts plus longues, curvilinéairement rétrécies au delà du milieu, subacuminées au sommet, un peu déprimées sur le dos, marquées de neuf lignes de gros points avec les intervalles marqués de points épars plus petits. Pattes brunâtres, les antérieures et les tarses des autres brun-ferrugineux.

Ceylan, Rambodde.

Deux spécimens de cette espèce ont été découverts, par M. J. Nietner, dans le tronc d'un arbre mort. (Coll. Jans.)

38. A. WALLACEI. — *Fusco-brunnea, squamulis fulvis adspersa, brunneo-plagiata; prothorace latitudine longiore, lateribus fere recto-parallelo; elytris brevibus, striato-punctatis, basi oblique carinatis.*

Long. 16 mill., lat. 4 mill.

Brunâtre, opaque, revêtu de squamules d'un fauve clair, le prothorax marqué de quelques taches brunes affectant une disposition longitudinale, les élytres présentant deux taches communes

brunes, l'antérieure située vers le milieu de la région suturale, allongée, réunie à sa correspondante par son milieu, l'autre derrière celle-ci, en triangle allongé. Prothorax oblong, à peu près parallèle, convexe, fortement et densément ponctué. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, aplaties sur le dos, marquées de séries de gros points, présentant à la base une crête oblique partant de l'angle huméral et aboutissant à l'angle scutellaire. Une impression le long de la suture prosternale, sans sillons tarsaux proprement dits.

Bornéo, Sarawack.

Un exemplaire trouvé par M. Wallace et faisant partie de la collection de M. Janson.

39. A. MODESTA. — BOISD. *Faune de l'Océanie,* p. 108. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 71.

Région tropicale des deux mondes et de la Polynésie.

L'*A. squalida* FAIRM., diffère trop peu de cette espèce cosmopolite pour en être distinguée. Quant à l'*E. nigroplagiatus,* BL., il semble distinct au premier abord, mais un examen attentif fait bientôt reconnaître que ce n'en est qu'une variété locale, remarquable par sa vestiture plus jaune et les taches du prothorax mieux marquées.

40. A. PECTINATA. — *Nigro-ferruginea, squamis aureis, obscuris pallidisque variegatim vestita; antennis maris pectinatis; prothorace elongato, basin versus bituberculato; elytris seriatim punctatis.*

Long. 14 mill., lat. 4 mill.

*Adelocera pectinata.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 8.

Allongé, subrhomboïdal, d'un ferrugineux noir, orné de poils squamiformes dorés et brunâtres, les premiers couvrant la tête, le prothorax, l'écusson, la base et le sommet des élytres, les seconds formant des dessins sur le prothorax et occupant la partie moyenne des élytres; parmi ces derniers on observe quelques

écailles argentées, groupées un peu au delà du milieu du dos. Front fortement excavé. Antennes ferrugineuses, assez longuement pectinées à partir du troisième article (au moins chez le mâle). Prothorax notablement plus long que large, un peu rétréci en avant à partir du milieu, courbe dans le sens transversal, portant en arrière deux forts tubercules rapprochés, profondément et fortement ponctué, ses angles antérieurs obliquement tronqués, les postérieurs acuminés. Écusson en pentagone allongé. Élytres de la largeur du prothorax à la base, et une fois et trois quarts aussi longues, atténuées à partir de la base, cunéiformes, déprimées vers la suture, fortement ponctuées en séries longitudinales, présentant chacune à la base une petite fossette limitée en dedans par une courte côte. Dessous et pattes noirâtres.

Cayenne.

Un exemplaire communiqué par M. de Mniszech. La pectination des antennes (au moins dans l'un des sexes) est remarquable, mais d'autres espèces offrant des degrés intermédiaires sous ce rapport, ce caractère perd de son importance.

41. A. MAMILLATA. — *Angusta, obscure ferruginea, pilis squamiformibus aureo-flavis ferrugineisque variegata; prothorace elongato, lateribus fere parallelo, dorso bituberculato; elytris ad suturam deplanatis, seriatim punctatis.*

Long. 12 mill., lat. fere, 3 mill.

*Adelocera mamillata.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 7.

Étroit et allongé, d'un ferrugineux obscur, revêtu de poils squamiformes les uns flave-doré, les autres ferrugineux, les premiers couvrant la tête, les côtés du prothorax, l'écusson, la base et le sommet des élytres, et disséminés en outre, isolément, parmi les autres qui couvrent le milieu du prothorax et la plus grande partie des élytres. Front convexe, arrondi et impressionné légèrement en avant. Prothorax allongé, peu rétréci au sommet, très-bombé, profondément ponctué, présentant latéralement au sommet et de chaque côté une forte impression longitudinale, et

sur le disque, en arrière du milieu, deux forts tubercules rapprochés. Élytres de la largeur du prothorax à la base, parallèles jusqu'au milieu, atténuées au delà, aplaties dans la région suturale, marquées de neuf séries de points assez gros avec des points plus petits disséminés dans les intervalles. Dessous d'un brun noirâtre, pattes ferrugineuses.

Cayenne.

*Facies* d'un *Dilobitarsus,* dû principalement aux tubercules du prothorax.

42. A. Jacquieri. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 64, pl. I, fig. 8.

Cayenne.

43. A. Chabannei. — Guér. *Icon.,* pl. XII, fig. 4. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 65.

Brésil septentrional et Guyane.

44. A. palliata. — Latr. *Voyag. Humb.,* t. I, p. 154, pl. XVI, fig. 3.

*Adelocera Chapuisii.* — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 66, pl. I, fig. 5.

Nouvelle-Grenade.

45. A. inæqualis. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 67.

Nouvelle-Grenade.

46. A. rubra. — Perty. *Delect. Anim.,* p. 20, pl. V, fig. 1. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 67.

Brésil, Rio.

47. A. pollinaria. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 68, pl. I, fig. 14.

Brésil.

48. A. setosa. — *Flava, pilis subsquamiformibus flavis irrorata; prothorace latitudine longiore, disco quadriimpresso, brunneo; elytris brevibus, acuminatis, striato-punctatis, apice brunneis.*

Long. 12 mill., lat. 3 $^1/_3$ mill.

Jaune, avec le milieu du prothorax et le tiers apical des élytres d'un brun rougeâtre, revêtu de poils subsquamiformes épars, un peu plus larges sur le prothorax que sur les élytres. Front triangulairement impressionné. Prothorax plus long que large, curvilinéairement rétréci en avant, convexe, fortement et densément ponctué, présentant quatre impressions sur le disque, brusquement déclive en arrière, ses angles postérieurs nullement divergents, arqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax, moins de deux fois plus longues, atténuées à partir de la base, acuminées au bout, marquées de séries de points. Dessous brun, sauf les flancs du prothorax, qui sont dépourvus de sillons tarsaux; pattes brun-clair.

Para, Villa-Nova da Rainha. (Coll. Jans.)

49. A. ADSPERSA. — *Elongata, brunnea, sparsim flavo-squamulosa; prothorace latitudine longiore, parallelo, convexo, crebre fortiterque punctato; elytris dorso deplanatis, striato-punctatis, apice nigrescentibus.*

Long. 14 mill., lat. 3 $^1/_5$ mill.

Assez allongé, brun avec le milieu du prothorax et près de la moitié postérieure des élytres noirâtres, revêtu, peu densément, de squamules d'un flave clair, parmi lesquelles on en remarque quelques-unes plus obscures. Front triangulairement impressionné. Prothorax notablement plus long que large, en carré long, très-convexe et très-ponctué, marqué de quatre petites impressions sur le disque, ses angles postérieurs courts, aigus, un peu divergents à l'extrémité. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, aplaties le long de la suture, striées-ponctuées, présentant à la base une courte saillie longitudinale de chaque côté de l'écusson. Dessous et pattes bruns, le métathorax et l'abdomen noirs avec leurs squamules presque blanches. Flancs prothoraciques sans sillons tarsaux.

Guatemala, Izabal.

Cette espèce, dont un exemplaire se trouve dans la collection

de M. Sallé, est très-voisine de l'*A. pollinaria*, mais elle est plus étroite en proportion de sa longueur.

50. A. SUBCOSTATA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 69.

Guadeloupe.

51. A. MEXICANA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 70.

Mexique.

## DILOBITARSUS.

LATR. *Ann. Soc. entom. Fr.*, t. III, p. 142.

—

### I. — *Prothorax dépourvu de tubercules.*

A Très-long. Prothorax beaucoup plus long que large. . . 17. *D. gracilis.*
AA Allongé, prothorax aussi long que large ou à peu près.
*a* Angles postérieurs du prothorax carénés.
α Prothorax carré . . . . . 1. *D. petiginosus.*
αx Prothorax arrondi latéralement . . . . . 3. *D. nebulosus.*
*aa* Angles postérieurs du prothorax non carénés . . . 2. *D. tessellatus.*
AAA Court, prothorax transversal . . . . . 4. *D. abbreviatus.*

### II. — *Prothorax tuberculeux.*

A Tubercules du prothorax faibles.
*a* Élytres marquées de points serrés . . . . . 6. *D. columbianus.*
*aa* Élytres subsillonnées . . . . . 7. *D. subsulcatus.*
AA Tubercules du prothorax bien marqués.
*a* Six tubercules . . . . . 9. *D. irroratus.*
*aa* Quatre tubercules.
α Prothorax rétréci au sommet . . . . . 10. *D. lignarius.*
αα Prothorax non rétréci au sommet . . . . . 11. *D. quadrituberculatus.*
*aaa* Deux tubercules.
α Prothorax tuberculeux au milieu du disque.
* Corps allongé . . . . . 8. *D. Deyrollei.*
** Corps très-court . . . . . 5. *D. cuneatus.*
αα Tubercules rapprochés du bord antérieur.
* Corps de largeur normale.
× Deux côtes longitudinales sur les élytres . . 12. *D. bicornis.*
×× Pas de côtes sur les élytres. . . . . 13. *D. nubilus.*
** Corps linéaire.
× Élytres atténuées en arrière.
+ Téguments noirs. . . . . 14. *D. bidens.*
++ Téguments bruns.
x Prothorax sans sillons . . . . . 15. *D. inopinus.*
xx Prothorax sillonné . . . . . 16. *D. Eloini.*
×× Élytres élargies en arrière . . . . . 18. *D. cornutus.*

1. D. PETIGINOSUS. — GERM. *Zeitschr.*, t. II, p. 246, pl. I, fig. 3. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 77.

Brésil.

2. D. TESSELLATUS. — *Parallelus, rufus, pilis squamiformibus brunneis argenteisque marmoratim variegatus; prothorace subquadrato, convexo, lateribus subsinuato, angulis posticis haud carinatis; elytris prothorace vix latioribus, dorso deplanatis, crebre punctatis.*

Long. 13 mill., lat. 5 mill.

Voisin du précédent. Il s'en distingue par la vestiture, où le blanc domine davantage, et surtout par l'absence complète de carènes sur les angles postérieurs du prothorax, carènes bien visibles chez le *petiginosus*.

Brésil, N. Fribourg. (Coll. Jans.)

3. D. NEBULOSUS. — *Brunneus, fere opacus, squamulis brunneis, aureis albidisque marmoratim vestitus; prothorace longitudine paulo latiore, basi profunde impresso; elytris dorso depressis, extus humeros versus sulcatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Brun obscur, presque mat, revêtu d'écailles médiocrement serrées, brunes, dorées et blanches, les secondes formant marbrures, les troisièmes rares. Front bombé. Prothorax un peu plus large que long, bombé, ponctué, subsillonné en avant, fortement impressionné au milieu vers la base, ses côtés arqués, ses angles postérieurs non divergents, faiblement carénés. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, très-ponctuées, déprimées le long de la suture, présentant quelques sillons vers la région humérale. Flancs du prothorax impressionnés, mais sans sillons tarsaux.

Cayenne.

Cette espèce a le *facies* d'une *Adelocera* de la première section, mais ses tarses visiblement lamellés la classent ici. J'en ai vu un exemplaire dans l'ancienne collection Castelnau.

4. D. ABBREVIATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 78.

Brésil.

5. D. CUNEATUS. — *Brevis, nigro-brunneus, pilis squamiformibus auratis sparsutus; prothorace transverso, apice subito angustato, transverse gibboso, angulis posticis haud divaricatis, acutis; elytris dense et grosse seriatim punctatis, cuneatis, brevibus, basi subtuberculatis, apice acuminatis.*

Long. 10 mill., lat. 4 mill.

*Dilobitarsus cuneatus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 8.

Court, très-large, cunéiforme, d'un brun noir teinté de rougeâtre sur les côtés du prothorax, ainsi qu'à la base et au sommet des élytres, revêtu, mais pas assez densément pour masquer la couleur du fond, de poils squamiformes dorés. Front arrondi en avant, impressionné sur le sommet. Antennes brièvement pectinées (au moins chez les mâles), ferrugineuses. Prothorax plus large que long, droit sur les côtés en arrière, un peu élargi vers le tiers antérieur, puis brusquement rétréci au sommet, fortement et transversalement gibbeux sur le disque, couvert de gros points profonds, ses angles postérieurs nullement divergents, aigus au sommet. Écusson pentagonal, échancré latéralement. Élytres courtes, triangulaires, acuminées au sommet, présentant chacune vers le milieu de leur base un renflement subtuberculiforme, criblées de très-gros points disposés en séries longitudinales. Dessous de la couleur du dessus, fortement ponctué, parsemé de poils squamiformes cendrés sur le métasternum et l'abdomen, jaunes sur le prosternum, celui-ci marqué de sillons obliques pour recevoir les pattes antérieures au repos. Lamelles des tarses très-courtes.

Guyane, Cayenne.

Collection de M. de Mniszech.

6. D. COLUMBIANUS — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 78.

Nouvelle-Grenade.

7. D. SUBSULCATUS. — *Fusco-brunneus, subnitidus, squamulis aureis tessellatus; prothorace latitudini longitudine æquali, basin versus angustato, disco sulcato et antice obsolete bituberculato, inæqualiter punctato, angulis posticis subdivaricatis, obsolete carinatis; elytris ad suturam depressis, tenuiter sulcatis.*

Long. 13 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, des poils squamiformes dorés formant des marbrures sur tout le corps. Front concave en avant. Prothorax aussi large que long, un peu dilaté en avant, échancré de chaque côté en arrière, convexe et inégal en dessus, le milieu longitudinalement sillonné, deux tubercules obsolètes près du bord antérieur, ses angles antérieurs abaissés et arrondis en dehors, les postérieurs un peu divergents, obsolètement carénés. Élytres un peu plus larges que le prothorax, parallèles, déprimées vers la suture, très-ponctuées, légèrement sillonnées.

Équateur. (Coll. Jans.)

8. D. DEYROLLEI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 79, pl. I, fig. 11.

Nouvelle-Grenade.

9. D. IRRORATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 80.

Nouvelle-Grenade.

10. D. LIGNARIUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 80.

Uruguay; Rép. Argentine.

11. D. QUADRITUBERCULATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 81.

Brésil, S$^{te}$-Catherine.

12. D. BICORNIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 82.

Brésil.

13. D. NUBILUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 83.

Nouvelle-Grenade.

14. D. BIDENS. — FABR. *Syst. Eleuth.*, t. II, p. 227. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 83, pl. I, fig. 6.

Brésil; Guyane; Colombie; Amér. centrale.

15. D. INOPINUS. — *Lineari-elongatus, angustus, brunneus, pilis squamiformibus, multicoloribus variegatus; prothorace latitudine multo longiore, antice dilatato, cribrato, apud marginem anticum tuberculis duobus acuminatis; elytris angustis, seriatim grosse punctatis, interstitiis punctis minoribus.*

Long. 18 mill., lat. 4 mill.

Très-voisin du précédent. Il est généralement plus grand, entièrement brun, revêtu de poils squamiformes brun-foncé, brun-clair, gris, dorés et blancs entremêlés, les premiers formant, par leur agglomération, quelques taches sur les élytres; sur le front, les angles antérieurs et la base du prothorax et la base des élytres, les poils jaunes dominent. Le reste comme chez le *bidens*.

Nicaragua. (Coll. Jans.)

16. D. ELOINI. — *Lineari-elongatus, angustus, brunneo-niger, pilis squamiformibus brunneis fulvisque variegatus; fronte antrorsum excavata, luteo-squamosa; prothorace antice incrassato, ad marginem anticum bituberculato, medio canaliculato; elytris angustis, seriatim grosse punctatis, interstitiis punctis minoribus; antennis pedibusque brunneis.*

Long. 14 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

De la forme générale du *bidens*; il s'en distingue principalement par son prothorax sillonné dans toute sa longueur, ses élytres plus déprimées, sa couleur brune et les taches formées par les poils squamiformes fauves mieux marquées, surtout celles de l'extrémité des élytres.

Amérique centrale.

17. D. GRACILIS. — *Linearis, angustus, brunneo-niger, pilis squamiformibus flavis obductus; fronte antrorsum excavata; prothorace latitudine multo longiore, parallelo, apice incrassato, punctato; elytris prothorace haud latioribus, parallelis.*

Long. 12 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

Tournure des précédents, mais plus étroit et plus linéaire; noir ou brun, revêtu de poils squamiformes jaunes avec quelques bruns formant des taches çà et là. Front excavé en avant, revêtu de poils jaunes plus denses. Prothorax très-allongé, parallèle, épaissi en avant, ponctué, sans tubercules près de son bord antérieur. Élytres allongées, parallèles, moins déprimées sur le dos que chez le *bidens*, ponctuées, présentant une petite saillie de chaque côté de l'écusson.

Para, Ega et R. Tapajos. (Coll. Jans.)

18. D. CORNUTUS. — *Lineari-elongatus, angustus, fusco-brunneus, pilis squamiformibus fulvis, nigris albisque variegatus; fronte bicornuta; prothorace antrorsum sensim incrassato, apud marginem anticum bituberculato; elytris brunneis, dense punctatis.*

Long. 10-16 mill., lat. 2-2 $^1/_2$ mill.

*Dilobitarsus cornutus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 8.

De la forme générale du *bidens*, mais plus petit, moins déprimé; d'un brun obscur, avec les élytres brunes maculées de noirâtres et d'un brun testacé dans leur quart apical, revêtu de poils squamiformes fauves, noirs et blancs qui forment des mouchetures et des linéoles sur les téguments, les derniers dessinant trois à quatre fascies ondulées. Front bituberculeux en avant, presque entièrement couvert de poils blanchâtres. Antennes rouge-brun. Prothorax allongé, graduellement épaissi et élargi d'arrière en avant, curvilinéairement rétréci dans son tiers antérieur, sinueux sur les côtés, densément et fortement ponctué, présentant près du bord antérieur deux forts tubercules mousses. Ses angles postérieurs petits, un peu divergents, séparés de la portion moyenne du bord postérieur par une assez grande échancrure. Écusson quadrangulaire, bombé. Élytres un peu plus larges à la base que l'extrémité correspondante du prothorax, graduellement élargies jusqu'au quart postérieur, subcylindriques, très-ponctuées sans stries de points bien nettement marquées, leur

bord antérieur avancé entre l'épaule et l'écusson. Dessous brunâtre; pattes d'un rouge brun.

Cette espèce remarquable, qui possède tout à fait la tournure des *Dilobitarsus* américains et notamment du *D. bidens*, provient de l'Afrique équatoriale. Un exemplaire de petite taille du Vieux-Calabar m'a été communiqué par M. Murray; un second, mesurant le maximum de la taille indiquée ci-dessus, se trouve dans la collection de M. Saunders.

## ANACANTHA.

Solier, in Gay, *Histor. d. Chile*, t. V, p. 18.

Ce genre arrive dans le voisinage des *Adelocera* et des *Dilobitarsus*. Les antennes sont dentées en scie à partir du troisième article, mais elles sont plus longues que le prothorax et ne peuvent se loger dans les cavités sternales. Les tarses sont lamellés, moins fortement toutefois chez l'espèce typique que chez les autres

A Prothorax fortement sillonné au milieu, en dessus . . . . . 1. *A. sulcicollis.*
AA Prothorax non sillonné.
*a* Élytres uniformément noires.
*x* Une tache longitudinale noire sur le prothorax . . . . . 2. *A. vitticollis.*
*ax* Une tache cruciale noire sur le prothorax . . . . . 3. *A. crux.*
*aa* Pubescence des élytres formant des marbrures . . . . . 4. *A. marmorata.*

1. A. SULCICOLLIS. — *Elongata, parallela, nigra, opaca, obscure pilosula; prothorace latitudine longiore, medio sulcato et utrinque biimpresso, angulis posticis brunneis, divaricatis; elytris dorso depressis, parallelis, crebre punctatis; tarsis gracilibus, articulo quarto breviter laminato; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 16-20 mill., lat. 5 $^1/_2$-4 mill.

Solier, *loc. cit.*

Chili.

2. A. VITTICOLLIS. — *Nigra, opaca, obscure pilosula; prothorace lateribus aureo-pilosulis, latitudine paulo longiore, convexo, crebre*

*punctato, angulis posticis rufescentibus; elytris crebre punctatis; tarsis articulis 3-4 laminatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 12 mill., lat. fere 3 mill.

*Adelocera vitticollis.* — Fairm. *Rev. Zool.*, 1860, p. 268.

3. A. crux. — *Nigra, opaca, obscure pilosula; prothorace* (♂) *a basi angustato seu* (♀) *quadrato, aureo-pilosulo, macula cruciformi nigra; elytris crebre punctatis; tarsis articulis 3-4 laminatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. ♂ 14 mill., ♀ 15-17 mill., lat. ♂ 3 $^1/_2$ mill., ♀ 4 $^1/_2$-5 mill.

*Adelocera crux.* — Phil. *Stettin. Zeit.*, 1860, p. 247.

Var. *a. Prothorace sanguineo.*

Plus large en proportion que la précédente et plus atténuée aux extrémités. La femelle a le prothorax plus ou moins rougeâtre, parfois même tout à fait rouge; tel est le cas chez un exemplaire que m'a communiqué M. Edw. Reed, du Musée national de Santiago.

Ce n'est peut-être qu'une variété de la précédente.

4. A. marmorata. — *Brunneo-nigra, opaca, marmorata, obscure et pallide pilosa; prothorace latitudine haud vel vix longiore, apice leviter angustato, medio dilatato, lateribus sinuosis; elytris punctatis, basi impressis; tarsis articulis 3-4 laminatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 15 mill., lat. 3 $^3/_4$ mill.

Brunâtre, opaque, revêtue de poils squamiformes bruns et blanchâtres, formant des marbrures sur tout le dessus, les premiers figurant une tache cruciforme sur le prothorax et quelques grandes taches sur les élytres. Prothorax un peu plus long que large chez le mâle, aussi large que long chez la femelle, un peu rétréci en avant, dilaté au milieu avec ses bords latéraux sinueux, convexe, fortement ponctué, ses angles antérieurs avancés, les

postérieurs un peu divergents, non carénés. Élytres fortement ponctuées, impressionnées à la base. Pas de sillons tarsaux.

Chili.

Communiqué par M. Edw. Reed.

Cette espèce serait aussi bien placée parmi les *Dilobitarsus* que dans le genre actuel, ce qui prouve que ces deux genres n'ont pas de limites bien tranchées entre eux. Si j'ai conservé le genre *Anacantha* de Solier, c'est que le type diffère assez des *Dilobitarsus* pour justifier cette mesure. D'autre part, les *A. vitticollis* et *crux* ont, avec le premier, des rapports trop intimes pour les en éloigner. Des remarques semblables s'appliquent à une foule d'insectes du Chili, qui forment une faune spéciale, et pour lesquels on est tenté de créer autant de genres distincts.

M. le Dr Philippi a décrit, tout récemment, un *Agrypnite* d'après un exemplaire trouvé près de Rancagua, non loin de Santiago. Il en a fait, sous le nom de *Cryptotarsus* (1), un genre à part, dont les caractères me paraissent différer peu de ceux des *Anacantha*, si ce n'est par la présence d'un sillon tarsal aux flancs du prothorax.

Voici les caractères génériques et spécifiques de cet insecte, tels qu'ils sont formulés par l'auteur :

*Antennæ sulco prosterni postice clauso receptæ, undecim articulatæ, articulis 3-10 dentiformibus, secundo minuto, tertio quartoque æqualibus. Tarsi antici sulco prosterni recepti; articulis 3 et 4 tarsorum subtus in lamellam productis, quarto haud dilatato.*

C. ATER. — *Ater, dense scrobiculato punctatus; pronoto gibboso, medio longitudinaliter sulcato; tarsis rufis.*

Long. 14 mill., lat. 4 1/2 mill.

PHILIP, *Stet. entom. Zeit.*, 1873, p. 308, pl. 2, fig. 3.

(1) On pourrait appeler ce genre *Acrocryptus*, le nom de *Cryptotarsus* ayant déjà été appliqué, en 1865, à un malacoderme de Bogota, par M. Kirsch.

**HEXAULACUS.**

Tête petite, enchâssée dans le prothorax.

Antennes fortement dentées, à troisième article aussi grand que le quatrième et de même forme, plus longues que les sillons prosternaux destinés à les recevoir, en sorte qu'elles doivent se recourber pour y entrer.

Sillons prosternaux non fermés en arrière.

Mésosternum élevé, les bords de sa fossette subhorizontaux.

Six sillons profonds, nettement délimités, pour cacher tous les tarses au repos; les sillons pour la réception des tarses postérieurs grands, courbes, occupant toute la longueur du premier segment abdominal.

Tarses à articles 3 et 4 brièvement lamellés.

Ce genre se distingue par le nombre insolite des sillons tarsaux.

H. Reedi. — *Ater, opacus, nigro-pilosus, plaga dorsali prothoracis, scutelli, elytrorumque baseos aureo-pilosa; prothorace lato, medio sulcato, margine laterali explanato; elytris dorso depressis, crebre fortiterque punctatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Noir, mat, revêtu de poils noirs, le prothorax sauf ses bords latéraux, l'écusson et le bord antérieur des élytres couverts de poils d'un doré légèrement rougeâtre. Front petit, excavé. Prothorax aussi large que long, légèrement et curvilinéairement atténué en avant, bombé au milieu avec ses bords latéraux formant expansion, sillonné longitudinalement, criblé de gros points, ses angles postérieurs courts, larges, un peu bombé. Élytres de la largeur du prothorax, déprimées dans la région suturale, criblées de points plus gros et plus serrés que ceux du prothorax.

Valdivia.

Un exemplaire de cet *Agrypnite* remarquable m'a été communiqué par M. Reed, à qui je le dédie.

### OCNEUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 84.

O. LIMBATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 85, pl. II, fig. 27.

Brésil.

### EIDOLUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 178.

E. LINEARIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 179, pl. III, fig. 1.

Brésil, S^te^-Catherine.

### HEMICLEUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 180.

1. H. CAFFER. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 181, pl. III, fig. 3.

2. H. ADSPERSULUS. — *Lineari-angustus, subdepressus, pilosus, fuscus; prothorace latitudine paulo longiore, basi apiceque paulo angustato; elytris punctatis, subtiliter striatis.*

Long. 6 1/2 mill., lat. 1 1/2 mill.

*Dicrepidius adspersulus.* — KLUG, PETER'S *Reis. n. Mozamb. Coleoptera*, p. 196.

Un peu plus étroit que l'*H. caffer* et entièrement d'un brun obscur, revêtu de poils brunâtres et parsemé de poils squamiformes jaunâtres et brillants, disséminés parmi les premiers. Front allongé, longitudinalement subexcavé. Antennes courtes, d'un brun rougeâtre, leur première moitié seule se logeant au repos dans les sillons des flancs. Prothorax un peu plus long que large, convexe, ponctué, arrondi sur les côtés, rétréci légèrement à la base et au sommet. Écusson dilaté en arrière. Élytres parallèles dans leur moitié antérieure, légèrement sillonnées, ponctuées. Dessous du corps de la couleur du dessus, ainsi que les pattes à l'exception des tarses qui sont rougeâtres.

Du Mozambique.

Le type existe au Musée de Berlin.

## OPTALEUS.

Cand. *Monogr.*, t. I, p. 86.

1. O. limbatus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 87, pl. III, fig. 2.

Brésil.

2. O. cribratus. — Blanch. *Voy. d.* d'Orb., t. VI, *Ins.*, 2me part., p. 144. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 88.

Brésil.

3. O. paleolatus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 88.

Brésil.

4. O. fasciatus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 89.

5. O. argentatus. — *Niger, opacus, squamulosus, squamulis albis variegatus; prothorace convexo, lateribus arcuato; elytris brevibus, punctatis; abdomine ferrugineo.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_3$ mill.

Noir mat, revêtu d'écailles noires, des écailles blanches formant un dessin triangulaire sur le prothorax, deux anneaux placés transversalement sur les élytres et couvrant, en outre, la base et l'extrémité de celles-ci ainsi que le pourtour du premier. Prothorax fortement bombé, ponctué, arqué sur les côtés qui sont un peu translucides et rougeâtres, rétréci à la base et davantage au sommet. Élytres de la largeur du prothorax et moins de deux fois plus longues, ponctuées. Abdomen rougeâtre.

Ega. (Coll. Jans.)

## LACON.

Casteln. in Silberm. *Rev. entom.*, t. VI, p. 11.

Ce genre a reçu ici un accroissement considérable, dû principalement aux explorations récentes de l'Indo-Chine, de l'archipel

Malais et de l'Australie. Dans l'impossibilité de le diviser d'une manière rationnelle, et afin d'en rendre la détermination des espèces plus aisée, j'ai réparti celles-ci dans quatre groupes distincts, en prenant pour base la distribution géographique, ainsi que je l'ai fait pour les *Agrypnus*.

Le premier groupe renferme les espèces du continent africain et des îles qui en dépendent.

Le second, sous le nom de *groupe asiatique*, comprend toutes les espèces de l'ancien continent, moins l'Afrique, avec les archipels de l'extrême Orient, jusqu'à la Nouvelle-Guinée inclusivement.

Dans le troisième, je réunis les espèces d'Australie.

Enfin le quatrième renferme les espèces du nouveau continent.

Cette division ne brise aucune analogie et groupe les espèces d'une manière assez satisfaisante.

Le genre *Lacon* est très-homogène, et malgré l'addition considérable des espèces nouvelles décrites plus loin, je n'ai rien à changer à ses caractères, tels qu'ils ont été exposés dans la *Monographie*. J'ajouterai, toutefois, que le caractère distinctif des sexes réside dans le dernier segment abdominal, qui est ponctué sur toute sa surface chez le mâle, tandis qu'il est lisse au milieu chez la femelle.

### 1. — GROUPE AFRICAIN.

I. — *Corps revêtu en dessus de poils ou d'écailles piliformes de deux couleurs au moins, ou téguments maculés.*

A Bords du prothorax non denticulés.
  *a* Prothorax bi ou trisinueux latéralement.
    *α* Prothorax trisinueux. . . . . 6. *L. sinuatus.*
    *αα* Bisinueux.
      * Élytres largement rebordées latéralement . . 3. *L. nodifer.* 4. *L. turbidus.*
      ** Élytres non ou faiblement rebordées.
        × Prothorax quadrituberculeux.
          + Vestiture brillante, multicolore . . . . . 4. *L. eximius.*
          ++ Vestiture grise et brunâtre. . . . . 7. *L. grisescens.*
        ×× Prothorax bituberculeux. . . . . 5. *L. nodicollis.* 2. *L. antiquus.*
  *aa* Prothorax arrondi sur les côtés ou simplement sinueux au devant des angles postérieurs.

α Côtés du métathorax munis de sillons tarsaux.
* Angles postérieurs du prothorax tronqués . . . . . 19. *L. palliditarsus.*
** Angles postérieurs du prothorax aigus.
× Des taches blanchâtres formées par des écailles de cette couleur . . . . . 23. *L. nanus.*
×× Des poils squamiformes blancs disséminés. . . . 24. *L. occidentalis.*
αα Côtés du métathorax sans sillons tarsaux.
* Prothorax inégal en dessus. . . . . 15. *L. tripartitus.*
** Prothorax égal en dessus.
× Prothorax aussi long que large . . . . . 13. *L. irroratus.*
×× Prothorax plus large que long.
+ Téguments non maculés
11. *L. leprosus.* 12. *L. vestitus.* 10. *L. Goudoti.*
+-+ Téguments maculés . . . . . 4. *L. maculosus.*

AA Bords latéraux du prothorax denticulés.
a Des sillons tarsaux sur les flancs du prothorax.
α Téguments obscurs avec de petites taches blanches formées par des écailles agglomérées . . . . . 16. *L. albopictus.*
αα Téguments plus ou moins marbrés, ou présentant de petites écailles de couleur disséminées isolément.
* Prothorax tuberculeux au milieu . . . . . 20. *L. albitactus.*
** Prothorax sans tubercule.
× Angles postérieurs du prothorax très-divergents.
22. *L. minor.* 8. *L. crenatus.*
×× Ces angles non ou peu divergents.
+ Un sillon tarsal profond sur les flancs du métathorax . . . . . 21. *L. asper.*
+-+ Pas de sillon tarsal sur le métathorax . . . . 25. *L. fœdus.*
aa Flancs prothoraciques sans sillons tarsaux . . . 9. *L. porosus.* 17. *L. mysticus.*

## II. — *Téguments non maculés et revêtus en dessus de poils ou d'écailles de couleur uniforme.*

A Un sillon tarsal sur les flancs du prothorax.
a Prothorax crénelé sur les côtés au moins en avant.
α Plusieurs impressions sur le prothorax . . . . . 38. *L. bidivisus.*
αα Prothorax sans impression sur le disque.
* Sillons tarsaux larges, à bords vagues, mal limités.
× Large et ovale, noir . . . . . 33. *L. amplicollis.*
×× Subcylindrique, brunâtre . . . . . 26. *L. muscerda.*
** Sillons tarsaux étroits, profonds, nettement définis.
× Corps trois fois plus long que large. . . . . 36. *L. interpunctatus.*
×× Corps moins de trois fois plus long que large . . 35. *L. porcinus.*
aa Bords latéraux du prothorax non crénelés.
α Un pli transversal sur le disque du prothorax . . . . 34. *L. hottentota.*
αα Pas de pli transversal sur le prothorax.
* Corps allongé, plus ou moins épais.
× Angles postérieurs du prothorax droits . . . . 27. *L. decipiens.*
×× Angles postérieurs du prothorax recourbés en dehors . . . . . 39. *L. Desjardinsi.*
** Corps large, plus ou moins déprimé. . . . . 28. *L. pictiventris.*

AA Pas de sillon tarsal sur les flancs du prothorax.
  *a* Prothorax crénelé latéralement.
    *α* Écusson plat. . . . . 37. *L. scaber.*
    *αα* Écusson bombé . . . . . 40. *L. pœnulatus.*
  *aa* Prothorax non crénelé.
    *α* Corps trois fois plus long que large.
      * Une crête transversale sur le prothorax. . . . . 18. *L. sordidus.*
      ** Pas de crête transversale . . 29. *L. soricinus.* 31. *L. flavipes* 30. *L. latus.*
    *αα* Corps très-court . . . . . 32. *L nigrita.*
Sp. *incertæ sedis* . . . . . 41. *L. parcus.*

## 2. — GROUPE ASIATIQUE.

### I. — *Élytres régulièrement striées-ponctuées.*

#### 1. — Côtés du métathorax munis d'un sillon oblique bien délimité (1), pour recevoir les tarses médians au repos.

A Élytres présentant des poils érigés, outre la vestiture squamiforme.
  *a* Base du prothorax fortement impressionné de chaque côté . 51. *L. lutosus.*
  *aa* Base du prothorax non ou à peine impressionné.
    *α* Pas de sillon médian sur le prothorax. . . . . 52. *L. setiger.*
    *αα* Un sillon médian . . . . . 53. *L. judex.*
AA Pas de poils érigés sur les élytres.
  *a* Prothorax présentant des poils squamiformes de deux sortes : de grands insérés dans les points et de plus petits dans les intervalles.
    *α* Écusson blanc . . . . . 57. *L. leucaspis.*
    *αα* Écusson de la couleur générale.
      * Forme généralement parallèle, la plus grande largeur des élytres tombant vers leur milieu ou au delà.
        × Prothorax brusquement rétréci au sommet, ses côtés un peu sinueux à la base des angles antérieurs.
          + Bords latéraux du prothorax un peu crénelés au sommet . . . . . 46. *L. angulosus.*
          +-+ Non crénelés. . . . . 45. *L. elliensis.*
        ×× Prothorax peu ou curvilinéairement rétréci au sommet.
          + Points sériés des élytres peu rapprochés, les intervalles qui les séparent plus larges qu'eux.
            o Prothorax à côtés parallèles . . . . . 42. *L. parallelicollis.*
            oo Prothorax à côtés courbes . . . . . 47. *L. taciturnus.*
          +-+ Points sériés des élytres très-rapprochés.

(1) **J'insiste sur les mots *bien délimités* parce que quelques espèces, non comprises dans l'embranchement actuel, présentent sur le métathorax une impression plus ou moins vague, tenant lieu du sillon tarsal complet, tel qu'il est entendu ici.**

o Toutes les squamules des élytres très-petites.
c Prothorax un peu plus long que large . . 43. *L. truncatus.*
cc Prothorax aussi large que long. . . . . 44. *L. molestus.*
oo Deux sortes de squamules sur les élytres : de très-petites formant des taches et de plus grandes, allongées, moins serrées.
c Prothorax sans crête transversale. . . . 48. *L. falsarius.*
cc Prothorax avec une crête transversale . . 49. *L. transversus.*
** Forme atténuée en arrière, la plus grande largeur des élytres tombant généralement avant le milieu.
× Angles postérieurs du prothorax aigus . . . . . 58. *L. hædulus.*
×× Angles postérieurs du prothorax tronqués.
+ Une saillie transversale sur le prothorax . . . 50. *L. hispidulus.*
++ Pas de saillie transversale sur le prothorax.
o Vestiture jaunâtre, d'une seule teinte . . . 59. *L. fex.*
oo Vestiture grisâtre ou bicolore.
c grisâtre.
v Prothorax peu rétréci à la base. . . . 54. *L. multiforis.*
vv Proth. assez fortement rétréci à la base . 55. *L. fibrinus.*
cc bicolore. . . . . 56. *L. modestus.*
*aa* Prothorax garni de squamules d'une seule forme.
α Élytres tachetées.
* Bords latéraux du prothorax fortement denticulés.
× Une dépression limitée de chaque côté par une arête sur la partie antérieure du prothorax . . . . . 65. *L. tostus.*
×× Pas de dépression à la partie antérieure du prothorax 66. *L. lupinosus.*
** Bords latéraux du prothorax peu ou point denticulés.
× Noir avec de grandes taches gris-blanc . . . . 61. *L. comptus.*
×× Rouge avec des taches jaunâtres . . . . . 60. *L. consors.*
××× Brunâtres avec des taches rougeâtres.
+ Une forte crête transversale sur le prothorax. 67. *L. tactus.*
++ Pas ou presque pas de saillie transversale sur le prothorax . . . . . 68. *L. inops.*
αα Élytres sans taches.
* Une crête transversale ou des tubercules sur le prothorax.
× Une crête.
+ Prothorax non ou à peine plus large que long . 69. *L. muticus.*
++ Prothorax notablement plus large que long . . 70. *L. afflictus.*
×× Deux tubercules . . . . . 64. *L. flavescens.*
** Prothorax sans crête ni tubercules.
× Angles postérieurs du prothorax tronqués.
+ Prothorax très-bombé . . . . . 62. *L. torrefactus.*
++ Prothorax légèrement convexe . . . . . 63. *L. coctus.*
×× Angles postérieurs du prothorax acuminés.
+ Intervalles des stries des élytres un peu convexes. 71. *L. ovalis.*
++ Intervalles plats. . . . . 72. *L. minusculus.*

2. — Côtés du métathorax dépourvus de sillons tarsaux nettement limités.

A Pas de longue carène partant des angles postérieurs du prothorax et dédoublant son bord latéral.
a Téguments tachetés par la vestiture.
α Élytres portant deux tubercules à la base . . . . . 73. *L. ornatus.*
αα Pas de tubercules à la base des élytres.
* Deux carènes longitudinales sur le disque du prothorax. 74. *L. costicollis.*
** Pas de carènes longitudinales sur le prothorax.
× Prothorax généralement plus large que long.
+ Prothorax peu rétréci à la base.
o Teinte générale grisâtre . . . . . 84. *L. murinus.*
oo Teinte générale brune.
c Une tache de couleur claire au bord latéral des élytres, derrière l'épaule . . . 83. *L. scutellatus.*
cc Pas de taches derrière les épaules.
x Une saillie transversale divisée en deux tubercules sur le prothorax . . . . 85. *L. binodulus.*
xx Un pli transversal sur le prothorax.
y Écusson couvert de squamules blanchâtres, assez longues et serrées . 88. *L. litigiosus.*
yy Écusson semblable aux élytres pour la vestiture.
z Pas de poils criniformes redressés sur les élytres . . . . . 89. *L. insularis.*
zz Des poils criniformes redressés sur les élytres . . . . . 90. *L. erinaceus.*
++ Prothorax fortement rétréci à la base. . . . 86. *L. cordicollis.*
×× Prothorax aussi long que large.
+ Deux très-petits tubercules sur le prothorax.
o Angles postérieurs du prothorax fortement tronqués.
c Ces angles très-courts . . . . . 79. *L. coarctatus.*
cc Ces angles allongés . . . . . 78. *L. bipapulatus.*
oo Ces angles allongés et brièvement tronqués au bout. . . . . 80. *L. formosanus.*
++ Deux saillies obtuses et plus ou moins transversales sur le prothorax.
o Téguments mats ou à peu près . . . . . 77. *L. fuliginosus.*
oo Téguments luisants, sous la vestiture.
c Angles postérieurs du prothorax larges et tronqués.
x Prothorax et élytres assez fortement rétrécis à leur base . . . . . 81. *L. nepalensis.*
xx Prothorax et élytres peu rétrécis à leur base. . . . . 82. *L. birmanicus.*
cc Angles postérieurs du prothorax assez grêles au sommet.
x Prothorax bosselé sur le disque . . . 75. *L. desquamatus.*
xx Prothorax sans bosselures . . . . . 76. *L. mustelinus.*

*aa* Téguments non tachetés par la vestiture.
*α* Une saillie transversale ou deux tubercules sur le disque du prothorax.
* Une saillie transversale.
× Élytres élargies avant le milieu, atténués au delà.
+ Prothorax arqué sur les côtés . . . . . 92. *L. sericans.*
+-+ Prothorax droit sur les côtés . . . . . 87. *L. Schwaneri.*
×× Élytres parallèles jusqu'au milieu . . . . . 91. *L. cœnosus.*
** Deux tubercules . . . . . 93. *L. furunculosus.*
*αα* Pas de saillie transversale ou de tubercules sur le prothorax.
* Prothorax fortement sillonné au milieu.
× Des poils squamiformes fauves sur les téguments . 96. *L. brunnipennis.*
×× Des squamules très-ténues et ordinairement rougeâtres sur les élytres . . . . . 97. *L. cinnamomeus.*
** Prothorax peu ou point sillonné au milieu.
× Prothorax présentant de gros points disséminés entre lesquels on en aperçoit une multitude de plus petits . . . . . 95. *L. ellipticus.*
×× Points du prothorax uniformes.
+ Élytres subcylindriques.
o Téguments tout à fait opaques . . . . . 98. *L. prœtermissus.*
oo Téguments luisants . . . . . 94. *L. consobrinus.*
+-+ Élytres déprimées.
o Vestiture brune.
c Élytres et prothorax rétrécis à leur base, les angles du dernier un peu prolongés. 100. *L. scrofa.*
cc Élytres et prothorax parallèles à leur base, les angles du second courts et non prolongés . . . . . 99. *L. musculus.*
oo Vestiture grise . . . . . 101. *L. depressus.*

AA Une longue carène longeant et dédoublant le bord latéral du prothorax.
*a* Bord latéral du prothorax non crénelé.
*α* Vestiture formant des taches.
* Prothorax plus long que large . . . . . 103. *L. cervinus.*
** Prothorax aussi large que long . . . . . 102. *L. apodixus.*
*αα* Vestiture uniformément disposée.
× Points du prothorax beaucoup plus gros en avant du pli discoïdal qu'en arrière . . . . . 104. *L. macroderus.*
×× Points du prothorax peu différents en avant et en arrière.
+ Un pli transversal sur le prothorax . . . . 105. *L. Wallacei.*
+-+ Pas de pli transversal sur le prothorax . . . 106. *L. glirinus.*
*aa* Bord latéral du prothorax crénelé.
*α* Prothorax notablement plus étroit que les élytres. . . . 107. *L. serricollis.*
*αα* Prothorax peu ou point plus étroit que les élytres, dans son milieu.
* Bords latéraux du prothorax fortement sinueux au devant des angles postérieurs.

× Élytres parallèles . . . . . 108. *L. serrula.*
×× Élytres dilatées au delà du milieu . . . . . 112. *L. spurcus.*
** Prothorax peu ou point sinueux latéralement au-devant des angles postérieurs.
× Téguments noirs.
+ Points sériés des élytres affaiblis vers la suture. 110. *L. crenicollis.*
+-+ Points sériés des élytres gros jusqu'à la suture. 111. *L. sinensis.*
×× Téguments brunâtres.
+ Prothorax fortement rétréci à la base et au sommet . . . . . 113. *L. gracilis.*
+-+ Prothorax médiocrement rétréci à la base . . 109. *L. lapideus.*

## II. — *Élytres ponctuées sans stries régulières* (1), *corps court et large.*

A Quatre sillons tarsaux bien limités.
*a* Rougeâtre, des fascies formées par des poils blanchâtres sur les élytres . . . . . 120. *L. trifasciatus.*
*aa* Noir ou brunâtre, élytres vaguement ou point fasciées.
α Deux petites taches blanches près du sommet des élytres.
* Prothorax aussi ou moins large que les élytres.
× Élytres nullement sillonnées . . . . . 117. *L. tumens.*
×× Élytres subsillonnées . . . . . 118. *L. turgescens.*
** Prothorax plus large que les élytres . . . . . 121. *L. laxus.*
αα Pas de taches blanches près du sommet des élytres.
* Des lignes alternantes de points petits et gros sur les élytres. . . . . 116. *L. adspersus.*
** Points des élytres disséminés sans ordre linéaire.
× Prothorax transversalement gibbeux. . . . . 115. *L. nebulosus.*
×× Prothorax simplement convexe . . . . . 114. *L. obesus.*
AA Pas de sillons tarsaux . . . . . 119. *L. sparsus.*
*Incertæ sedis* . . . . . 122. *L. tristis.* 123. *L. brachychœtus.*

### 3. — GROUPE AUSTRALIEN.

## I. — *Quatre sillons tarsaux bien limités sur les flancs du prothorax et du métathorax.*

A Tous les intervalles des stries égaux.
*a* Prothorax plus large que long.
α Élytres plus de deux fois aussi longues que la largeur du prothorax . . . . . 124. *L. caliginosus.*
αα Élytres moins de deux fois aussi longues que la largeur du prothorax . . . . . 130. *L. laticollis.*
*aa* Prothorax aussi long que large . . . . . 125. *L. labiosus.*
AA Intervalles impairs un peu plus larges . . . . . 131. *L. ursulus.*

(1) Une espèce, l'*adspersus*, fait quelque peu exception sous ce rapport.

## II. — *Pas de sillons tarsaux sur le métathorax.*

A Tous les intervalles des stries égaux en largeur et en hauteur.
*a* Téguments unicolores.
*α* Un sillon tarsal sur les flancs du prothorax.
* Ce sillon à bords nettement arrêtés.
× Brunâtre . . . . . 127. *L. socius.*
×× Rouge ferrugineux. . . . . 126. *L. ferrugineus.*
** Ce sillon à bords vagues et mal définis.
× Suture des élytres élevée; taille très-petite . . . 153. *L. Victoriæ.*
×× Suture des élytres non saillante.
+ Angles postérieurs du prothorax droits . . . 136. *L. humilis.*
++ Angles postérieurs du prothorax aigus, divergents . . . . . 129. *L. assus.*
*αα* Pas de sillons sur les flancs du prothorax.
* Prothorax notablement plus étroit que les élytres. . . . 140. *L. fatuus.*
** Prothorax aussi large que les élytres.
× Bords latéraux du prothorax fortement crénelés. . 135. *L. Deboulayi.*
×× Bords latéraux du prothorax non crénelés.
+ Angles postérieurs du prothorax entiers. . . 132. *L. princeps.*
++ Angles postérieurs du prothorax tronqués . . 128. *L. crassus.*
*aa* Téguments bicolores par eux-mêmes ou par la vestiture.
*α* Par eux-mêmes.
* Prothorax aussi long que large . . . . . 143. *L. pictipennis.*
** Prothorax plus large que long.
× Des poils squamiformes. . . . . 141. *L. variolus.*
×× Des squamules . . . . . 144. *L. porriginosus.*
*αα* Par leur vestiture.
* Téguments un peu luisants . . . . . 145. *L. guttatus.*
** Téguments mats . . . . . 146. *L. marmoratus.*
AA Intervalles des stries inégaux, un ou quelques-uns plus larges, ou plus écailleux, ou plus élevés que les autres.
*a* Prothorax bituberculeux . . . . . 134. *L. mamillatus.*
*aa* Prothorax sans tubercules.
*α* Prothorax fortement rétréci à la base . . . . . 147. *L. octavus.*
*αα* Prothorax non rétréci à la base.
* Élytres deux fois, au moins, plus longues que le prothorax.
× Bords latéraux du prothorax redressés horizontalement en avant. . . . . 139. *L. marginatus.*
×× Bords latéraux du prothorax non redressés en avant.
+ Une carène transversale sur le disque du prothorax.
o Élytres plus de deux fois plus longues que larges . . . . . 133. *L. geminatus.*
oo Élytres moins de deux fois plus longues que larges . . . . . 142. *L. pleureticus.*
++ Pas de carène transversale sur le prothorax.

o Prothorax déprimé, biimpressionné à la base. 138. *L. variabilis.*
oo Prothorax convexe . . . . . 137. *L. parallelus.*
** Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax.
+ Angles postérieurs du prothorax très-allongés, très-divergents. . . . . 152. *L. divaricatus.*
++ Ces angles non divergents.
o Intervalles élevés des stries des élytres se terminant en arrière par des tubercules . . 151. *L. lacrymosus.*
oo Ces intervalles non tuberculeux en arrière.
c Angle huméral des élytres droit.
x Prothorax aussi long ou à peu près que large.
y Stries ponctuées des élytres régulières.
z Prothorax rétréci à la base. . . . 149. *L. carinulatus.*
zz Prothorax non rétréci à la base . . 150. *L sculptus.*
yy Stries externes irrégulières . . . . 148. *L. costipennis.*
xx Prothorax transversal. . . . . 156. *L. punctipennis.*
cc Angle huméral obtus.
x Angles postérieurs du prothorax obliquement tronqués en dehors. . . . 154. *L. insignitus.*
xx Angles postérieurs du prothorax entiers. 155. *L. cordipennis.*

### 4. — GROUPE AMÉRICAIN.

A Noir varié de brun. . . . . 158. *L. mucoreus.*
AA Couleur uniforme.
*a* Flancs prothoraciques présentant un sillon tarsal mal délimité.
α Prothorax rétréci en arrière . . . . . 160. *L. brevis.*
αα Prothorax non rétréci en arrière.
* Bords latéraux du prothorax crénelés.
× Points des stries des élytres au moins aussi larges que les intervalles . . . . . 159. *L. curtus.*
×× Ces points moins larges que les intervalles des stries. 157. *L. rectangularis.*
** Bords latéraux du prothorax non crénelés.
× Ses angles postérieurs saillants en dehors . . . . 163. *L. tuspanensis.*
×× Ces mêmes angles droits, émoussés . . . . . 165. *L. suillus.*
*aa* Pas de sillon tarsal aux flancs prothoraciques.
α Prothorax crénelé sur les côtés . . . . . 164. *L. Lezeleuci.*
αα Prothorax non crénelé.
× Ses angles postérieurs petits, tronqués.
+ Une crête en forme d'Y sur le front . . . . 162. *L. calamitosus.*
++ Pas de crête sur le front . . . . . 161. *L. scarrosus.*
×× Ces mêmes angles non divergents, aigus.
+ Prothorax plus large que long . . . . . 166. *L. Truquii.*
++ Prothorax aussi long que large . . . . . 167. *L. dubius.*

I. — GROUPE AFRICAIN.

1. L. TURBIDUS. — GERM. *Zeitschr.*, t. II, p. 265. — CAND. *Monogr.*, t. I, f. 99, pl. I, fig. 17.

Madagascar.

2. L. ANTIQUUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 100.

Madagascar.

3. L. NODIFER. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 62, pl. III, fig. 2. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 100.

Madagascar.

4. L. EXIMIUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 101.

Madagascar.

5. L. NODICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 101.

Madagascar.

6. L. SINUATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 103.

Madagascar.

7. L. GRISESCENS. — *Fuscus, opacus, pilis subsquamiformibus fuscis griseisque maculatim dense obductus; prothorace longitudine latiore, quadrituberculato, angulis posticis brevibus, divaricatis, obtusis; elytris convexis, punctato-striatis.*

Long. 12 mill., lat. 4 mill.

Brunâtre, opaque, densément revêtu de poils subsquamiformes gris et bruns, ceux-ci plus abondants que ceux-là à la base des élytres et au milieu du prothorax. Antennes rougeâtres. Prothorax plus large que long, un peu sinueux en arrière des angles antérieurs et beaucoup plus fortement en arrière du milieu, très-arqué sur les côtés au niveau du tiers antérieur, convexe, criblé de gros points, portant quatre tubercules sur le disque et deux impressions ponctiformes vers la base, ses angles postérieurs courts, divergents, obtus. Écusson présentant une ligne de poils

blanchâtres. Élytres convexes, subsillonnées plus fortement en dehors que vers la suture, les sillons ponctués.

Madagascar. (Coll. Cand.)

8. L. CRENATUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 66. — CAND. *Monog.*, t. I, p. 103.

Madagascar.

9. L. POROSUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 65. — CAND. *Monog.*, t. I, p. 105.

Madagascar.

10. L. GOUDOTI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 106, pl. I, fig. 1.

Madagascar.

11. L. LEPROSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 107, pl. II, fig. 3.

Madagascar.

12. L. VESTITUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 64. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 107, pl. II, fig. 2.

*Lacon tumidicollis*. — CAND. *loc. cit.*, p. 108.

Madagascar.

Examen fait de nombreux spécimens de cette espèce qui varie assez dans sa taille, dans les proportions du prothorax, etc., je pense que le *L. tumidicollis* n'en est qu'une forme accidentelle et individuelle.

13. L. IRRORATUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 65. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 109.

*Lacon confusus*. — CAND. *loc. cit.*, p. 109.

Celui-ci, comme le précédent, n'est pas très-stable dans sa forme; j'ai donc pris le parti de lui adjoindre le *L. confusus* dont j'avais fait indûment une espèce distincte.

14. L. MACULOSUS. — *Depressus, brunneus, subnitidus, ferrugineo-marmoratus, squamulis minutissimis fulvis irroratus; pro-*

*thorace longitudine latiore, lateribus arcuato, crebre fortiterque punctato, angulis posticis brevibus, subdivaricatis; elytris striis fortiter punctatis.*

Long. 10 mill., lat. 5 mill.

Plus déprimé que les précédents, brun et ferrugineux, ces deux teintes formant des marbrures, surtout sur les élytres, revêtu de très-petites écailles ferrugineux-clair, le prothorax marqué de deux points constitués par leur agglomération. Front légèrement convexe, ponctué. Prothorax un peu plus large que long, médiocrement bombé, égal en dessus, très-ponctué, ses bords latéraux arqués et tranchants, ses angles postérieurs courts, légèrement recourbés en dehors, obtus au sommet. Élytres faiblement élargies au delà du milieu, assez déprimées, striées, les stries marquées de très-gros points rapprochés. Pas de sillons tarsaux.

Madagascar. (Coll. Jans.)

15. L. TRIPARTITUS. — *Depressus, brunneus, parum nitidus, squamulis ferrugineis cinereisque obductus; prothorace longitudini latitudine æquali, disco arcuatim carinato, angulis posticis divaricatis, obtusis, carinatis; elytris striato fortiter punctatis.*

Long. 11 mill., lat. 5 $^1/_4$ mill.

Assez déprimé, brunâtre, presque mat, revêtu de petites écailles les unes ferrugineux-gris, les autres plus petites, d'un gris clair, plus serrées que les premières et formant par conséquent de petites taches vagues. Front convexe en avant. Prothorax aussi large que long, arqué sur les côtés, sinué en arrière, peu convexe, présentant une petite crête transversale médiane qui, avec les carènes des angles postérieurs, forme une élevure arquée divisant sa surface en trois plans assez bien indiqués, les angles postérieurs divergents, obtus au bout, carénés extérieurement. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles en avant, peu convexes, striées, les stries assez fortement ponctuées. Des sillons tarsaux vaguement définis sur les flancs du prothorax.

Madagascar. (Coll. Jans.)

16. L. ALBOPICTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 104.

Madagascar.

17. L. MYSTICUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 104.

Madagascar.

18. L. SORDIDUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 114.

Sénégal.

19. L. PALLIDITARSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 120.

Cap de Bonne-Espérance.

20. L. ALBITACTUS. — *Fuscus, subopacus, squamulosus; prothorace longitudine paulo latiore, disco transversim bicristato, lateribus angulato crenulatoque; scutello albido-squamoso; elytris convexis, striato grosse punctatis; sulcis tarsorum male definitis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, à peu près opaque, recouvert d'assez grandes squamules brunes et grises ou fauves, formant des taches vagues. Front impressionné. Prothorax un peu plus large que long, brusquement rétréci au sommet avec ses côtés anguleux, convexe, portant au milieu du disque une crête transversale divisée en deux, ses angles antérieurs assez avancés, ses bords latéraux crénelés, les angles postérieurs courts, subtronqués au bout. Écusson portant quelques écailles blanchâtres, lesquelles se continuent un peu sur le prothorax, de façon à figurer un petit trait longitudinal de cette couleur. Élytres parallèles jusqu'au milieu, atténuées au sommet, convexes, marquées de lignes de gros points. Flancs du prothorax offrant une impression oblongue tenant lieu du sillon tarsal.

Vieux-Calabar. (Coll. Murray, Janson.)

21. L. ASPER. — *Fuscus, opacus, squamulis fuscis griseisque obductus; prothorace longitudine latiore, disco æquali, convexo, cribrato, lateribus arcuato et crenulato; elytris brevibus, medio*

*paulo dilatatis, striato fortiter punctatis; sulcis tarsorum quatuor bene definitis.*

Long. 7 $^1/_2$ mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, très-opaque, revêtu d'écailles rudes, brunes et grisâtres, formant des maculatures peu apparentes. Front plat, plus ou moins impressionné. Prothorax plus large que long, régulièrement arqué sur les côtés, égal et convexe en dessus, fortement ponctué, ses angles antérieurs saillants, ses bords latéraux dentelés, ses angles postérieurs courts, presque droits, subtronqués au bout. Élytres de la largeur, aux épaules, de la base du prothorax, un peu élargies au milieu, largement arrondies en arrière, régulièrement convexes en dessus, marquées de stries peu profondes fortement ponctuées. Flancs du prothorax et du métathorax marqués de sillons tarsaux nettement définis.

Guinée; bouches du Niger. (Coll. Jans.)

22. L. MINOR. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 126.

Madagascar.

23. L. NANUS. — BOHEM. *Ins. Caffr.* t. I, II, p. 420. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 131.

Cafrerie.

Une jolie variété du pays des Zulus, dont j'ai vu de nombreux exemplaires dans la collection de M. Janson, se distingue par ses élytres rougeâtres, à l'exception d'une bande transversale médiane, qui reste noire.

Les sillons métathoraciques, toujours mal définis chez cette espèce, disparaissent parfois presque entièrement.

24. L. OCCIDENTALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 130.

Sénégal.

Cette espèce, suivant M. Gerstaecker (*Monatsb. d. Berl. Acad.*, 1866, p. 54), se trouverait également à Zanzibar. J'en ai vu, en outre, un individu provenant des chasses de M. Beccari, dans le pays des Bogos, en Abyssinie.

25. L. FOEDUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 123.

Sénégal; Guinée supérieure; Abyssinie.

Un exemplaire de cette dernière provenance, pris par M. Beccari dans le pays des Bogos et que m'a communiqué M. le docteur Gestro, est notablement plus étroit que ceux du Sénégal. A cela près il leur ressemble entièrement.

26. L. MUSCERDA. — *Oblongus, subcylindricus, fusco-niger, opacus, squamulis fuscis adspersus; prothorace latitudini longitudine æquali, postice recto parallelo, convexo, creberrime punctato; elytris brevibus, seriatim scabrose punctatis; sulcis tarsorum anticorum male definitis.*

Long. 6-7 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Épais, oblong, subcylindrique, noirâtre, opaque, revêtu de petites écailles brunâtres. Front un peu bombé, très-ponctué. Prothorax aussi long que large, droit et parallèle sur les côtés en arrière, curvilinéairement rétréci au sommet, très-bombé et égal en dessus, fortement et très-densément ponctué, ses bords latéraux crénelés, ses angles postérieurs courts, droits, nullement aplatis. Écusson plus large que long, très-incliné, ponctué. Élytres exactement de la largeur du prothorax, parallèles en avant, courtes, curvilinéairement rétrécies en arrière, ponctuées en stries et scabres. Flancs du prothorax présentant un sillon oblique mal limité pour recevoir les tarses antérieurs au repos.

Cap de Bonne-Espérance. (Coll. Cand.)

27. L. DECIPIENS. — BOHEM. *Ins. Caffr.*, t. I, II, p. 417. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 127.

Cafrerie.

28. L. PICTIVENTRIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 127.

Madagascar.

29. L. SORICINUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 133, pl. II, fig. 11.

Madagascar.

30. L. LATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 136.

Madagascar.

31. L. FLAVIPES. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 137, pl. II, fig. 14.

*Lacon Maillardi.* — DEYR. *Maill. Réunion*, t. II, p. 4, pl. XX, fig. 2.

Madagascar et île de la Réunion.

32. L. NIGRITA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 132, pl. II, fig. 7.

Cap de Bonne-Espérance.

33. L. AMPLICOLLIS. — BOHEM. *Ins. Caffr.*, t. I, II, p. 414. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 142, pl. II, fig. 9.

Cafrerie et cap de Bonne-Espérance.

34. L. HOTTENTOTA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 138.

Cap de Bonne-Espérance.

35. L. PORCINUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 142.

Madagascar.

36. L. INTERPUNCTATUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, t. I, p. 66. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 154.

Madagascar.

37. L. SCABER. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 153.

Madagascar.

38. L. BIDIVISUS. — *Ovalis, brunneus, opacus, brunneo parcius squamulosus; prothorace longitudine haud latiore, parum convexo, creberrime fortiterque punctato, inæquali, lateribus crenulato; elytris brevissimis, seriatim punctatis, scabris, basi emarginatis, sulcis tarsorum profundis bene definitis.*

Long. 7 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Vieux Calabar. (Coll. Murray.)

39. L. DESJARDINSI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 143.

Ile de France.

40. L. PÆNULATUS. — Bohem. *Ins. Caffr.*, t. I, II, p. 415. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 152.

Cafrerie.

41. L. PARCUS. — Bohem. *Ins. Caffr.*, t. I, II, p. 416.

(*L. charcus.*) — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 161.

II. — GROUPE ASIATIQUE.

42. L. PARALLELICOLLIS. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 118.

Java.

43. L. TRUNCATUS. — Herbst. *Käf.*, t. X, p. 95, pl. CLXVI, fig. 12.

*Lacon cylindricus.* — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 121.

Hindoustan septentrional.

44. L. MODESTUS. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 120.

Hindoustan.

45. L. ELLIENSIS. — *Elongatus, fusco-brunneus, ferrugineo-maculatus, pilis cinereo-cervinis brunneisque vestitus; fronte plana; prothorace latitudini longitudine æquali, parum convexo, angulis prominentibus, posticis elongatis, valve divaricatis; elytris medio subdilatatis, apice conjunctim rotundatis.*

Long. 13 mill., lat. 3 $^{2}/_{3}$ mill.

*Lacon elliensis.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 10.

Allongé, subparallèle, noirâtre maculé de rougeâtre, revêtu de poils d'un cendré jaunâtre avec des plaques de poils bruns sur les élytres. Front presque plat. Prothorax aussi long que large, de forme à peu près carrée avec ses angles saillants, les antérieurs fortement déprimés, les postérieurs allongés, aplatis, très-divergents, arrondis ou tronqués au bout, le disque très-peu convexe, couvert de gros points. Élytres un peu plus larges que le prothorax, sensiblement élargies vers le milieu, conjointement arrondies au bout, fortement et densément ponctuées, peu distinctement

striées-ponctuées. Dessous rougeâtre ainsi que les pattes; les flancs prothoraciques présentant des traces de sillons obliques; ces sillons nettement marqués sur le métathorax.

Ceylan; Rambodde.

Il diffère des espèces voisines par ses élytres peu distinctement et même parfois indistinctement striées-ponctuées.

46. L. ANGULOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 117, pl. II, fig. 17.

Indes orientales.

47. L. TACITURNUS. — *Fusco-niger, opacus, squamulis minutis fuscis dense obductus, maculis cinereis irroratus; prothorace latitudine haud longiore, æqualiter convexo, grosse punctato, angulis posticis divaricatis, apice truncato-rotundatis; elytris ultra medium subparallelis, seriatim punctatis.*

Long. 12-15 mill., lat. 3-4 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, opaque, revêtu de petites squamules serrées de même couleur, maculé de gris clair. Front un peu concave. Prothorax aussi large que long, régulièrement convexe, fortement ponctué, curvilinéairement rétréci au sommet, ses côtés courbes en avant, sinueux en arrière, ses angles antérieurs avancés, les postérieurs divergents, tronqués ou arrondis au bout. Élytres de la largeur du prothorax à la base, parallèles ou même un peu élargies au delà de leur milieu, marquées de stries de points assez petits. Dessous grisâtre, les sillons tarsaux bien marqués sur les flancs du prothorax et du métathorax.

Laos.

Cette espèce se distingue par sa teinte brun de suie très-terne et ses maculatures gris-blanchâtre. (Coll. Jans. et Cand.)

48. L. FALSARIUS. — *Fuscus, minus opacus, squamulis piliformibus pallide brunneis cinereisque maculatim vestitus; prothorace latitudine haud longiore, convexo, fortiter punctato, angulis*

*quatuor prominulis, obtusis; elytris ultra medium paulo latioribus, seriatim punctatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Moins opaque que le précédent, brunâtre, revêtu de squamules allongées, moins serrées, plus grandes, brun-clair avec des taches gris-cendré disséminées çà et là. Prothorax aussi large que long, médiocrement convexe, marqué de très-gros points, ses bords latéraux un peu courbes, ses angles larges et très-saillants, les antérieurs arrondis en dehors, les postérieurs divergents et largement tronqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax, sensiblement élargies au delà du milieu, marquées de lignes de points assez serrés. Quatre sillons tarsaux bien marqués.

Ceylan. (Coll. Jans.)

49. L. TRANSVERSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 125.

Birmanie; Rangoon.

50. L. HISPIDULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 126.

Commun à Java, Malacca, etc.

51. L. LUTOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 119.

Népaul.

Cette espèce est très-reconnaissable à ses poils redressés, caractère qu'elle partage avec les deux suivantes qui s'en distinguent, du reste, par quelques détails, notamment par la taille.

52. L. SETIGER. — *Elongatus, brunneus, subnitidus, pilis squamiformibus cervinis obductus, pilis obscuris, erectis, sparsim irroratus; prothorace latitudine paulo longiore, convexo, cribrato, spatiis denudatis maculato; elytris ante medium paulo dilatatis, postice attenuatis, seriatim punctatis; sulcis quatuor distinctis.*

Long. 19 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

*Lacon setiger.* — BATES. *Proc. Zool. Soc.*, 1866, t. II, p. 548.

Formose.

53. L. JUDEX. — *Elongatus, brunneus, subnitidus, pilis squamiformibus cervinis maculatim obductus, pilis obscuris erectis sparsim irroratus; prothorace latitudine paulo longiore, basi apiceque angustato, parum convexo, cribrato, medio sulcato, angulis posticis divaricatis, truncatis; elytris ante medium dilatatis, striato remotius punctatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 17 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Voisin du précédent. Brun, revêtu de poils squamiformes gris-jaunâtre formant des maculatures, avec des espaces dénudés et des poils noirs érigés, disséminés. Prothorax un peu plus long que large, rétréci en avant et en arrière avec ses côtés formant un peu le coude en avant du milieu, médiocrement convexe, criblé de très-gros points, sillonné longitudinalement sur la ligne médiane, ses angles antérieurs larges et avancés, les postérieurs larges également, très-divergents, tronqués. Élytres plus larges que le prothorax, élargies en avant du milieu, atténuées en arrière, marquées de lignes de points peu serrés. Sillons tarsaux bien marqués.

Shang-Haï. (Coll. Jans.)

54. L. MULTIFORIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 117, pl. II, fig. 15.

Syhlet.

55. L. FIBRINUS. — *Elongatus, fuscus, submaculatim cinereo-cervino-tomentosus; prothorace latitudine paulo longiore, basi apiceque angustato, inæqualiter cribrato, angulis posticis divaricatis, apice truncatis; elytris ante medium dilatatis, postice attenuatis, striato-punctatis; sulcis tarsorum quatuor distinctis.*

Long. 20 mill., lat. 6 mill.

*Lacon fibrinus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 9.

Voisin du *multiforis*, mais plus rétréci vers la base du prothorax et des élytres, atténué en arrière. Brunâtre, revêtu de squamules d'un cendré jaunâtre formant des taches irrégulières, celles du prothorax doubles, les unes petites, serrées, couchées, d'autres plus grandes, à demi redressées, plus obscures,

naissant des points; les premières moins serrées sur un espace en forme de V (qui paraît ainsi plus obscur), dont l'angle s'appuie au milieu du bord postérieur et les branches vont en divergeant vers les angles antérieurs. Front excavé. Prothorax un peu plus long que large, dilaté en avant du milieu, rétréci au sommet et au niveau du quart postérieur, médiocrement convexe, subsillonné au milieu en arrière, inégalement ponctué, les points très-gros et visibles à l'œil nu ; ses angles antérieurs larges, avancés, arrondis au bout, les postérieurs grands, aplatis, divergents, tronqués au sommet. Élytres un peu plus larges que le prothorax, élargies jusqu'un peu au delà des deux cinquièmes antérieurs, fortement atténuées vers le sommet, légèrement striées ponctuées. Dessous du corps densément écailleux. Des sillons tarsaux aux flancs du prothorax et du métathorax.

Sumatra; Java. (Coll. Jans. et Cand.)

56. L. MODESTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 118.

Répandu dans toute l'Inde et ses archipels. Il varie un peu sous le rapport de la convexité du prothorax, la teinte plus ou moins grisâtre ou jaunâtre des squamules qui le revêtent, mais on ne peut établir de limite bien tranchée entre ces divers états.

57. L. LEUCASPIS. — *Brunneus, opacus, pilis squamiformibus densis brunneis albicantibusque obductus; prothorace latitudine haud longiore, basi apiceque angustato, medio elevato, cribrato, angulis apice rotundatis; scutello albo; elytris ante medium dilatatis, postice attenuatis, convexis, seriatim remotius punctatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 14 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Brun, revêtu densément de poils squamiformes bruns et blanchâtres, ces derniers couvrant l'écusson et le point correspondant du prothorax, plus abondants que les premiers sur les côtés du prothorax et la moitié postérieure des élytres. Front concave. Prothorax aussi long que large, bombé au milieu avec une saillie tranversale au milieu du disque, marqué de très-gros points,

rétréci à la base et au sommet, ses angles antérieurs avancés, très-larges, arrondis au bout, les postérieurs divergents et tronqués. Élytres assez courtes, dilatées un peu en avant du milieu, rétrécies en arrière par une ligne peu courbe, convexes, striées-ponctuées. Sillons tarsaux bien marqués sur les flancs du prothorax et du métathorax.

Malacca.

Espèce très-distincte de toutes les autres; reconnaissable à son écusson blanc. Elle a été trouvée par M. de Castelnau. (Coll. Jans. et Cand.)

58. L. HÆDULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 122, pl. II, fig. 10.

Hindoustan septentrional.

59. L. FEX. — *Fuscus, pilis squamiformibus cervinis dense obductus; prothorace latitudine paulo breviore, medio transversim convexo, cribrato, angulis posticis brevibus, rotundatis; elytris ante medium paulo dilatatis, convexis, seriatim punctatis, postice attenuatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 9 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Brun, très-densément revêtu de poils squamiformes jaunâtres cachant complétement la couleur des téguments. Prothorax un peu moins long que large, rétréci en avant à partir du milieu, transversalement convexe avec sa base déprimée, marqué de gros points, ses angles courts, les antérieurs serrés contre la tête, les postérieurs obtus au sommet. Élytres de la largeur du prothorax, un peu dilatées avant le milieu, atténuées en arrière, convexes, marquées de séries de points peu visibles à cause des poils. Quatre sillons tarsaux bien marqués en dessous.

Malacca. (Coll. Jans.)

60. L. CONSORS. — *Rufus, opacus, squamulis concoloribus, aliquibus pallidis; prothorace longitudine paulo latiore, antice arcuatim angustato, convexo, cribrato, angulis posticis brevibus rotun-*

*dato-truncatis; elytris striato-punctatis, in interstitiis squamulis biseriatim dispositis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^{5}/_{4}$ mill.

Rougeâtre, opaque, revêtu de squamules toutes de mêmes forme et grandeur, de la couleur générale, avec quelques-unes blanchâtres formant des mouchetures. Prothorax un peu plus large que long, arrondi sur les côtés en avant, légèrement sinueux en arrière, convexe, criblé de gros points, ses angles antérieurs acuminés, les postérieurs courts, un peu divergents, arrondis et subtronqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, curvilinéairement rétrécies au sommet, striées-ponctuées, les intervalles offrant deux séries de squamules. Dessous présentant quatre sillons tarsaux nettement délimités.

Madras. (Coll. Jans.)

61. L. COMPTUS. — *Fusco-niger, opacus, squamulis majoribus, æqualibus, fuscis cinereisque maculatim dense obductus; prothorace latitudini longitudine æquali, convexo, grosse punctato, angulis brevibus, posticis truncatis; elytris brevibus, convexis, striato-punctatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 10-11 mill., lat. 3-3 $^{1}/_{2}$ mill.

Noirâtre, mat, densément recouvert d'écailles assez grandes et égales entre elles, brunes et blanchâtres, ces dernières en larges taches affectant une disposition vaguement longitudinale sur le prothorax, et transversale sur les élytres. Front concave. Prothorax aussi long que large, légèrement arqué sur les côtés, convexe, criblé de gros points, ses angles arrondis ou tronqués, médiocrement saillants. Élytres assez courtes, parallèles jusqu'au milieu et curvilinéairement rétrécies au delà, convexes, striées-ponctuées. Quatre sillons tarsaux bien délimités.

Siam; Cambodge.

Trouvés par Mouhot et M. de Castelnau. (Coll. Jans., Saund., Cand.)

62. L. TORREFACTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 128.

Birmanie : Rangoun.

63. L. COCTUS. — *Fusco-brunneus, pilis squamiformibus brunneis brevibus sparsis, elytris squamulis albidis raris; prothorace longitudine paulo latiore, basi apiceque angustato, æqualiter convexo, punctato, angulis posticis brevibus, paulo divaricatis; elytris basi parallelis, striato-punctatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 10 mill., lat. 2 3/4 mill.

Brunâtre, peu luisant, revêtu de squamules brunes peu denses et peu visibles à l'œil nu; les élytres présentant souvent, surtout vers l'extrémité, quelques agglomérations de très-petites squamules blanchâtres. Antennes rougeâtres. Prothorax à peu près aussi long que large, légèrement rétréci à la base et au sommet avec ses côtés arqués, légèrement et régulièrement convexe, fortement ponctué, ses angles peu saillants, les postérieurs recourbés en dehors, tronqués au bout. Élytres parallèles dans leur moitié antérieure, curvilinéairement rétrécies à l'extrémité, striées-ponctuées, les points des stries assez gros et rapprochés. Des sillons tarsaux sur les flancs du prothorax et du métathorax.

Birmanie : Rangoun.

Cette espèce a de très-grands rapports avec le *torrefactus*, mais elle est constamment beaucoup plus petite. (Coll. Jans.)

64. L. FLAVESCENS. — *Brunneus, squamulis flavis dense tectus; prothorace longitudine paulo latiore antrorsum dilatato lateribusque valde arcuato et postice sinuato, disco bituberculato; elytris brevibus, convexis, postice attenuatis, subtiliter striato-punctatis; sulcis tarsorum quatuor bene definitis.*

Long. 11 mill., lat. 3 3/4 mill.

Brun, densément recouvert de squamules flavescentes, celles du prothorax plus larges que celles des élytres. Prothorax plus large que long, élargi en avant, ses bords latéraux tranchants très-arqués en avant, sinueux en arrière, le disque bituberculé et fortement ponctué, ses angles antérieurs un peu saillants et acuminés, les postérieurs très-divergents et tronqués au bout. Élytres courtes, légèrement élargies vers le tiers antérieur, atténuées vers le sommet, convexes, marquées de séries de petits

points espacés. Dessous revêtu de squamules de même couleur que le dessus; les sillons tarsaux bien marqués.

Ceylan. (Coll. Jans.)

65. L. TOSTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 129.

Malacca; Cambodge; Bornéo.

66. L. LUPINOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 130.

Birmanie; Siam; Cambodge.

67. L. TACTUS. — *Brunneo-fuscus, nitidulus, rufo maculatus, pilis squamiformibus brunneis pallidisque sparsim tectus; prothorace longitudine latiore, lateribus haud crenato, disco transverse elevato, fortiter punctato; elytris brevibus, apice attenuatis, punctato-striatis; sulcis tarsorum distinctis.*

Long. 7 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Cette espèce ressemble tout à fait au *lupinosus* pour la taille, la forme générale, la couleur, les taches, etc., mais il en diffère par l'absence complète de crénelures sur les bords latéraux du prothorax.

Siam. (Coll. Jans.)

68. L. INOPS. — *Fusco-brunneus, squamulis acuminatis ferrugineis tectus; prothorace longitudine vix latiore, parum convexo, crebre punctato, lateribus arcuatis, vix crenulatis, angulis posticis brevibus; elytris striato-punctatis, interstitiis punctatis, ferrugineo-maculatis; sulcis tarsorum quatuor.*

Long. 5-7 mill., lat. 2-3 mill.

Déprimé, d'un brun terne avec quelques mouchetures ferrugineuses sur les élytres, et de petites squamules acuminées, de même couleur. Prothorax aussi long que large ou à peu près, peu convexe, très-ponctué, arqué sur les côtés, ses bords latéraux offrant quelques crénelures vagues, ses angles postérieurs courts, presque droits. Élytres de la largeur du prothorax, paral-

lèles dans leur moitié antérieure, striées-ponctuées, les intervalles marqués de points presque aussi gros que ceux des stries. Quatre sillons tarsaux.

Malacca; Siam; Bornéo.

Cette espèce, abstraction faite des taches, peu marquées du reste, des élytres, ressemble à l'une ou à l'autre des espèces australiennes. (Coll. Jans., Cand., de Leyde.)

69. L. MUTICUS. — HERBST, *Käf.*, t. X, p. 93, pl. CLXVI, fig. 10. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 154.

Indes orientales.

70. L. AFFLICTUS. — *Fusco-niger, squamulis acuminatis concoloribus tectus, aliquibus pallidis; prothorace longitudine latiore, crebre fortiterque punctato, lateribus antice arcuato, vix crenulato, angulis posticis rectis; elytris brevibus, medio paulo dilatatis, striato-punctatis, interstitiis biseriatim punctatis et squamulosis; sulcis quatuor distinctis.*

Long. 7-8 mill., lat. 2 $^1/_2$-3 mill.

Mêmes caractères généraux que le *muticus*, mais généralement plus grand, plus noir, plus large, plus ovale, le prothorax manifestement plus large que long, le pli transversal du disque moins marqué, quelques squamules blanchâtres disséminées parmi les autres, etc.

Malacca; Siam. (Coll. Jans., Cand.)

71. L. OVALIS. — GERM. *Ins. sp. nov.*, p. 49. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 132.

Perse.

72. L. MINUSCULUS. — *Brunneus, subnitidus, pilis squamiformibus pallidis, nonnulis longioribus, irroratus; prothorace longitudine latiore, antice dilatato, parum convexo, punctato, angulis posticis apice acuminatis, medio tumidis; elytris striato-punctatis, interstitiis punctis æqualibus seriatis notatis; sulcis quatuor tarsorum maximis.*

Long. 3 $^1/_2$ mill., lat. 1 mill.

Petit, brun, un peu luisant, revêtu de très-petits poils squamiformes cendrés parmi lesquels on en remarque de plus longs, disséminés, surtout sur les élytres. Front un peu bombé. Prothorax plus large que long, un peu élargi en avant, ses côtés arqués, peu convexe, ponctué, ses angles postérieurs droits, aigus au bout, portant dans leur milieu une petite saillie tuberculiforme. Écusson plat. Élytres de la largeur de la base du prothorax, un peu élargie au delà du milieu, striées-ponctuées, les intervalles marqués d'une série de points semblables, en sorte que l'on compte en réalité dix-huit stries de points égaux. Quatre sillons tarsaux très-grands.

Bombay. (Coll. Jans.)

73. L. ORNATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 102, pl. I, fig. 15.

Java.

74. L. COSTICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 116.

Hindoustan septentrional.

75. L. DESQUAMATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 124.

Hindoustan septentrional.

76. L. MUSTELINUS. — GERM. *Zeitschr.*, t. II, p. 264. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 111.

Siam.

77. L. FULIGINOSUS. — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 3. — Id., *Mém. Soc. sc. Liége*, 2me série, t. V, p. 3.

Japon.

78. L. BIPAPULATUS. — *Fusco-niger, pilis subsquamiformibus obscure et pallide cinereo-cervinis dense obductus; fronte concava; prothorace latitudine paulo longiore, apice parum angustato, medio leviter dilatato, parum convexo, medium versus bituberculato, angulis posticis divaricatis, carinatis, apice truncatis; elytris striis subtilissimis remote punctatis.*

Long. 16 mill., lat. 4 3/4 mill.

*Lacon bipapulatus*, CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 11.

Noirâtre, densément recouvert de poils subsquamiformes, cendré jaunâtre obscur, parmi lesquels d'autres d'une teinte plus claire, plus fins et plus serrés forment des taches diffuses. Front très-concave. Prothorax plus long que large, rétréci au sommet à partir du milieu, arqué légèrement sur les côtés, peu convexe, densément ponctué, ses angles antérieurs saillants en avant, arrondis au bout, ses bords latéraux tranchants, non crénelés, présentant sur le disque, un peu en avant du milieu, deux petites crêtes lisses, transversales, rapprochées, les angles postérieurs larges, divergents, carénés extérieurement, tronqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax à la base, élargies au milieu, arquées sur les côtés, atténuées au sommet, convexes, très-finement striées, les stries marquées de points espacés, les intervalles plats. Dessous sans sillons obliques pour loger les tarses antérieurs ou moyens. Pattes brunes.

Chine. (Coll. Jans.)

79. L. COARCTATUS. — *Fuscus, dense pilosus; prothorace latitudine sublongiore, basi apiceque angustato, convexo, inæqualiter punctato, disco breviter bicristato, postice canaliculato, angulis posticis brevibus, truncatis; elytris ultra medium sensim ampliatis, striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 14 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, revêtu d'une pubescence couchée, subsoyeuse, d'un grisâtre obscur maculé de grisâtre pâle, assez dense pour masquer complétement la teinte des téguments. Prothorax un peu plus long que large, presque aussi fortement rétréci en arrière qu'en avant, les côtés arqués, assez convexe, marqué assez densément de points d'inégale grosseur, offrant sur le disque, un peu en arrière du milieu, deux petites crêtes obliques, affectant la forme d'un V très-ouvert et renversé, canaliculé entre les crêtes et la base, ses angles postérieurs courts, assez larges, un peu divergents et fortement tronqués. Élytres deux fois plus longues que le prothorax, s'élargissant depuis la base jusqu'au tiers postérieur, subacuminées au bout, marquées de fines séries de

points, entre lesquelles on aperçoit, aux endroits dénudés, un pointillé médiocrement serré. Pas de sillons tarsaux.

Himalaya. (Coll. Jans.)

80. L. FORMOSANUS. — *Brunneus, pilis subsquamiformibus cervinis maculatim vestitus; prothorace latitudini longitudine æquali, apice subito angustato, parum convexo, crebre fortiter et inæqualiter punctato, angulis anticis latis prominulis, apice rotundatis, posticis divaricatis, breviter truncatis; elytris postice curvilineatim attenuatis, subdepressis, striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 17 mill., lat. 5 mill.

*Lacon formosanus.* — BATES, *Proceed. zool. Soc.*, 1866, t. II, p. 348.

Formose.

81. L. BIRMANICUS. — *Brunneus, nitidus, pilis squamiformibus griseo-flavis albicantibusque dense tectus; prothorace latitudini longitudine æquali, parum convexo, grosse punctato, disco transversim elevato, angulis latis parum prominentibus; elytris subtiliter striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 15-15 mill., lat. 5 mill.

Brunâtre assez luisant sous la vestiture, ce qui se voit aux endroits où elle est enlevée, cette vestiture formée de poils squamiformes gris jaunâtres, blanchâtres, bruns entremêlés, assez denses. Prothorax aussi long que large, médiocrement convexe, ses côtés tranchants et arqués, le disque portant en arrière du milieu une saillie transversale, sa ponctuation très-grosse, ses angles médiocrement prolongés, les antérieurs cunéiformes, les postérieurs, à peine divergents, aplatis, brièvement tronqués. Écusson assez large. Élytres de la largeur du prothorax à la base, peu élargies au delà, finement striées-ponctuées. Dessous dépourvu de sillons tarsaux.

Birmanie : Rangoun. (Coll. Jans.)

82. L. NEPALENSIS. — *Brunneus, subnitidus, pilis squamiformibus cervinis pallidisque dense vestitus; prothorace latitudini longitudine subæquali, parum convexo, medio transversim elevato, grosse punctato, angulis latis; scutello pallidiori; elytris ultra basin dilatatis, convexis, tenuiter striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 15 mill., lat. 4 $^{5}/_{4}$ mill.

Forme du *leucostigma*. Brun, un peu luisant sous la vestiture, celle-ci formée de poils squamiformes brun jaunâtre plus ou moins clair et grisâtres, très-denses. Prothorax à peu près aussi long que large, médiocrement convexe, fortement ponctué, transversalement élevé un peu en arrière du milieu, rétréci au sommet et à la base avec ses côtés tranchants et arqués, ses angles antérieurs larges, saillants, cunéiformes, arrondis au bout, les postérieurs peu allongés, divergents, tronqués au bout. Écusson assez large, revêtu de poils de teinte plus claire, de même que la partie correspondante du prothorax, ce qui forme en ce point une petite tache oblongue, blanchâtre. Élytres assez fortement dilatées au niveau du tiers antérieur, atténuées en arrière, convexes, finement striées-ponctuées. Dessous dépourvu de sillons tarsaux.

Népaul. (Coll. Jans.)

83. L. SCUTELLATUS. — CAND. *Monogr.* t. I, p. 111.

Archipel malais.

84. L. MURINUS. — LINNÉ, *System. Natur.*, t. II, p. 655. — CAND. *Monogr.*, t I, p. 114.

Europe.

85. L. BINODULUS. — MOTSCH. *Étud. entom.*, 1860, p. 8. — CAND. *Mém. Soc. sc. Liége*, 2$^{e}$ sér., t. V, p. 2.

Japon.

86. L. CORDICOLLIS. — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 9. — Id., *Mém. Soc. sc. Liége*, 2$^{e}$ sér., t. V, p. 3.

Japon.

87. L. Schwaneri. — *Brunneus, pilis squamiformibus flavo-griseis dense vestitus; prothorace latitudini longitudine æquali, subquadrato, apice tantum subito angustato, disco transversim carinato, lateribus crenato, angulis anticis prominulis, posticis rectis,t runcatis; elytris medio paulo ampliatis, convexis, striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

Brun, opaque, densément revêtu de squamules allongées dirigées dans tous les sens sur le prothorax, d'un flave grisâtre pâle. Prothorax de forme carrée, sauf un rétrécissement au sommet, peu convexe, ponctué, portant une courte carène transversale au milieu du disque, ses angles antérieurs avancés, ses bords latéraux grossièrement crénelés, ses angles postérieurs droits et tronqués. Élytres de la largeur du prothorax à la base, un peu dilatées au milieu, arquées régulièrement sur les côtés, convexes, ponctuées-striées. Pas de sillons tarsaux.

Bornéo.

Un exemplaire, au Musée de Leyde, découvert par Schwaner, et un second dans la collection de M. von Bruck.

88. L. litigiosus. — *Brevis, brunneus, pilis squamiformibus brunneis squalidisque vestitus; prothorace longitudine latiore, lateribus postice recto parallelo, disco transversim plicato, angulis posticis rectis, truncatis; elytris brevibus, postice attenuatis, striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Assez court, brun, revêtu de poils squamiformes bruns et d'un gris blanchâtre sale. Prothorax plus large que long, curvilinéairement rétréci en avant, droit et parallèle en arrière, médiocrement convexe, fortement ponctué, présentant un fort pli transversal au milieu, ses angles antérieurs un peu avancés, arrondis au bout, les postérieurs droits, tronqués au sommet. Écusson garni de poils squamiformes blanchâtres plus longs et plus denses.

Élytres courtes, convexes, élargies avant le milieu, atténuées en arrière, striées-ponctuées. Dessous dépourvu de sillons tarsaux.

Malacca. (Coll. Jans.)

89. L. INSULARIS. — *Brevis, brunneus, maculis rufescentibus, pilis squamiformibus brunneis cinereisque vestitus; prothorace longitudine latiore, lateribus postice recto parallelo, transversim plicato, angulis obtusis; elytris brevibus prothorace plerumque angustioribus, striato-punctatis; sulcis tarsorum obsoletis.*

Long. 5-6 mill., lat. 2 mill.

Voisin du *litigiosus*, mais toujours beaucoup plus petit. Brun avec des taches rougeâtres, revêtu de poils squamiformes bruns et gris ou gris jaunâtre ou blanchâtres. Prothorax plus large que long, ponctué, portant un pli transversal au milieu, arqué sur les côtés en avant, droit en arrière, ses angles postérieurs courts, nullement saillants, présentant, en dehors et à quelque distance du sommet, une trace de carène, formant avec le bord latéral un angle très-aigu. Écusson semblable, quant à la vestiture, à la base des élytres. Élytres généralement plus étroites que le prothorax, courtes, arquées sur les côtés, un peu bombées, finement striées-ponctuées. Flancs du prothorax et du métathorax présentant des sillons mal limités.

Cette petite espèce est répandue dans les îles de l'archipel indien, aux Moluques et jusqu'à la Nouvelle-Guinée; elle se trouve aussi à Malacca. Elle a été rencontrée assez fréquemment par M. Wallace. Elle varie principalement quant à la densité de la vestiture qui est tantôt assez épaisse, tantôt plus ténue et plus clair-semée. Cela tient sans doute à l'étendue de son habitat et à sa dispersion dans des îles nombreuses où des races se sont développées isolément. Les exemplaires de Batchian sont plus grands et plus nus; ceux de la Nouvelle-Guinée sont remarquables par une vestiture plus épaisse; mais entre ces formes extrêmes il y a tous les passages.

90. L. ERINACEUS. — *Fuscus, ferrugineo-maculatus, squamulosus; prothorace longitudine latiore, subquadrato, lateribus cre-*

*nulatis, angulis posticis truncatis, pallide densius squamulosis; elytris punctis minimis seriatis, remotis, interstitiis crinibus suberectis seriatim dispositis; sulcis tarsorum anticis.*

Long. 4 mill., lat. 1 $^1/_5$ mill.

Facies de *Meristhus*, mais écusson normal. Brunâtre, tacheté de ferrugineux, peu densément squamuleux sauf en dedans des angles postérieurs du prothorax, où des squamules plus denses forment des taches claires. Prothorax un peu plus large que long, ses côtés parallèles, peu convexe, peu ponctué, ses bords latéraux crénelés, ses angles postérieurs tronqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax, présentant des séries de petits points très-espacés et de poils raides redressés. Des sillons tarsaux aux flancs prothoraciques seulement.

Bornéo; Sarawak. (Coll. Jans.)

91. L. COENOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 114.

Hindoustan septentrional.

92. L. SERICANS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 112, pl. II, fig. 24.

Ceylan.

93. L. FURUNCULOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 134.

Bengale.

94. L. CONSOBRINUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 125.

Hindoustan septentrional.

95. L. ELLIPTICUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 135.

(♀) *Lacon propinquus.* — CAND., *loc. cit.*

Himalaya.

96. L. BRUNNIPENNIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 133.

Himalaya.

97. L. CINNAMOMEUS. — *Fuscus, squamulis minutissimis cinnamomeis confertissime obductus; prothorace longitudine paulo latiore, lateribus valde arcuato, medio late sulcato, angulis prominulis, posticis divaricatis, carinatis; elytris brunneis, antrorsum parallelis, subtiliter striato-punctatis.*

Long. 13 mill., lat. 4 mill.

Var. *a. Squamulis griseis.*

Très-voisin du *brunnipennis* dont il ne diffère que par les squamules beaucoup plus petites et plus denses. Les exemplaires typiques se reconnaîtront en outre, aisément, à leur couleur rouge cannelle.

Sibérie orientale. La variété est de Vladimir Bay dans la Corée. (Coll. Jans.)

J'ai vu, au Muséum de Paris, plusieurs exemplaires d'une espèce rapportée de la Chine centrale par le père David et que je ne puis décrire, n'ayant pu l'obtenir en communication; elle est entièrement rouge. Sa place est sans doute à côté de celle-ci.

98. L. PRAETERMISSUS. — *Subcylindricus, fusco-niger, opacus, griseo-squamulosus; prothorace latitudine paulo longiore, convexo, creberrime fortiterque punctato, basi apiceque angustato, lateribus arcuato, crenulato, angulis prominulis, posticis divaricatis truncatis; elytris parallelis, punctato-striatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 11 mill., lat. 3 mill.

Subcylindrique, brun noir, très-opaque, revêtu de squamules raides, grisâtres. Front plat. Prothorax un peu plus long que large, rétréci à la base et au sommet, ses côtés courbes, convexe, fortement et densément ponctué avec une trace de sillon médian, ses angles antérieurs avancés, serrés contre la tête, obtus au bout, ses bords latéraux crénelés, ses angles postérieurs très-divergents, tronqués au bout. Écusson court, subquadrangulaire. Élytres de la largeur de la portion antérieure du prothorax,

parallèles sur les côtés jusqu'au delà du milieu, un peu déprimées le long de la suture, ponctuées-striées, les points des stries gros et rapprochés, les intervalles portant deux rangées de squamules. Dessous du corps comme le dessus, des sillons tarsaux mal limités sur les flancs du prothorax et du métathorax.

Indes orientales. (Coll. Jans.)

99. L. MUSCULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 141.

Chine; Hong-Kong.

100. L. SCROFA. — CAND. *Ins. rec. par M. Lewis* in *Mém. Soc. sc. Liége*, t. V, p. 4.

Japon méridional.

101. L. DEPRESSUS. — *Latus, depressus, niger, minus opacus, griseo squamulosus; prothorace longitudine paulo latiore, basi apiceque angustato, lateribus arcuato et crenulato, fortiter punctato, angulis haud prominulis; elytris brevibus, punctato-striatis, interstitiis punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^{1}/_{5}$ mill.

Large et très-déprimé, noir peu luisant, revêtu de squamules grises. Antennes épaissies au bout. Prothorax un peu plus large que long, ponctué, subsillonné, rétréci à la base et au sommet, ses côtés arqués, ses angles peu saillants, ses bords latéraux crénelés. Élytres courtes, arquées sur les côtés, aplaties, ponctuées-striées, les intervalles assez fortement ponctués et portant deux rangées de squamules. Dessous dépourvu de sillons tarsaux.

Corée. (Coll. Jans.)

102. L. APODIXUS. — *Elongatus, fusco-niger, pilis squamiformibus minutis, fulvis cinereisque, maculatim obsitus; prothorace latitudine haud longiore, basi apiceque angustato, grosse et confertissime punctato, medio tuberculo duplici, minutissimo, transverso, lævi, angulis anticis prominulis, posticis brevibus truncatis; elytris prothorace latioribus, ultra medium parallelis, extrorsum*

*fortiter, ad suturam obsolete striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 18 mill., lat. 5 mill.

*Lacon apodixus.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, 1865.

Assez allongé, noirâtre, revêtu de poils squamiformes petits, fulvescents et blanchâtres, disposés de manière à produire des taches, principalement sur les élytres. Front triangulairement impressionné. Prothorax un peu plus long que large, rétréci à la base, plus fortement au sommet avec ses côtés arqués, médiocrement convexe, sillonné en arrière, transversalement élevé au milieu, présentant vers le centre un petit tubercule transversal, lisse, divisé, toute sa surface couverte de très-gros points plus ou moins contigus, ses angles postérieurs courts, tronqués, les antérieurs très-saillants, arrondis, les bords latéraux non crénelés, bordés d'une ligne élevée, lisse, qui est formée par le prolongement exagéré des carènes des angles postérieurs. Écusson pubescent comme les élytres. Élytres un peu plus larges que le prothorax, deux fois et un quart plus longues, parallèles jusqu'au delà du milieu, marquées de stries de gros points vers le bord externe, les points obsolètes vers la suture, leur extrémité isolément arrondie. Dessous noirâtre, l'abdomen maculé de blanc sur les côtés. Sillons tarsaux nuls.

Iles Philippines : Luçon.

103. L. cervinus. — *Fusco-brunneus, pilis squamiformibus sparsis fulvis maculatim irroratus; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, grosse punctato, medio tuberculo duplici, lævi, angulis anticis prominulis, posticis divaricatis, longissime carinatis, apice truncatis; elytris seriatim punctatis, prothorace paulo latioribus; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 14 mill., lat. 4 mill.

*Lacon cervinus.*— Erichs. Meiens, *Beitr. zu Zool. in Acta Leop. Carol.*, 1834.

Brunâtre, revêtu de poils squamiformes jaunâtre fulvescent, formant des taches sur les élytres. Front peu concave. Prothorax

plus long que large, curvilinéairement rétréci à la base, assez fortement rétréci au sommet avec ses côtés arqués, médiocrement convexe, offrant une sorte de pli transversal au milieu duquel se trouve un double tubercule lisse très-peu saillant, sa surface couverte de gros points épars et inégaux, ses angles antérieurs saillants, arrondis au bout, ses côtés non crénelés, ses angles postérieurs courts, brusquement divergents, portant une carène qui se prolonge le long du bord externe, presque jusque dans les angles antérieurs. Pubescence de l'écusson semblable à celle des élytres. Élytres un peu plus larges que le prothorax et deux fois et un tiers plus longues, faiblement dilatées un peu au delà du milieu, puis assez brusquement rétrécies, marquées de points disposés en séries, les neuf séries normales se distinguant à peine d'autres placées dans les intervalles. Sillons tarsaux nuls. Abdomen maculé de blanc.

Iles Philippines : Luçon.

J'ai eu l'occasion d'examiner beaucoup d'exemplaires de cette espèce et je la décris ici, l'ouvrage dans lequel sa description a paru pour la première fois étant rare, en dehors des grandes bibliothèques.

La taille de ce *Lacon* varie beaucoup. J'en ai vu des exemplaires qui n'avaient pas plus de 10 millimètres de longueur. Chez ces petits développements, la teinte des élytres passe ordinairement au rougeâtre, soit en totalité, soit par taches.

104. L. MACRODERUS. — *Brunneo-niger, pilis subsquamiformibus subsericeis, fulvo-cinereis sat dense vestitus; prothorace latitudini longitudine subæquali, basi apiceque angustato inæqualiter punctato, angulis posticis brevibus, late truncatis; elytris prothorace vix duplo longioribis, haud latioribus, striato-punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 8-18 mill., lat. $2^1/_2$-$6^1/_2$ mill.

*Lacon macroderus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865.

Brunâtre, revêtu assez densément de poils subsquamiformes d'un cendré fauve qui voilent la couleur du fond. Antennes rougeâtres. Front légèrement concave. Prothorax grand, à peu près aussi large que long, rétréci à la base et au sommet, dilaté au milieu, ses côtés arrondis, non crénelés, son disque convexe, fortement et inégalement ponctué, légèrement sillonné en arrière, ses angles antérieurs saillants, les postérieurs courts, largement tronqués au sommet. Élytres de la largeur du prothorax et à peine deux fois aussi longues, sensiblement plus larges au milieu qu'à la base, assez brusquement atténuées au sommet, peu convexes, striées-ponctuées, les points très-fins dans le voisinage de la suture. Dessous de la couleur du dessus; épipleures et pattes d'un brun rougeâtre. Pas de sillons tarsaux.

Moluques; Nouvelle-Guinée.

Cette espèce existe dans les collections du Musée de Leyde, dans celles de MM. Saunders, Dohrn, Janson et dans la mienne. Elle varie beaucoup de taille et même d'aspect suivant que le prothorax et les élytres sont plus ou moins dilatés dans leur milieu. Les plus petits exemplaires, qui se rencontrent principalement à la Nouvelle-Guinée, ont une tendance à passer au rougeâtre : ce sont de véritables avortons. Malgré toutes ces différences, l'espèce est assez facilement reconnaissable aux caractères simultanés de la longue carène des angles postérieurs du prothorax, des points inégaux sur ce dernier, et de l'uniformité de couleur de la vestiture.

105. L. Wallacei. — *Fusco-niger, subopacus, squalide squamulosus; fronte paulo convexa; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, punctato, medio transversim plicato, angulis posticis brevibus, longe carinatis; elytris prothorace latioribus, basi parallelis, depressis, striato-punctatis.*

Long. 10-13 mill., lat. 3-4 mill.

Var. *a. Fusco-brunneus vel brunneus.*

Noirâtre, presque mat, revêtu de squamules grisâtres. Front faiblement concave. Prothorax plus long que large, rétréci à la

base et au sommet avec ses côtés arqués, ponctué, portant en arrière du milieu un pli transversal assez élevé, ses angles postérieurs courts, munis, comme chez les précédents, d'une longue carène qui se prolonge le long du bord latéral, lequel n'est pas crénelé. Élytres plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, déprimées vers la suture, striées-ponctuées, les intervalles plats et ponctués. Dessous dépourvu de sillons tarsaux.

Célèbes : Tondano; la variété est de Macassar. Elle a tout à fait l'aspect du *L. serricollis* de Java, mais elle en diffère, ainsi que toutes les suivantes, par les bords latéraux du prothorax non denticulés. (Coll. Jans., Cand.)

106. L. GLIRINUS. — *Fusco-niger, depressus, pilis squamiformibus squalidis tectus; prothorace latitudini longitudine æquali, basi apiceque angustato, late, parum profunde medio longitrorsum sulcato, lateribus haud vel vix crenulato, angulis posticis fere rectis; elytris ultra medium parallelis, seriatim punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

*Lacon glirinus.* — CAND. *Mém. Acad., Br.* 1865, p. 11.

Brunâtre, revêtu de poils squamiformes qui sont assez serrés pour modifier la couleur des téguments. Prothorax aussi long que large, notablement plus large au milieu qu'à la base, très-peu bombé, densément ponctué, présentant au milieu un sillon longitudinal complet peu marqué, ses angles postérieurs presque droits, légèrement teintés de rougeâtre, munis extérieurement d'une très-fine carène qui se prolonge le long et très-près du bord externe. Élytres plus larges que la base du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, déprimées, finement ponctuées-striées, leur bord externe rougeâtre. Pas de sillons tarsaux en dessous.

Fidjee. (Coll. Jans.)

107. L. SERRICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 140, pl. II, fig. 19.

Java.

108. L. SERRULA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 122.

Népaul.

109. L. LAPIDEUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 141.

Indes orientales.

110. L. CRENICOLLIS. — MÉNÉTR. *Catal. rais.*, p. 156. — CAND., *Monogr.*, t. I, p. 139.

Caucase; Perse; Punjab, etc. M. Dohrn en possède un exemplaire indiqué comme ayant été trouvé aux environs de Pise, en Italie.

111. L. SINENSIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 139.

Chine méridionale; Siam; Cambodge.

112. L. SPURCUS. — *Fusco-niger, opacus, pilis squamiformibus squalidis sparsim vestitus; prothorace latitudini longitudine subæquali, lateribus arcuato subcrenulato, æqualiter convexo, profunde punctato, angulis posticis tenuibus vale divaricatis; elytris ultra medium dilatatis, striato-punctatis, striis ad suturam fere obsoletis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 14 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

*Lacon spurcus.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 11.

Tout entier d'un noirâtre mat, revêtu de poils squamiformes peu serrés d'un cendré sale. Prothorax aussi long que large, rétréci au sommet et à la base avec ses côtés très-arqués, régulièrement et assez fortement convexe, marqué de gros points profonds et denses, ses angles antérieurs saillants, ses bords latéraux subcrénelés et doublés d'une fine ligne saillante qui les suit parallèlement et de très-près, ses angles postérieurs petits, grêles, très-divergents. Élytres un peu plus étroites à la base que le prothorax dans sa partie la plus large, s'élargissant graduellement jusqu'au tiers postérieur, un peu déprimées dans la région suturale, marquées de lignes de points très-gros vers le bord externe et de plus en plus petits à mesure qu'ils se rapprochent de la

suture. Flancs du prothorax et du métathorax dépourvus de sillons tarsaux.

Iles Philippines.

J'ai décrit cette espèce d'après un exemplaire appartenant au musée de Leyde.

113. L. GRACILIS. — *Fuscus, subopacus, pilis squamiformibus minutis obductus; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, lateribus regulariter arcuato crenatoque, disco fortiter et dense punctato, medio canaliculato, angulis posticis haud prominulis; elytris brevibus, punctato-striatis, punctis quadratis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

Plus petit que le précédent, brun obscur, mat, revêtu de petits poils squamiformes d'un grisâtre fulvescent. Prothorax plus long que large, presque aussi rétréci en arrière qu'au sommet, régulièrement arqué sur les côtés, les bords latéraux fortement dentés dans toute leur longueur, le disque convexe, largement et peu profondément sillonné depuis la base jusqu'au sommet, couvert de points gros et serrés, ses angles antérieurs avancés de chaque côté de la tête, arrondis au bout, les postérieurs petits, nullement saillants, portant une carène qui se prolonge le long du bord latéral jusque vers le tiers antérieur et même au delà. Élytres plus larges que le prothorax à la base, moins de deux fois plus longues, parallèles jusqu'au delà du milieu, puis curvilinéairement atténuées depuis ce point jusqu'au sommet, déprimées, striées, les stries marquées de points assez gros et carrés, les intervalles ordinairement un peu convexes, ponctués.

Gilolo, Batchian, Aru, Waigioe, Kai, Mysol, N^lle^-Guinée, etc.

Il varie, nécessairement, en raison de cet habitat étendu et fractionné. Il est tantôt plus, tantôt moins densément écailleux; la vestiture est parfois grise, parfois brune. On le distingue des espèces précédentes à son prothorax relativement plus grand, plus régulièrement arqué sur les côtés, sa base étant presque aussi rétrécie que son sommet, enfin à son faible sillon longitudinal.

114. L. OBESUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 132, pl. II, fig. 18.

Ceylan.

115. L. NEBULOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 115.

Hindoustan; Ceylan.

Un exemplaire de Rangoun, dans la collection de M. Janson, a la taille plus grande (8 mill.), le prothorax moins transversalement gibbeux; pour le reste il présente tous les caractères de l'espèce.

116. L. ADSPERSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 125.

Hindoustan septentrional.

117. L. TUMENS. — CAND. *Ins. rec. p. M. Lewis*, in *Mém. Soc. Liége*, 2e sér., t. V, p. 4.

Japon.

118. L. TURGESCENS. — *Obesus, latus, niger, opacus, squamulis nonnulis, maculisque minimis duabus posticis argenteis, notatus; prothorace lato, grosse punctato, tumido, angulis posticis latis, acutis; elytris convexis, subsulcatis, punctatis.*

Long. 7 mill., lat. 2 $^{2}/_{3}$ mill.

Forme du *tumens*. Court, large, épais, noir opaque, à peine squamuleux, orné de quelques poils argentés disséminés sur la moitié postérieure des élytres, quelques-uns rassemblés et formant une petite tache blanche de chaque côté près du sommet. Front rugueux, biimpressionné. Prothorax plus large que long, très-bombé, couvert de gros points contigus, ses angles postérieurs grands, dilatés, aigus au bout, bombés en dessus, le bord postérieur très-sinueux et portant au milieu un tubercule au-devant de l'écusson. Élytres très-bombées, densément ponctuées, subsillonnées, les sillons bien marqués à la base. Dessous présentant quatre sillons tarsaux.

Poulo-Pinang. (Coll. Jans.)

119. L. SPARSUS. — *Niger, opacus, fusco-vestitus, pilis squamiformibus fulvis irroratus; prothorace longitudine latiore, apice subito angustato, punctato, medio transversim elevato, angulis posticis diaphaneis, rufescentibus; elytris brevibus, convexis, punctatis; sulcis quatuor tarsorum nullis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^1/_2$ mill.

Petit, noir, mat, revêtu de squamules obscures avec des poils squamiformes fauves disséminés. Prothorax plus large que long, brusquement rétréci au sommet à partir du milieu, ponctué, transversalement élevé au milieu du disque, ses angles postérieurs droits, aigus au sommet, un peu bombés en dessus, translucides et rougeâtres. Élytres de la longueur du prothorax, courtes, peu atténuées au sommet, bombées, ponctuées. Pattes brun-rougeâtre; pas de sillons tarsaux.

Java. (Coll. Jans.)

120. L. TRIFASCIATUS. — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 10. — IB., *Ins. rec. p. M. Lewis*, in *Mém. Soc. Liége*, 2e sér., t. V. p. 1.

Cette petite espèce paraît avoir un habitat très-étendu : elle a été trouvée à Ceylan, à Bornéo et jusque dans le sud du Japon.

121. L. LAXUS. — *Niger, opacus, squamulis pallidis antrorsum, obscuris postice, vestitus; prothorace lato, medio convexo, lateribus explanatis; elytris prothorace angustioribus, apice attenuatis, dense punctatis; sulcis tarsorum quatuor distinctis.*

Long. 6 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Large, noir, opaque, revêtu densément de squamules fulvescentes, d'aspect soyeux, sur le prothorax et sur la partie antérieure des élytres, le reste de celles-ci couvert de squamules obscures avec deux points blancs près du sommet. Prothorax plus large que long, ponctué, bombé dans sa partie moyenne, aplati latéralement, ses bords latéraux droits et un peu sinueux en arrière, brusquement recourbés en dedans au sommet, ses angles postérieurs droits, aigus au bout, un peu rougeâtres. Élytres

plus étroites que le prothorax, atténuées à partir du tiers antérieur, convexes, très-ponctuées, munies en arrière de l'écusson de deux petits faisceaux de poils noirâtres. Quatre sillons tarsaux distincts.

Mysole.

Je n'en ai vu qu'un exemplaire de cette localité dans la collection de M. Janson. Un autre, de Florès, a le prothorax moins large en proportion, les élytres moins atténuées au sommet sans faisceau de poils derrière l'écusson, la vestiture moins nettement séparée en deux teintes opposées. Pour le reste il a la physionomie générale du premier. Celui-ci serait-il le mâle et l'autre la femelle de la même espèce? je suis assez porté à le croire.

122. L. TRISTIS. — Bl. *Voy. au pôle Sud. Zool.*, p. 86.

Nouvelle-Guinée.

123. L. BRACHYCHETUS. — Redt. in Hugel, *Kaschm.* p. 506.

Cachemire.

III. — GROUPE AUSTRALIEN.

124. L. CALIGINOSUS. — Guérin, *Voy. d. l. Coq., Ins.*, p. 68, pl. II, fig. 7. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 144.

Nouvelle-Galles du Sud, Victoria, Tasmanie.

125. L. LABIOSUS. — *Brunneo-niger, subnitidus, pilis squamiformibus griseis regulariter obsitus; prothorace latitudini longitudine æquali, lateribus arcuato, convexo, punctato, angulis posticis rectis, haud carinatis; elytris striato-punctatis, interstitiis planis, æqualibus, punctatis; sulcis tarsalibus quatuor bene definitis.*

Long. 6 mill., lat. 2 mill.

Cette petite espèce se rapproche du *caliginosus* avec lequel elle a en commun la présence de quatre sillons tarsaux bien limités.

Elle s'en distingue par sa taille beaucoup plus petite et par son prothorax plus long en proportion.

Australie occidentale : Swan-Riv. (Coll. Jans.)

126. L. FERRUGINEUS. — *Rufo-ferrugineus, subnitidus, flavo-squamulosus; prothorace longitudine paulo latiore, apice arcuatim angustato, crebre fortiter punctato, lateribus crenulato, angulis posticis rectis, acutis; elytris brevibus, dorso depressiusculis, striis fortiter punctatis; sulcis tarsorum anticorum bene definitis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Entièrement d'un rouge ferrugineux, un peu luisant, revêtu de squamules flaves. Prothorax un peu plus large que long, droit et parallèle sur les côtés en arrière, curvilinéairement rétréci en avant, convexe, fortement et densément ponctué, ses bords latéraux crénelés, ses angles postérieurs droits, nullement tronqués au bout. Élytres de la largeur du prothorax et deux fois plus longues, parallèles sur les côtés jusqu'au delà du milieu, déprimées vers la région suturale, étroitement striées, les stries marquées de gros points, les intervalles plats et assez fortement ponctués. Flancs du prothorax portant un sillon nettement limité pour la réception des tarses antérieurs, le métathorax n'en présentant aucune trace.

Australie nord-occidentale : Nickol-Bay. (Coll. Fry et Jans.)

Diffère du précédent par divers caractères, notamment par la couleur.

127. L. SOCIUS. — *Fuscus, subopacus, squamulis flavis sparsim obductus; prothorace longitudine latiore, punctato, apice arcuatim angustato, convexo, angulis posticis rectis; elytris ultra medium parallelis, ad saturam depressis, punctato-striatis, sulcis tarsorum anticorum bene definitis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_4$ mill.

Brunâtre, opaque, revêtu de squamules éparses de couleur assez claire. Prothorax plus large que long, très-arrondi sur les

côtés, convexe, ponctué, ses angles postérieurs droits, présentant une trace de carène vers leur bord externe. Élytres de la largeur du prothorax et deux fois plus longues, parallèles jusque au delà du milieu, déprimées vers la région suturale, ponctuées-striées, les intervalles égaux et plats. Flancs du prothorax présentant un sillon tarsal nettement limité.

Cap York. (Coll. Jans.)

Bien reconnaissable au sillon nettement limité des flancs prothoracique, alors que le métathorax n'en présente pas de trace.

128. L. CRASSUS. — *Crassus, fuliginosus, subopacus, griseo-squamulosus; prothorace longitudine latiore, valde convexo, crebre fortiterque punctato, angulis posticis brevibus, truncatis; elytris convexis, striis angustis punctatis, interstitiis planis, æqualibus, granulatim punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 12 mill., lat. 4 $^1/_4$ mill.

Épais, noirâtre, presque mat, revêtu de squamules grises. Front perpendiculaire, impressionné au milieu. Prothorax plus large que long, curvilinéairement rétréci au sommet, très-bombé, fortement ponctué, ses angles postérieurs aplatis, tronqués au bout. Écusson pentagonal. Élytres deux fois et demie au moins plus longues que le prothorax, aussi large à la base, un peu élargies vers le milieu, très-convexes, finement striées, les stries ponctuées, les intervalles marqués de points à bords saillants, ce qui les rend granuleux. Dessous du corps bombé comme le dessus; les flancs dépourvus de sillons tarsaux.

Cap York. (Coll. v. Bruk.)

129. L. ASSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 145.

Nouvelle-Galles du Sud; Queensland.

130. L. LATICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 146, pl. II, fig. 12.

Nouvelle-Galles du Sud.

Cette espèce a quatre sillons tarsaux, nettement limités, comme

le *caliginosus*, caractère dont il n'est pas fait mention dans la description et qui le distingue complétement de l'*assus*.

131. L. URSULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 147.

Nouvelle-Galles du Sud; Adelaïde.

132. L. PRINCEPS. — *Fusco-castaneus, pilis squamiformibus cervinis tectus; prothorace longitudine paulo latiore, basi apiceque valde angustato, lateribus arcuato, œqualiter convexo, cribrato, margine laterali duplici; elytris striato-punctatis, punctis antice majoribus; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 25 mill., lat. 8 mill.

La plus grande espèce connue jusqu'ici. Brun, revêtu de squamules fauve-jaunâtre. Prothorax plus large que long, assez fortement rétréci au sommet et à la base, arrondi sur les côtés, régulièrement convexe en dessus, couvert de points, ceux du milieu du disque beaucoup plus gros que ceux du pourtour, ses angles assez saillants, ses bords latéraux doubles, l'arête supérieure pouvant être considérée comme formée par le prolongement de la carène des angles postérieurs. Écusson hastiforme, le milieu seul ponctué et écailleux. Élytres longues, un peu élargies vers le milieu, striées-ponctuées, les points des stries de plus en plus gros, à mesure qu'ils se rapprochent de la base. Pas de sillons tarsaux.

Cap York. (Coll. Jans.)

133. L. GEMINATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 149, pl. II, fig. 5.

Queensland.

134. L. MAMILLATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 144, pl. II, fig. 4.

Nouvelle-Galles du Sud.

135. L. DEBOULAYI. — *Fusco-brunneus, opacus, vix squamulosus; prothorace longitudine haud latiore, creberrime grosse punctato, basin versus bifoveolato, margine laterali duplici cre-*

*nulato; elytris brevibus, dorso deplanatis, striato-punctatis, interstitiis externis granulatis.*

Long. 17 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Brunâtre, opaque, presque dépourvu de squamules. Antennes courtes. Prothorax aussi long que large, peu rétréci à la base et au sommet, peu convexe, présentant deux fossettes vers la base, couvert de points très-gros, contigus et hexagonaux comme des alvéoles, ses bords latéraux doubles, l'inférieur crénelé plus fortement que le supérieur, les angles postérieurs non divergents. Écusson large, ponctué au milieu. Élytres courtes, parallèles jusqu'au delà du milieu, déprimées, striées-ponctuées, beaucoup plus finement vers la suture qu'en dehors, les intervalles externes granuleux. Pas de sillons tarsaux.

Nickol-Bay. (Coll. Jans.)

136. L. HUMILIS. — (ERICHS.) CAND. *Monogr.*, t. I, p. 148.

Tasmanie.

137. L. PARALLELUS. — *Angustus, parallelus, fuscus, fusco-pilosulus; prothorace latitudini longitudine æquali, lateribus arcuato, convexo, medio subcanaliculato, crebre fortiterque punctato, angulis posticis fere rectis, integris; elytris substriato-punctatis, interstitiis flavis, punctatis; sulcis tarsorum obsoletis.*

Long. 10 $^1/_2$ mill., lat. 3 mill.

Assez étroit, parallèle, d'un noir brunâtre, revêtu de petits poils squamiformes brunâtres peu denses. Prothorax aussi long que large, convexe, obsolètement canaliculé au milieu, densément et assez fortement ponctué, les côtés arqués, ses angles postérieurs entiers, à peu près droits. Élytres de la largeur de la base du prothorax, parallèles dans leurs deux tiers antérieurs, finement striées, les stries marquées de points un peu plus gros que ceux des intervalles. Flancs prothoraciques présentant des sillons tarsaux peu marqués.

Queensland.

138. L. VARIABILIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 148.

Nouvelle-Galles du Sud; Victoria; Adélaïde; Tasmanie; Nouvelle-Zélande.

C'est l'espèce la plus commune et la plus répandue dans toute la partie orientale du continent australien. Elle étend même son habitat jusqu'à la Nouvelle-Zélande.

139. L. MARGINATUS. — *Brunneo-testaceus, flavo-squamulosus; prothorace latitudine longiore, punctato, parum convexo, lateribus antice explanato; elytris punctato-striatis, interstitiis alternis paulo elevatioribus; subtus obscurus, sulcis tarsorum nullis.*

Long. 10-12 mill., lat. 3-3 $^1/_4$ mill.

Brun jaunâtre plus ou moins clair avec le disque du prothorax et la région suturale des élytres parfois noirâtres, revêtu de petites squamules flaves. Front concave. Prothorax plus long que large, un peu dilaté en avant, médiocrement convexe, ponctué, sillonné au milieu, ses bords latéraux bordés, surtout en avant, d'une assez forte dépression qui les fait paraître redressés, ses angles postérieurs divergents, obtus au bout. Élytres un peu plus larges que le prothorax, légèrement élargies vers leur milieu, déprimées, ponctuées-striées, les points assez profonds, leurs intervalles légèrement convexes, les impairs paraissant un peu plus élevés que les autres. Dessous et pattes bruns, les épipleures jaunes. Pas de sillons tarsaux.

Clarence-Riv. (Coll. Cand., Jans.)

140. L. FATUUS. — *Testaceus, subnitidus; flavo-squamulosus; prothorace latitudine longiore, antice dilatato, convexo, sparsim subtiliter punctato, lateribus crenulato, angulis posticis fere rectis, acutis; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis granulatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 6 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Petit, testacé, un peu luisant, revêtu de squamules flave

blanchâtre. Front grand subquadrangulaire. Antennes assez épaisses. Prothorax étroit, plus long que large, un peu convexe, élargi en avant, finement et éparsément ponctué, ses bords latéraux crénelés, ses angles postérieurs courts, presque droits, aigus au bout. Écusson oblong. Élytres notablement plus larges que le prothorax, parallèles, ponctuées-striées, les intervalles plats, égaux entre eux et granuleux. Dessous assez luisant; pas de sillons tarsaux.

Australie occidentale. Un emplaire provenant des chasses de M. De Boulay, dans la collection de M. Fry. Petite espèce facilement reconnaissable à l'étroitesse relative du prothorax et à sa couleur.

141. L. VARIOLUS. — *Ellipticus, brunneus, nigro-marmoratus, fulvo-pilosus; prothorace longitudine latiore, lateribus arcuato, disco transversim elevato, crebre fortiterque punctato, angulis posticis obtusis, truncatis; elytris convexis, medio dilatatis, punctato-striatis; sulcis tarsorum anticorum impressis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_4$ mill.

Brun obscur, marbré d'une multitude de petites taches irrégulières, noirâtres, revêtu de poils squamiformes fauves assez denses. Front présentant une petite impression au centre. Prothorax plus large que long, convexe, transversalement élevé au milieu, densément et fortement ponctué, ses côtés arqués, un peu plus étroit à la base qu'au milieu, ses angles postérieurs obtus, largement tronqués au bout. Élytres de la largeur du corselet à la base, un peu dilatées vers leur milieu, atténuées au bout, convexes, striées, les stries marquées de points gros surtout vers le bord externe. Flancs prothoraciques marqués d'impressions tenant lieu des sillons tarsaux.

Queensland.

Cette espèce se trouve en nombre dans ma collection et dans celle de M. Janson.

142. L. PLEURETICUS. — *Latus, depressus, fuscus, opacus, squalide pilosus; prothorace medio elevato, vage bituberculato vel transversim carinato, crebre punctato, angulis posticis brevibus apice emarginatis; elytris ad suturam deplanatis, punctato-striatis, interstitiis alternis subelevatioribus, margine epipleurisque rubrescentibus; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 13-15 mill., lat. 5-5 $^1/_2$ mill.

Plus petit que le précédent, large, un peu déprimé, brunâtre, revêtu de poils squamiformes jaunâtres. Front plat. Prothorax plus large que long, élevé au milieu avec les bords aplatis, présentant au centre du disque une sorte de saillie transversale plus ou moins distinctement coupée en deux, densément et fortement ponctué, ses côtés arqués, sinueux au devant des angles postérieurs, ceux-ci un peu recourbés en dehors, courts, légèrement échancrés au bout. Élytres de la largeur du prothorax, un peu dilatées au milieu, fortement arrondies à l'angle sutural, aplaties à la suture jusqu'à la quatrième strie, finement striées, les stries internes finement, les externes, surtout les trois dernières, très-fortement ponctuées, les cinquième et septième intervalles un peu élevés et plus densément squamuleux, le dernier, les épipleures et la base des flancs prothoraciques rougeâtres. Sillons tarsaux nuls.

Queensland; Rockhampton; Brisbane. (Coll. Cand., Jans.)

143. L. PICTIPENNIS. CAND. *Monogr.*, t. I, p. 150.

Nouvelle-Galles du Sud et Victoria.

144. L. PORRIGINOSUS.— *Brunneus, ferrugineo-maculatus, squamulis pallidis dense obductus; prothorace longitudine latiore, parallelo, minus convexo, angulis posticis rectis; elytris thoracis latitudine, antice parallelis, striato-punctatis; sulcis tarsorum anticorum bene definitis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Brun, marqué de taches irrégulières ferrugineuses, opaque, revêtu de squamules courtes, larges et assez denses, de couleur

claire avec quelques-unes blanchâtres. Prothorax plus large que long, droit et parallèle sur les côtés en arrière, assez brusquement rétréci au sommet, médiocrement convexe, très-ponctué, ses angles postérieurs droits. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, peu convexes, striées-ponctuées, les intervalles plats et égaux. Flancs présentant un sillon tarsal bien limité.

Australie occidentale. (Coll. Jans.)

145. L. GUTTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 151.

Victoria.

146. L. MARMORATUS. — *Fuscus, opacus, pilis squamiformibus squalidis parce vestitus, pallide marmoratus; prothorace longitudine latiore, convexo, subcanaliculato, crebre fortiterque punctato, angulis posticis rectis; elytris dorso deplanatis, seriatim punctatis; sulcis tarsorum impressis.*

Long. 10 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Assez large, d'un brunâtre tout à fait mat, revêtu peu densément de poils squamiformes grisâtres, marqué de petites taches éparses d'un brun rougeâtre et recouvertes d'écailles jaunâtres. Prothorax plus large que long, un peu plus large au tiers antérieur qu'à la base, ses côtés très-arqués en avant, médiocrement bombé, marqué d'un sillon fin dans toute sa longueur, impressionné sur la base en dedans des angles postérieurs, fortement et densément ponctué, ses angles postérieurs presque droits, entiers. Élytres de la largeur de la base du prothorax, parallèles sur les côtés jusqu'au delà du milieu, déprimées sur le dos dans la région suturale, marquées de séries de gros points avec les intervalles offrant des séries de points plus petits. Flancs du prothorax présentant des sillons tarsaux, bien marqués à leur naissance et s'effaçant à l'extrémité.

Queensland.

Cette espèce fait partie de ma collection.

147. L. OCTAVUS. — *Fusco-niger, opacus, pilis squamiformibus rubiginosis vestitus; prothorace basi coarctato, canaliculato; elytris ovatis.*

Long. 13 mill., lat. 4 mill.

Brun obscur, mat, revêtu de poils squamiformes rougeâtres. Front impressionné. Prothorax plus long que large, presque aussi rétréci à la base qu'au sommet, ses côtés arqués, sillonné dans toute sa longueur au milieu, densément et fortement ponctué, ses angles postérieurs courts, obtus, arrondis au bout, carénés. Écusson arrondi en arrière. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, notablement plus larges au milieu qu'à la base, convexes, marquées de séries de gros points. Flancs du prothorax impressionnés. Pattes brunes.

Queensland. (Coll. Jans).

Cette espèce présente des caractères bien tranchés. Sa forme la rapproche du genre *Myrmodes*.

148. L. COSTIPENNIS. — (GERM.) CAND. *Monogr.*, t. I, p. 151, pl. II, fig. 23.

Adelaïde; Victoria.

149. L. CARINULATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 152.

Nouvelle-Galles du Sud.

150. L. SCULPTUS. — *Fuscus, opacus, depressus, pilis squamiformibus brevibus brunneis tectus; prothorace latitudini longitudine subæquali, postice recto parallelo, antrorsum arcuatim angustato, medio late et parum profunde sulcato, angulis posticis rectis longe carinatis; elytris brevibus, striato-punctatis, interstitiis imparibus elevatis.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

Déprimé, assez large, brunâtre, opaque, revêtu de poils squamiformes bruns. Prothorax aussi long que large, curvilinéairement

rétréci en avant à partir du milieu, droit et parallèle en arrière, densément ponctué, présentant au milieu, dans toute sa longueur, un sillon très-large et peu profond, ses angles postérieurs droits, munis d'une carène qui se prolonge assez longuement en avant le long du bord latéral, celui-ci non crénelé. Écusson bombé. Élytres courtes, de la largeur du prothorax, parallèles sur les côtés en avant, aplaties, striées-ponctuées, les intervalles impairs, surtout les 3e et 5e, élevés. Flancs du prothorax présentant une trace vague de sillon tarsal.

Rivières Paroo et Darling.

Plusieurs exemplaires provenant de la collection Castelnau.

151. L. LACRYMOSUS. — *Nigro-fuscus, opacus, pilis squamiformibus minutis concoloribus; prothorace subquadrato, punctato, disco inaequali, ad angulos anteriores impresso, lateribus crenulato; elytris brevibus, seriatim grosse punctatis, interstitiis imparibus postice tuberculatis.*

Long. 7 mill., lat. 2-2 1/4 mill.

Noirâtre, opaque, revêtu de poils squamiformes très-petits et peu apparents de même couleur. Prothorax aussi large que long chez le mâle, plus large chez la femelle, droit et parallèle sur les côtés en arrière rétréci assez brusquement au sommet, son disque inégal en dessus, ponctué, plus ou moins distinctement quadri-impressionné, présentant une impression plus forte, une sorte de petite fossette en dedans de la base des angles antérieurs, ses bords latéraux un peu crénelés, ses angles postérieurs droits. Écusson bombé. Élytres courtes, de la largeur du prothorax, marquées de séries de points assez gros, surtout les externes qui sont en outre irrégulières, les intervalles impairs élevés, en arrière, en un tubercule oblong.

Australie méridionale. (Coll. Jans., Cand.)

152. L. DIVARICATUS. — *Fuscus, pilis squamiformibus brunneis sparsim tectus; fronte plana; protorace latitudine paulo*

*longiore, convexo, subcanaliculato, cribrato, lateribus antice rotundatis, postice subparallelis, angulis posticis ferrugineis, divaricatis; elytris brevibus, striato-punctatis, interstitiis inæqualibus.*

Long. 10 mill., lat. 3 $^1/_2$ mill.

*Lacon divaricatus.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 12.

Brunâtre obscur, mat, revêtu d'écailles brunes peu serrées. Front aplati. Prothorax plus long que large, curvilinéairement rétréci au sommet, à peu près droit et parallèle en arrière, convexe, subsillonné au milieu dans toute sa longueur, couvert de gros points serrés, ses bords latéraux vaguement crénelés, ses angles postérieurs ferrugineux, brusquement et assez fortement divergents. Élytres courtes et paraissant une demi-fois seulement plus grandes que le prothorax, un peu plus larges au milieu qu'à la base où elles sont débordées de chaque côté par les angles postérieurs du prothorax, curvilinéairement rétrécies en arrière avec leur extrémité subacuminée, convexes dans leur ensemble et seulement aplaties vers la suture derrière l'écusson, striées-ponctuées, les intervalles impairs un peu plus larges et plus élevés que les autres. Flancs prothoraciques présentant un faible sillon oblique.

Victoria : Melbourne.

Cette espèce est facilement reconnaissable à la grandeur relative de son prothorax et à la divergence des angles postérieurs de cette pièce.

153. L. Victoriae. — *Fusco-niger, minus opacus, pilis squamiformibus fuscis obsitus; fronte convexiuscula; prothorace latitudini longitudine æquali, lateribus apice arcuatis, postice parallelis, convexo, canaliculato, crebre-punctato; elytris brevibus, antrosum parallelis, depressis, sutura elevatis striato-punctatis.*

Long. 5 mill., lat. 1 $^2/_3$ mill.

*Lacon Victoriæ.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 12.

La plus petite espèce australienne connue. Presque noir, moins

mat que la généralité des *Lacon* de ce pays, revêtu de pois squamiformes obscurs. Front légèrement convexe, sillonné au milieu à la base. Prothorax aussi long que large, assez brusquement rétréci au sommet, droit et parallèle en arrière, convexe, légèrement sillonné au milieu, densément et fortement ponctué, ses angles antérieurs un peu acuminés, les postérieurs droits. Élytres exactement de la largeur du prothorax à la base, et une demi-fois seulement plus longues, parallèles jusqu'au milieu, un peu déprimées sur le dos avec le bord sutural redressé, striées ponctuées avec les intervalles marqués d'une série de points un peu plus petits. Flancs prothoraciques et métathoraciques présentant des impressions obliques pour loger les tarses antérieurs ou moyens.

Victoria.

Trouvé en nombre par M. de Castelnau.

154. L. INSIGNITUS. — *Brevis, fuscus, opacus, fusco-squamulosus; prothorace amplo, creberrime punctato, lateribus subcrenulatis, postice rectis, angulis posticis retrorsum productis, oblique truncatis; elytris prothorace paulo longioribus, interstitiis alternis elevatioribus.*

Long. 6 mill., lat. 2 1/4 mill.

Petit, court et large, brunâtre, opaque, revêtu de petites squamules obscures et unicolores. Prothorax grand, à peu près aussi long que large, bombé, droit et parallèle sur les côtés en arrière, très-densément ponctué, ses bords latéraux subcrénelés, ses angles postérieurs dirigés en arrière, aigus avec une troncature latérale, le disque présentant une trace de sillon médian. Écusson bombé. Élytres un peu plus longues seulement que le prothorax et la tête réunis, arquées sur les côtés, bombées, subacuminées au bout, marquées de séries de gros points, les intervalles très-ponctués, les impairs un peu élevés. Des sillons tarsaux vagues sur les flancs du prothorax.

Queensland. (Coll. Jans.)

155. L. CORDIPENNIS. — *Brevis, fuscus, opacus, fusco-squamulosus; prothorace amplo, creberrime punctato, longitudine paulo latiore, angulis posticis retrorsum productis, acutis; elytris brevissimis, striato-punctatis, intersticiis alternis elevatioribus.*

Long. 5 $^{5}/_{4}$ mill., lat. 2 $^{1}/_{4}$ mill.

Très-voisin du précédent et de même forme; il en diffère par son prothorax moins long, à angles postérieurs aigus et non tronqués obliquement en dehors.

Albany. (Coll. Jans.)

156. L. PUNCTIPENNIS. — *Brevis, fuscus, subopacus, fusco-squamulosus, postice squamulis aliquibus albidis; prothorace longitudine latiore, disco subinæquali, angulis posticis rectis haud prominentibus; elytris brevibus, substriato-punctatis, extrorsum punctis sparsis majoribus.*

Long. 6 mill., lat. 2 $^{1}/_{2}$ mill.

De la forme générale des deux précédents et même encore plus large en proportion. Brunâtre, moins opaque, revêtu de squamules de même couleur avec quelques squamules blanches formant de petites taches sur la moitié postérieure des élytres. Prothorax notablement plus large que long, arqué sur les côtés en avant, convexe, ponctué, inégal, présentant une saillie transversale au milieu du disque, ses angles postérieurs droits et même obtus. Écusson court et large, revêtu de squamules de couleur plus éclaire. Élytres très-courtes, bombées, subacuminées au bout, présentant des séries de points plus ou moins régulières avec les intervalles impairs, au moins un, un peu plus élevés, et en outre, dans leur partie externe, de gros points disséminés sans ordre. Pas de sillons tarsaux nettement marqués; pattes rougeâtres.

Australie occidentale. (Coll. Jans.)

M. W. Mac-Leay a décrit dans le tome II (pp. 250-251) des *Transactions de la Société entomologique de Sidney,* quatre espèces du genre actuel qu'en l'absence de types je n'ai pu reconnaître avec certitude. Ces espèces ont été trouvées par M. Masters dans le district de Gayndah.

### IV. — GROUPE AMÉRICAIN.

157. L. RECTANGULARIS. — Say. *Ann. Lyc.,* t. I, p. 265. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 155.

États-Unis.

158. L. MUCOREUS. — Lec. *Am. phil. Soc. Trans.,* t. X, p. 491 (*Adelocera mucorea*).

Georgie.

159. L. CURTUS. — Lec. *Am. phil. Soc. Trans.,* t. X, p. 491. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 156.

États-Unis du Sud et Mexique.

160. L. BREVIS. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 156..

Yucatan.

161. L. SCARROSUS. — Cand. *Monogr.,* t. I, p. 157.

Mexique; Guatemala.

162. L. CALAMITOSUS. — *Fuscus, squamulis acuminatis pallidis sat dense vestitus; fronte cristata; prothorace longitudine latiore, parum convexo, crebre fortiterque punctato, basi impresso, angulis posticis apice rotundato-truncatis; elytris parallelis, punctato-striatis, striis apice profonde impressis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 12 mill., lat. 3 1/4 mill.

Voisin du *scarrosus.* Assez allongé, brunâtre, revêtu de squamules cendré clair. Front portant à la base une arête longitudi-

nale bifurquée en avant, et divisé de la sorte en trois portions concaves. Prothorax plus large que long, aplati et impressionné au milieu en arrière, les bords latéraux droits et parallèles dans leur partie moyenne, densément et fortement ponctué, ses angles postérieurs larges, divergents, arrondis au sommet. Élytres parallèles jusqu'au delà du milieu, déprimées le long de la suture où les stries de points sont confuses, celles-ci mieux marquées en dehors et profondément enfoncées à la pointe. Flancs prothoraciques sans sillons tarsaux.

Oajaca. (Coll. Sallé.)

163. L. TUSPANENSIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 157.

Mexique.

164. L. LEZELEUCI.— CAND. *Monogr.*, t. I, p. 158.

Mexique; Vera-Cruz.

165. L. SUILLUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 159.

Mexique.

166. L. TRUQUII. — *Fuscus, pilis squamiformibus cinereis obductus; prothorace longitudine latiore, apice valde angustato, grosse punctato, angulis posticis integris, acutis, lateribus haud crenulato; elytris seriatim grosse punctatis; sulcis tarsorum nullis.*

Long. 8 mill., lat. 2 $^1/_2$ mill.

Noirâtre, revêtu de poils squamiformes gris clair. Front impressionné au milieu. Prothorax plus large que long, fortement rétréci au sommet à partir du milieu, marqué de très-gros points, transversalement élevé au milieu, présentant un sillon médian en arrière, ses bords latéraux non crénelés, ses angles postérieurs entiers, presque droits, aigus au bout. Élytres un peu plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, un peu déprimées vers la suture en avant, marquées de séries de gros points, le dernier intervalle un peu rougeâtre. Pas de sillon tarsaux.

Mexique.

J'en ai vu un exemplaire provenant des chasses de Truqui, dans la collection de M. Fry, et deux pris aux environs d'Oajaca, par M. Boucard, dans la collection de M. Sallé.

167. L. DUBIUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 160, pl. II, fig. 6.

Nouvelle-Grenade.

### MERISTHUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 162.

On observe dans ce genre deux formes bien tranchées. La première se compose d'espèces d'assez grande taille relativement aux autres, à écusson fortement caréné, à vestiture écailleuse formant un dessin varié, blanc sur fond noirâtre : j'en connais trois dont deux décrites antérieurement et une nouvelle, de Ceylan, qui se distingue des premières par la présence d'un sillon tarsal aux flancs du prothorax. La seconde forme, caractérisée par une taille beaucoup plus petite et l'écusson parfois moins fortement caréné, comprend une série d'espèces dont la délimitation exacte est fort difficile à établir. J'en avais autrefois reconnu deux : le *M. pistrinarius* et le *M. scobinula*. La première me paraissait assez bien établie. Dans la seconde j'avais compris une foule d'individus d'aspect et de caractères variant peu et répandus aux Indes, en Chine et jusqu'en Amérique. J'en ai revu depuis provenant de la Malaisie, du Mexique, de l'Amérique centrale et même du Para, et loin de trouver dans tous ces individus de patries si diverses, les éléments propres à établir plusieurs espèces, je n'y vois que des formes variables se rattachant à un seul type spécifique. J'en excepte un type de Célèbes que j'ai nommé *M. apicalis* et un autre de Borneo que j'ai distingué sous le nom de *M. minusculus*, qui m'ont paru s'éloigner davantage de la forme générale du *scobinula*.

MM. Horn et Chevrolat en ont fait connaître trois espèces américaines. Ne les ayant pas vues, je n'en puis rien dire quant au bien-fondé de l'établissement de ces espèces, et je me borne à les citer.

1. M. LEPIDOTUS. — PALIS. DE BEAUV. *Ins.* p. 11, pl. VII, fig. 6. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 163, pl. II, fig. 25.

Afrique occidentale; Guinée.

2. M. QUADRIPUNCTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 163.

Sylhet; Assam.

3. M. INSIGNITUS. — *Fuscus, squamulosus, fronte, prothoracis margine, argenteis; elytris cinereo-maculatis; prothorace convexo, granulato, angulis posticis truncatis, carinatis; scutello costato; elytris striatis, interstitiis granulatis, apice crenatis.*

Long. 7 mill., lat. 2 mill.

Ressemblant au *lepidotus* pour la disposition de la vestiture, mais bien distinct par plusieurs caractères essentiels. Brunâtre squamuleux avec le front et le pourtour du prothorax revêtu de petites squamules argentées, très-serrées; les élytres présentant également une bande marginale blanchâtre envoyant deux expansions vers la suture. Prothorax aussi long que large, convexe, sillonné, granuleux, crénelé latéralement, ses angles postérieurs tronqués, carénés. Écusson fortement élevé en carène. Élytres un peu plus larges que le prothorax, striées, les intervalles chargés d'une série de petits tubercules arqués, ce qui donne à l'ensemble l'aspect d'une râpe, leur extrémité créneléc. Flancs du prothorax marqué d'un sillon pour la réception des tarses antérieurs.

Ceylan. (Coll. Jans.)

4. M. PISTRINARIUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 164.

Indes orientales.

5. M. APICALIS. — *Fuscus, subopacus, squamis albicantibus irroratus; prothorace tenuiter punctato, basi angustato, angulis posticis carinatis, apice vix truncatis; scutello parum carinato; elytris punctato-striatis, apice flavis.*

Long. 3 $^1/_2$ mill., lat. 1 mill.

Noirâtre, presque mat, revêtu de squamules blanchâtres. Front sillonné au milieu. Prothorax aussi long que large, rétréci vers la base, arqué sur les côtés, peu convexe, finement ponctué, légèrement sillonné au milieu, ses angles portérieurs petits, carénés, brièvement tronqués au bout. Écusson faiblement caréné au milieu. Élytres déprimées, un peu rétrécies à la base, arquées sur les côtés, ponctuées-striées, leur extrémité flave.

Célèbes et Timor. (Coll. Jans.)

6. M. MINUSCULUS. — *Testaceus, opacus, squamis albicantibus irroratus; prothorace basi coarctato, tenuiter punctato, disco infuscato, angulis posticis truncatis; scutello parum carinato; elytris punctato-striatis, basi coarctatis, fusco-variegatis.*

Long. 2 $^1/_4$ mill., lat. $^2/_3$ mill.

Plus étroit, en proportion, que le *scobinula* et surtout plus rétréci au niveau de la base du prothorax et de celle des élytres, testacé, écailleux, le milieu du premier obscur et les secondes présentant, vers leur portion moyenne, une fascie noirâtre plus ou moins appendiculée, parfois confuse. Prothorax carré, un peu convexe, finement ponctué, subsillonné au milieu, ses angles postérieurs divergents et tronqués. Écusson faiblement caréné. Élytres un peu bombées, ponctuées-striées, sensiblement acuminées au bout. Des sillons aux flancs du prothorax.

Bornéo : Sarawack.

Collection du Musée de Gênes; communiqué par M. le docteur Gestro.

7. M. SCOBINULA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 164.

Indes orientales; Chine; Amérique intertropicale.

8. M. CRISTATUS. — HORN. *Trans. Amér. entom. Soc.* 1871 p. 299, pl. IV, fig. 2.

Texas.

9. M. TEXANUS. — HORN. *Loc. cit.* p. 300, pl. IV, fig. I.

Texas.

10. M. SETARIUS. — CHEVR. *Ann. Fr.*, 1867, p. 596.

Cuba.

## AGRAEUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 165.

A Corps avec des poils squamiformes fasciculés noirs ou bruns.
*a* Bords latéraux du prothorax arrondis en avant.
*α* Base du prothorax présentant deux tubercules creusés au sommet. 1. *A Mannerheimi.*
*αx* Ces tubercules lisses et convexes . . . . . 2. *A cuniculus.*
*aa* Bords latéreaux du prothorax anguleux en avant . . . . . 4. *A Mouhoti.*
AA Corps revêtu de poils squamiformes fauves. . . . . 3. *A feroculus.*

1. A. MANNERHEIMI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 166, pl. III, fig. 4.

2. A. CUNICULUS. — *Subovalis, niger, opacus; fronte depressa, canaliculata; prothorace concavo, tuberculato, tuberculis basalibus haud umbilicatis, convexis, nitidis; elytris gibbosis, brevibus, fortiter punctatis, tuberculis penicillatis, utrinque postice flavo-maculatis.*

Long. 5 mill., lat. 2 1/2 mill.

Semblable au précédent par la forme générale, mais différent par quelques détails qu'il suffira de mentionner. Les tubercules de la base du prothorax, qui sont creusés et en forme de ventouse au sommet chez le *Mannerheimi*, sont ici lisses et bombés. Les élytres sont plus gibbeuses, plus fortement ponctuées et sont ornées, vers l'extrémité, d'une petite tache formée d'écailles jaunâtres au lieu d'une ligne transversale blanche.

Singapore.

Trouvé par M. Wallace. (Coll. Jans.)

3. A. FEROCULUS. — *Niger, squamulis fulvis pilisque erectis nigris obductus; prothorace transverso, lateribus antice lobato; elytris convexis, brunneo-bifasciculatis, postice albo-guttatis.*

Long. 6 mill., lat. 2 1/2 mill.

Un peu plus grand que les précédents. Noir, revêtu de squamules fauves et de poils brun-noir redressés, les élytres parées vers le sommet de quelques petites taches formées par des écailles blanches. Front déprimé, concave en avant. Prothorax transversal, concave en arrière, élevé transversalement en avant, ses côtés élevés en lobes arrondis dans leur partie antérieure, sa surface très-ponctuée, ses angles postérieurs aigus au bout. Élytres courtes, de la largeur du prothorax, très-convexes, très-ponctuées, présentant vers la base deux tubercules formés par des crins brunâtres, redressés et condensés.

Sumatra.

Trouvé par M. Wallace. (Coll. Jans.)

4. A. Mouhoti. — *Niger, fere opacus; prothorace longitudine haud latiore, concavo, basin versus coarctato, lateribus antice lobato, lobis angulatis; elytris gibbis, penicillatis et postice albo guttatis.*

Long. 5 mill., lat. 2 1/4 mill.

Noir, presque mat, revêtu peu densément de poils squamiformes, les uns brun plus ou moins obscur et couchés, les autres noirs et redressés, les élytres marquées vers le sommet de quelques petites taches formées par des écailles blanches. Prothorax aussi large que long, un peu rétréci en arrière, concave dans son ensemble avec le milieu du disque un peu élevé, ponctué, ses côtés fortement relevés en avant et formant deux lobes anguleux. Élytres plus larges que le prothorax, bombées, courtes, ponctuées, présentant deux faisceaux de crins noirs, rapprochés, près de la suture, un peu en avant du milieu.

Siam; Pechabury.

Trouvé par Mouhot. (Coll. Jans., W. Saund.)

Deux espèces de Ceylan décrites par Motschulski sous les noms de *Trachylacon fulvicollis* et *lobicollis* appartiennent sans doute à ce genre.

### PERICUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 167.

1. P. NITIDUS.. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 167, pl. II, fig. 20.

Hindoustan septentrional.

2. P. RUBICUNDUS. — *Oblongus, brunneus, nitidus, sparsim villosulus; prothorace gibboso, transverso, subtilissime late punctato, angulis posticis tumidis; elytris subsulcatis, humeris tumidis; corpore subtus rufo-ferrugineo.*

Long. 6 mill., lat. 2 $^1/_4$ mill.

Plus étroit que le précédent; il en diffère en outre par sa teinte plus rougeâtre, son prothorax marqué de points larges et à peine imprimés, ses élytres vaguement sillonnées. Je n'en ai vu qu'un exemplaire, sans indication de patrie, dans la collection de M. Janson.

### MYRMODES.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 168.

M. AKIDIFORMIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 169, pl. II, fig. 16.

Australie septentrionale : Raffle-bay.

### TILOTARSUS.

GERMAR. *Zeitschr.*, t. II, p. 247. — CAND. *Monogr.* t. I, p. 170.

—

I. — *Angles antérieurs du prothorax émoussés ou médiocrement aigus.*

A Pas de tubercules sur le prothorax.
  *a* Élytres terminées chacune par une pointe plus ou moins aiguë.
    1. *T. cinctipes.* 2. *T. major.* 3. *T. mucoreus.*
  *aa* Élytres n'offrant pas de dent à leur extrémité.
    *α* Des taches argentées sur le corps . . . . . 3. *T. albisparsus.*
    *αα* Pas de taches argentées.
      * Prothorax fortement rétréci à la base . . . . . 8. *T. soleatus.*
      ** Prothorax peu rétréci à la base.

× Peu à peu rétréci d'arrière en avant . . . . . 5. *T. rugatus.*
×× Arqué sur les côtés . . . . . 13. *T. simplex.*
AA Deux tubercules sur le prothorax.
*a* Deux tubercules à la base des élytres . . . . . 12. *T. tuberculatus.*
*aa* Pas de tubercules à la base des élytres.
*α* Des taches grises formées par la vestiture . . . . . 6. *T. nubilus.*
*αα* Brunâtres avec des écailles disséminées fauves . . . . 11. *T. fulvisparsus.*

II. — *Angles antérieurs du prothorax spiniformes.*

8. *T. cuspidatus.* 9. *T. hastatus.* 10. *T. aculeatus.*

1. T. CINCTIPES. — GERM. *Zeitschr.*, t. II, p. 248.

*T. cuspidatus.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 171, pl. II, fig. 21 (1).

Madagascar.

2. T. MAJOR. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 172.

Madagascar.

3. T. MUCOREUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 173.

Madagascar.

4. T. ALBISPARSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I. p. 174.

Madagascar.

5. T. RUGATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I; p. 174.

Madagascar.

6. T. NUBILUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 175.

Guinée.

7. T. SOLEATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 176.

Guinée.

8. T. CUSPIDATUS. — KLUG, *Ins. Madag.*, p. 66, tab. III, fig. 3. — *T. Boieldieui.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 176.

Madagascar.

(1) Par suite d'une confusion dans l'étiquetage des spécimens typiques qui m'ont été autrefois communiqués par Schaum, j'ai commis l'erreur de synonymie qui est relevée ici.

9. T. HASTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 177.

Madagascar.

10. T. ACULEATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 178, pl. II, fig. 22.

Madagascar.

11. T. FULVISPARSUS. — *Fusco-brunneus, opacus, fusco-squamulosus, squamulis fulvis irroratus; prothorace latitudini longitudine æquali, antice arcuatim dilatato, convexo, subtuberculato, angulis posticis acutis; elytris striato-punctatis.*

Long. 10 mill., lat. 3 mill.

Brunâtre, opaque, revêtu de squamules de même couleur et d'autres éparses, d'un fauve doré. Prothorax aussi long que large, arqué sur les côtés qui sont crénelés, assez bombé, densément ponctué, portant deux tubercules peu prononcés au milieu du disque, ses angles antérieurs un peu avancés, obtus au bout, ses postérieurs presque droits et acuminés. Écusson chargé de poils squamiformes jaunes, au sommet. Élytres de la largeur du prothorax, un peu élargies vers le millieu, convexes, finement striées-ponctuées. Flancs du prothorax portant une impression au lieu de sillon tarsal.

Gabon. (Coll. Jans.)

12. T. TUBERCULATUS. — *Fusco-brunneus, fere opacus, squamulis ferrugineis tectus; prothorace longitudine latiore, apice subito angustato, punctato, bituberculato, angulis posticis acutis; elytris dorso depressis, basin tuberculatis, striato-punctatis.*

Long. 13 mill., lat. 4 mill.

Brunâtre, peu luisant, recouvert d'écailles ferrugineuses assez grandes. Front concave. Prothorax plus large que long, brusquement rétréci au sommet, presque droit et parallèle et subcrénelés sur les côtés, ponctué, portant au milieu du disque deux forts tubercules rapprochés, ses angles antérieurs un peu avancés, brièvement tronqués au bout, les postérieurs acuminés. Élytres

de la largeur du prothorax, peu atténuées en arrière, déprimées dans la région suturale, striées-ponctuées, les points gros, les intervalles finement ponctués, portant en arrière de l'écusson deux tubercules espacés. Flancs du prothorax présentant une impression assez large et profonde tenant lieu de sillon tarsal.

Benguela. (Coll. Jans.)

13. T. SIMPLEX. — *Brunneus, opacus, brunneo-squamulosus, squamulis cinereis irroratus; prothorace latitudini longitudine æquali, lateribus arcuato, convexo, punctato, angulis posticis subacutis; elytris convexis, striato-punctatis; sulcis tarsorum obsoletis.*

Long. $9\,^1/_2$ mill., lat. $2\,^2/_5$ mill.

Brun, opaque, revêtu de squamules de même couleur et d'autres grises assez nombreuses, éparses. Prothorax aussi long que large, un peu dilaté en avant du milieu, arqué sur les côtés, convexe, ponctué, subsillonné en arrière, ses angles postérieurs, aigus au bout avec leur bord latéral arqué. Étytres de la largeur du prothorax, parallèles dans leur moitié antérieure, bombées, striées-ponctuées, sillons tarsaux des flancs prothoraciques obsolètes.

Gabon. (Coll. Jans.)

---

Pour suivre l'ordre adopté dans la *Monographie*, ici devrait venir la tribu des *Mélanactides*. J'ai cru devoir supprimer cette tribu, composée de genres ayant peu d'analogie entre eux et dont le groupement m'a paru, après un examen plus attentif, tout à fait artificiel. Des huit genres qui la constituaient, deux seuls ont été conservés à cette place, ce sont les genres *Aliteus* et *Alaolacon*, dont les rapports avec les *Alaus* sont intimes. On trouvera les autres plus loin, dans le voisinage des *Pyrophorus* et des *Corymbites*, desquels ils se rapprochent davantage par leur *facies* et l'ensemble de leurs caractères.

Je ferai observer, à ce propos, et je reviendrai encore sur cette remarque que je crois importante dans la classification des Élatérides, que les genres *Pyrophorus* et *Corymbites* que je viens de citer ont des affinités non moins étroites avec la plupart de ceux qui vont suivre, que les *Dicrépidiites*, qui viennent immédiatement après. Mais dans l'impossibilité de faire marcher les groupes parallèlement, il a bien fallu abandonner les *Corymbites* et les genres qui ont avec eux des rapports étroits pour suivre jusqu'au bout les Élatérides à front caréné ; il en résulte que ceux-là ont été reportés fort loin, bien que quelques-uns d'entre eux eussent été bien placés à la suite des *Alaites*, *Oxynoptérites*, etc.

## TRIBU II.

# ALAITES.

Cette tribu correspond aux anciens *Hémirhipides*. J'en ai changé la dénomination parce que le genre *Alaus*, par le nombre des espèces qui le compose et sa distribution géographique très-étendue, m'en paraît le véritable type.

Les premiers genres de ce groupe ont de grands rapports avec les *Agrypnites*. Outre la brièveté des antennes, la forme du front, des tarses, etc., ils ont en effet comme eux cette vestiture écailleuse qui, à part les *Chalcolépidiites*, ne se retrouve plus guère plus loin. D'autre part, comme je l'ai dit tout à l'heure, ils se relient aux *Pyrophorites* et aux *Corymbitites*.

Le dernier genre au contraire, les *Hemirhipus* et les *Tetrigus*, conduisent directement aux *Aphanobius* et aux *Ludius*. On voit que cette tribu, qui me paraît très-naturelle, bien qu'elle ne possède pas de caractères exclusifs très-tranchés, a des affinités multiples.

### EUPHEMUS.

Cast. *Silb. Rev. entom.* IV, 7.

1. E. QUADRIMACULATUS. — Fabr. *Entom. Syst.*, t. II, p. 218, pl. XIII. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 202, pl. IV, fig. 4.

Sénégal.

2. E. FUNERARIUS. — Bertol. *Mem. Act. Bologn.*, sér. 2, t. IV, p. 544, fig. 1.

Inhambane.

## EUMOEUS.

Front concave, dépourvu de carène proprement dite en avant; mandibules presque simples; dernier article des palpes subtriangulaire.

Antennes très-courtes, de douze articles, le premier grand, grossissant graduellement depuis la base jusqu'au sommet, le second très-court, les dix autres (♂) portant chacun deux lamelles quatre fois plus longues que l'article lui-même.

Prosternum lobé et mucroné, les sutures latérales courbes, non creusées en canaux.

Fossette mésosternale à bords non saillants et déclives.

Hanches postérieures étroites, graduellement rétrécies de dedans en dehors.

Pattes de longueur moyenne; tarses assez courts, simples, comprimés.

A part quelques différences de peu de valeur dans les parties de la bouche, ce genre a beaucoup de rapport avec les *Alaolacon*. Il en diffère par la double pectination des antennes chez les mâles, caractère qu'il partage avec les *Euphemus* dont on le distinguera facilement par l'absence de canaux sur les sutures prosternales.

J'ai établi ce genre sur l'espèce suivante dont je ne connais qu'un individu ♂ communiqué par mon ami A. Murray.

E. Murrayi. — *Fusco-brunneus, parum nitidus, pilosulus; antennis ferrugineis; prothorace subquadrato, parum convexo, crebre fortiterque punctato, quadrifossulato; elytris depressis, a basi attenuatis, punctato-striatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 1/4 mill.

Assez déprimé, brun, presque mat, revêtu de poils peu denses et d'un brun fulvescent, peu apparents. Antennes ferrugineuses. Front concave, très-ponctué. Prothorax de forme carrée, un peu plus large que long, peu convexe, fortement ponctué, marqué de quatre fossettes sur le disque et d'une ligne longitudinale

médiane raccourcie, ses angles postérieurs courts, faiblement recourbés en dehors, carénés, la carène prolongée en avant en forme de pli. Élytres de la largeur du prothorax, peu allongées, atténuées en arrière, profondément ponctuées-striées. Dessous et pattes d'un brun rouge.

Madras.

### ALAOLACON.

CAND. — *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 15.

1. A. CYANIPENNIS. — CAND., *loc. cit.*, p. 15.

Presqu'île malaise.

2. A. GRISEUS. — *Fuscus, sordide griseo-pilosulus; antennis ferrugineis, brevissimis; prothorace quadrato, parum convexo, fortiter punctato; elytris depressis, profunde punctato-striatis.*

Long. 15 mill., lat. 4 mill.

Noirâtre, peu luisant, revêtu de poils d'un gris sale. Antennes ferrugineuses, plus courtes que la moitié du prothorax, le troisième article assez grand, triangulaire, les suivants décroissant graduellement. Prothorax de forme carrée, assez aplati, densément et fortement ponctué, ses angles postérieurs courts dirigés en arrière, portant une carène qui se prolonge assez loin en avant en se transformant en pli. Écusson plat, à côtés parallèles en avant, arrondis en arrière. Élytres déprimées, parallèles, assez profondément ponctuées-striées, les intervalles légèrement convexes et marqués de quelques points fins. Métathorax, abdomen et pattes d'un brun ferrugineux.

Bangkok. (Coll. Castelnau.)

Cet Élatéride a de grands rapports de forme, d'aspect et de caractères avec l'*Eumœus Murrayi* décrit plus haut. Au premier abord, j'étais même tenté d'y voir la femelle de cette dernière espèce, mais en y regardant de plus près, j'ai reconnu des différences manifestement spécifiques. Il ne serait pas impossible

que nous ne connussions que des femelles d'*Alaolacon*, dont les mâles, encore ignorés, auraient les antennes biflabellées; en ce cas ces deux genres devraient être réunis.

### CTENICERA.

Latr. *Règne animal*, t. I (Ed. 3), 1817, p. 403.

1. C. NOBILIS. — Illig. *Wiedem. Arch.*, t. I, 2, p. 116. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 204.

Madagascar.

2. C. INSIGNIS. — Klug, *Ins. Madag.*, p. 66. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 205, pl. V, fig. 3.

Madagascar.

3. C. LUGUBRIS. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 206, pl. V, fig. 4.

Mozambique.

### LYCOREUS.

Cand. *Monogr.*, t. I, p. 206.

1. L. MADAGASCARIENSIS. — Gory, *Ann. Soc. Fr.*, t. I, p. 385, pl. XII, fig. 2. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 208.

Madagascar.

2. L. DUX. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 208.

Madagascar.

3. L. REGALIS. — Cand. *Monogr.* t. I, p. 209.

Madagascar.

4. L. GOUDOTII. — Cast. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 9. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 209, pl. IV, fig. 2.

Madagascar.

5. L. TRIOCELLATUS. — Cast. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 8. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 210, pl. IV, fig. 1.

Madagascar.

6. L. CYCLOPS. — *Niger, flavescenti nigroque tomento variegatus; prothorace longitrorsum validissime carinato, carina nuda, plaga rotundata nigra, velutina, flavo cincta, ornato; elytris postice attenuatis, macula triangulari nigra velutina notatis.*

Long. 35 mill., lat. 11 mill.

CAND. *Mém. Acad. Belg.*, t. XVII, p. 14, 1865.

Noir, revêtu d'une tomentosité d'un flave clair entremêlée de taches noires, le prothorax orné au milieu d'une tache ronde, veloutée, noire, entourée par deux cercles concentriques de poils flaves séparés entre eux par un étroit espace dénudé, les élytres présentant, chacune au delà du milieu, une grande tache triangulaire oblique, noire, veloutée, également bordée de poils flaves, et vers le sommet des raies noires sur un fond flave. Prothorax plus long que large, curvilinéairement rétréci au sommet, déprimé sur les côtés, portant au milieu une très-forte carène longitudinale dénudée, ses angles postérieurs divergents, aplatis, obsolètement carénés. Élytres courtes, sillonnées, fortement atténuées à partir du tiers antérieur, paraissant tronquées au bout. Dessous et pattes revêtus de poils flaves, les tarses noirs.

Madagascar.

Les taches triangulaires des élytres ne permettront pas de confondre cette espèce avec aucune autre, si ce n'est avec le *triocellatus* qui présente le même caractère; mais chez le *cyclops* la tache noire du prothorax est ronde, tandis qu'elle est ovale chez l'autre; en outre la carène, qui la coupe longitudinalement, est ici beaucoup plus élevée et ne porte pas de poils flaves.

Elle fait partie de la collection de M. de Mniszech.

## ALITEUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 197.

1. A. REICHEI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 197, pl. III, fig. 1.

Cap de Bonne-Espérance.

2. A. ADSPERSUS. — HERBST, *Col.*, t. X, p. 12, pl. CLIX, fig. 6. CAND. *Monogr.*, t. I, p. 198, pl. III, fig. 10.

Cap de Bonne-Espérance.

## ALAUS.

(ESCHS). CAND. *Monogr.*, t. I, p. 211.

Les espèces de ce beau genre se sont accrues, dans ces dernières années, de nombreuses nouveautés découvertes par Mouhot et M. Wallace dans la presqu'île transgangétique, les îles Malaises et la Nouvelle-Guinée. L'Afrique et l'Australie ont apporté également leur contingent, en sorte que cette coupe générique est plus que doublée ici.

Peu satisfait des sections que j'y avais primitivement établies, j'ai cherché à en créer d'autres sur de nouvelles bases. Les formes variables de la fossette mésosternale m'avaient paru, au premier abord, répondre à ce but, mais après beaucoup de tâtonnements, j'ai dû y renoncer. Ces formes passent, en effet, insensiblement de l'une à l'autre et elles créent des rapprochements qui, d'autre part, rompent des analogies évidentes.

Après de nombreux et infructueux essais, j'ai pris le parti, comme je l'ai déjà fait pour les *Agrypnus* et les *Lacon*, de disposer les espèces d'après leur distribution géographique, arrangement qui m'a le plus satisfait. Je les ai donc réparties dans les cinq sections suivantes :

1° *Espèces africaines.*

2° *Espèces indiennes :* comprenant celles d'Europe, du continent indien, du Japon, des Philippines, de la Malaisie, des Moluques et de la Nouvelle-Guinée.

3° *Espèces australiennes :* renfermant celles du continent austral.

4° *Espèces polynésiennes :* celles des îles situées à l'est de l'Australie et de la Nouvelle-Guinée.

5° *Espèces américaines.*

A propos de cette dernière section, je ferai observer que je la forme avec les espèces, sauf une (1), de mon genre *Calais*, que je supprime.

Basé, en effet, sur l'absence des canaux protoraciques au prosternum, le genre *Calais* ne me paraît plus suffisamment justifié en présence d'autres caractères qui l'unissent étroitement aux *Alaus* de l'ancien continent. D'autre part, quelques espèces nouvellement introduites parmi ces derniers ont les mêmes canaux tellement réduits, qu'il devient évident qu'ici ce caractère, parfois important, perd beaucoup de sa valeur.

Parmi les espèces polynésiennes, il en est une chez laquelle le mésosternum affecte la forme caractéristique que l'on observe chez les *Chalcolépidiites*. Cette espèce, toutefois, se relie si étroitement, sous d'autres rapports, avec plusieurs *Alaus* des mêmes régions, que je l'ai laissée, par exception, dans ce genre. C'est une forme de transition comme on en voit partout.

### 1. — GROUPE AFRICAIN.

A Écusson court, échancré en avant ou formant deux plans, la partie antérieure plus inclinée que l'autre.
  *a* Élytres échancrées ou tronquées au bout, l'angle sutural mucroné.
    *α* Prothorax longitudinalement canaliculé. 1. *A. excavatus.*—2. *A. elegantulus.*
    *αα* Prothorax non canaliculé.
      * Pas de fascies noires sur les élytres . . . . . 3. *A. rudis.*
      ** Des fascies noires sur les élytres . . . . . 13. *A. atropos.*
  *aa* Élytres conjointement arrondies au bout.
    *α* Un tubercule à la base du prothorax devant l'écusson . . 4. *A. mœrens.*
    *αα* Pas de tubercule à la base du prothorax.
      * Élytres noires avec deux fascies blanches . . . . . 6. *A. tortrix.*
      ** Élytres sans fascies blanches.
        × Côtés du prothorax sinueux . . . . . 7. *A. sinuosicollis.*
        ×× Côtés du prothorax non sinueux . . . . . 5. *A. cerberus.*

AA Écusson oblong, déclive, ne formant qu'un plan.
  *a* Corps linéaire et subcylindrique; élytres tronquées au bout.
    *α* Deux fossettes sur le prothorax. . . . . 10. *A. hierogliphicus.*
    *αα* Pas de fossettes sur le prothorax . . . . . 9. *A. Mniszechi.*
  *aa* Corps plus ou moins aplati.

(1) *Calais ophtalmica*, qui est un véritable *Pyrophorite.*

α Élytres entières au bout; prothorax plus long que large.
* Ses bords à peu près droits et parallèles . . . . . 12. *A. caffer.*
** Ses bords arqués.
× Ses angles postérieurs carénés dans leur milieu. . 10. *A. marmoratus.*
×× Ses angles postérieurs carénés près de leur bord externe . . . . . 8. *A. detritus.*
αα Élytres tronquées; prothorax aussi large que long . . . 14. *A. Candezei.*

## 2. — GROUPE INDIEN.

A Écusson court, échancré en avant ou formant deux plans.
a Corps glabre . . . . . 15. *A. Westermanni.*
aa Corps revêtu de squamules ou de poils squamiformes.
α Surface du prothorax unie.
* Squamules blanches, cendrées ou grises.
× Mésosternum horizontal.
+ Blanc avec des taches noires.
o Élytres sillonnées . . . . . 23. *A. appendiculatus.*
oo Élytres non sillonnées . . . . . 16. *A. speciosus.*
++ Blanc sale avec des taches brunes. . . . . 17. *A. podargus.*
×× Mésosternum déclive.
+ Bords latéraux du prothorax sinueux . . . 18. *A. Senecterei.*
++ Bords latéraux du prothorax courbes.
o Vestiture blanche . . . . . 19. *A. lacteus.*
oo Vestiture cendré grisâtre . . . . . 20. *A. lophura.*
** Squamules jaunes . . . . . 22. *A. Vollenhoveni.*
αα Surface de prothorax comme corrodée . . . . . 21. *A. sculptus.*

AA Écusson oblong, déclive, généralement pentagonal, ne formant qu'un plan.
a Élytres entières et arrondies au bout.
α Élytres deux fois au moins plus longues que le prothorax.
* Deux taches arrondies noires sur le prothorax. . . . 24. *A. Parreysi.*
** Deux points noirs peu apparents sur le prothorax.
× Intervalles des stries des élytres un peu convexes . 25. *A. berus.*
×× Intervalles plats. . . . . 34. *A. anguis.*
αα Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax.
* Prothorax caréné longitudinalement au milieu. . . . 46. *A. lynceus.*
** Prothorax égal en dessus . . . . . 47. *A. nanus.*
aa Élytres tronquées ou échancrées au bout.
α Élytres présentant à la base deux tubercules ou deux crêtes longitudinales placées ou se prolongeant en arrière de l'écusson.
* Deux tubercules.
× Prothorax largement déprimé de chaque côté.
+ Tubercules placés sur le même plan que la pointe de l'écusson. . . . . 37. *A. musivatus.*
++ Tubercules placés sur un plan postérieur à l'écusson . . . . . 36. *A. cerastes.*
×× Prothorax bombé, ses côtés déclives.

+ Dessus tacheté et varié de diverses teintes.
o Antennes noires.
c Prothorax plus large que long. . . . . 30. *A. figuratus.*
cc Protorax plus long que large . . . . . 35. *A. Boreli.*
oo Antennes brun clair. . . . . 40. *A. scops.*
++ Noir, parfois le pourtour du prothorax et la base des élytres jaunes. . . . . 38. *A. regalis.*

** Deux crêtes longitudinales.
× Ces crêtes arrivant en avant jusqu'à la base des élytres . . . . . 53. *A. obliquus.*
×× Ces crêtes courtes.
+ Une grande tache latérale triangulaire sur chaque élytre . . . . . 54. *A. infumatus.*
++ Pas de taches triangulaires sur les élytres . 55. *A. angularis.*

αx Élytres plus ou moins inégales à la base, mais ne présentant pas de tubercules ou de crêtes en arrière de l'écusson.

* Prothorax sans carène longitudinale médiane.
× Une tache latérale brune ou noire bien limitée et tranchant nettement sur le fond vers le milieu des élytres.
+ Prothorax aussi large, ou à peu près, que long.
o Prothorax un peu inégal en dessus, corps très-varié en couleur. . . . . 39. *A. caprimulgus.*
oo Prothorax régulièrement bombé. . . . . 42. *A. timoriensis.*
++ Prothorax allongé.
o Écusson pentagonal acuminé en arrière.
c Tache des élytres entièrement noire . . 44. *A. Rosenbergi.*
cc Tache des élytres brune, bordée de noir en arrière . . . . . 45. *A. lateralis.*
oo Écusson non acuminé en arrière. . . . . 43. *A. scytale.*
×× Tache latérale des élytres déchiquetée et ramifiée, ou diffuse et peu apparente, ou nulle.
+ Points des stries des élytres très-gros en arrière du calus huméral.
o Une petite carène transversale vers la base du prothorax, en avant de l'écusson.
x Noir avec une multitude de taches jaunes. 28. *A. sordidus.*
xx Grisâtre avec des taches nébuleuses brunes. . . . . 26. *A. nubilus.*
oo Pas de carène transversale vers la base du prothorax. . . . . 31. *A. maculosus.*
++ Points des stries des élytres seulement un peu plus forts que les autres en arrière du calus huméral.
o Prothorax plus large que long, très-bombé. 29. *A. lactellus.*
oo Prothorax aussi ou plus long que large.
x Intervalles des stries des élytres convexes. 32. *A. cenchris.*
xx Intervalles plats, les impairs seuls parfois un peu convexes.

y Deux taches noires sur les élytres derrière l'écusson et contigu à lui . . . 33. *A. elaps.*
yy Pas de taches noires derrière l'écusson. 41. *A. nebulosus.*
** Prothorax longitudinalement caréné au milieu, ses côtés déclives à partir de la ligne médiane.
× Un simple trait obscur vers le milieu des élytres près du bord latéral . . . . . 48. *A. putridus.*
×× Une tache en ce point.
+ Prothorax sans taches ni traits noirs. . . . 27. *A. mortuus.*
++ Prothorax avec deux taches ou des traits noirs.
o Un dessin noir, formé de lignes contournées. 51. *A. Tisiphone.*
oo Deux petites taches noires.
x Tous les intervalles des stries convexes . 50. *A. larvatus.*
xx Intervalles plats.
y Téguments noirâtres indépendamment de la vestiture . . . . . 49. *A. eryx.*
yy Téguments bruns . . . . . 52. *A. haje.*

### 3. — GROUPE AUSTRALIEN.

A Élytres entières au sommet.
*a* Taille très-grande (50 mill.).
α Intervalles des stries des élytres inégalement élevés . . 56. *A. gigas.*
αα Intervalles égaux et plats. . . . . 57. *A. Mac Leayi.*
*aa* Taille moyenne ou petite (25 mill. au plus).
α Fond de la vestiture de couleur obscure.
* Antennes brunes . . . . . 60. *A. funereus.*
** Antennes noires.
× Une bande oblique noire au milieu des élytres . . 63. *A. melancholicus.*
×× Une tache latérale noire sur les élytres. . . . . 62. *A. funebris.*
αα Fond de la vestiture blanc . . . . . 65. *A. pumilus.*

AA Élytres tronquées ou échancrées au bout.
*a* Simplement tronquées avec l'angle externe de la troncature arrondi . . . . . 61. *A. suboculatus.*
*aa* Échancrées avec l'angle externe aigu.
α Élytres normalement déclives vers la base, vestiture de couleur variée . . . . . 58. *A. Gibboni.*
αα Élytres brusquement déclives à la base.
* Prothorax un peu plus long que large. . . . . 64. *A. sericeus.*
** Prothorax aussi large que long . . . . . 59. *A. prosectus.*

### 4. — GROUPE POLYNÉSIEN.

A Intervalles des stries inégalement élevés . . . . . 66. *A. farinosus.*

AA Intervalles égaux en hauteur.
*a* Une crête longitudinale à la base de chaque élytre . . . . 67. *A. Montraveli.*
*aa* Une crête oblique au même point. . . . . 68. *A. cristatus.*

### 5. — GROUPE AMÉRICAIN.

A Pas de taches ocellées sur le prothorax.
*a* Jaune avec des taches noires . . . . . 69. *A. tricolor.*
*aa* Brunâtre ou blanc et noir.
*α* Élytres échancrées au bout.
* Des fossettes sur le prothorax.
× Deux fossettes. . . . . 74. *A. nobilis.*
×× Quatre fossettes. . . . . 72. *A. primarius.*
** Pas de fossette sur le prothorax. . . . . 71. *A. patricius.*
*αα* Élytres entières au bout.
* Antennes simples dans les deux sexes. . . . . 73. *A plebejus.*
** Antennes pectinées chez le mâle.
× Écusson échancrée au bout . . . . . 74. *A. Nietoi.*
×× Écusson entier au bout . . . . . 75. *A. glaucus.*

AA Des taches ocellées sur le prothorax.
*a* Ces taches arrondies . . . . . 77. *A. lusciosus.*
*aa* Ces taches oblongues.
*α* Grandes.
* Largement cerclées de blanc . . . . . 76. *A. oculatus.*
** Étroitement cerclées de blanc . . . . . 78. *A. melanops.*
*αα* Petites . . . . . 79. *A. myops.*

---

### 1. — GROUPE AFRICAIN.

1. A. EXCAVATUS. — FABR., *System. Eleuth.*, t. II, p. 230. — A. *senegalensis.* CAND. *Monogr.*, t. I, p. 220, pl. IV, fig. 14.

Sénégal, Haute-Égypte, Cafrerie, etc.

2. A. ELEGANTULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 220.

Guinée.

3. A. RUDIS. CAND. *Monogr.*, t. I, p. 221.

Cafrerie.

4. A. MOERENS. — GERM. *Zeitschr.*, t. II, p. 254. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 222, pl. IV, fig. 17.

Cafrerie et Cap.

5. A. CERBERUS. — *Niger, squamulis albido-cinereis dense vestitus, maculis nigris irroratus; prothorace latitudine paulo longiore, lateribus subparallelo, æqualiter convexo, angulis posticis abrupte divaricatis, carinatis; elytris thoracis latitudine, haud duplo longioribus, apice integris, punctato-substriatis.*

Long. 20 mill., lat. 6 $^1/_2$ mill.

Noir, revêtu densément de poils squamiformes d'un cendré blanchâtre avec quelques petites taches noires, irrégulières, disséminées sur le prothorax et les élytres, parmi lesquelles une plus grande vers le milieu du bord latéral de ces dernières. Prothorax un peu plus long que large, les bords latéraux faiblement arqués et subparallèles, son disque assez fortement et régulièrement convexe, semé de points d'inégale grosseur visibles seulement là où la vestiture est enlevée, les plus petits donnant naissance aux écailles cendrées, les plus gros, disséminés, aux écailles noires, sans tubercule au milieu du bord postérieur, les angles correspondants brusquement divergents, carénés. Écusson subrectangulaire, sa moitié postérieure plus élevée que l'antérieure. Élytres de la largeur du prothorax, moins de deux fois plus longues, arrondies, entières au bout, finement ponctuées-striées, dessous et pattes uniformément revêtus d'une couche dense de poils subsquamiformes d'un cendré blanchâtre.

Dahomey.

Collection de M. Perroud, de Lyon.

6. A. TORTRIX. — *Elongatus niger, squamulis nigris albidisque vestitus; prothorace latitudine longiore, convexo, punctato, lateribus subsinuato; elytris punctato-striatis, fasciis duabus albis, apice integris.*

Long. 33 mill., lat. 9 mill.

Allongé, noir, revêtu de très-petites squamules noires et blanches, les premières constituant la couleur du fond, les secondes disposées par grandes taches sur les côtés du prothorax

et formant deux larges fascies sur les élytres où elles couvrent également l'angle scutellaire. Antennes fortement dentées en scie (♂). Prothorax plus long que large, rétréci en avant avec ses côtés un peu arqués et subsinueux, convexe, assez densément ponctué, ses angles postérieurs divergents et carénés. Écusson oblong, sa moitié antérieure formant un plan plus incliné que sa moitié postérieure. Élytres allongées, atténuées en arrière, entières et conjointement arrondies au bout, l'angle sutural un peu saillant, ponctuées-striées, les intervalles un peu convexes en arrière. Dessous maculé de blanc comme le dessus.

Natal.

Le seul exemplaire que j'aie vu et qui fait partie de la collection de M. Janson est défloré, en sorte que je n'ai pu déterminer plus exactement que je ne le dis ci-dessus la disposition des couleurs. Outre celle-ci, du reste, qui est assez caractéristique, la forme plus allongée du prothorax le distingue du *moerens*.

7. A. SINUOSICOLLIS. — CAST. in SILBERM. *Rev.*, t. IV, p. 9. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 222.

Sénégal; Guinée.

8. A. DETRITUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 224.

Natal.

9. A. MNISZECHI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 224, pl. IV, fig. 13.

Sénégal ; Guinée.

10. A. HIEROGLYPHICUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 225.

Sénégal.

11. A. MARMORATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 226, pl. IV, fig. 12.

Sénégal.

12. A. CAFFER. — BOHEM. *Ins. Caffr.*, t., II, p. 390. — CAND *Monogr.*, t. I, p. 227.

13. A. ATROPOS. — *Scutello plano, oblongo quadrato, elytrorum angulo suturali submucronato; infra niger, supra rufo-brunneus, flavescenti-tomentosus, prothoracis disco denudato; hujus maculis duabus ovatis, elytrorumque fasciis duabus, altera post medium, altera ante apicem sita, atro tomentosis.*

Long. 18 mill (♀).

GERSTAEKER. *Beitr. zur Insekt. Fauna v. Zanzibar,* part. III, 1871, p. 53.

Zanzibar; See Jipe.

14. A. CANDEZEI. — *Fusco-niger, squamulis fuscis griseisque variegatus; prothorace latitudine haud longiore, parum convexo, basi apiceque angulato, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris striis tenuibus fortiter punctatis, postice attenuatis, apice truncatis.*

Long. 29 mill., lat. 9 mill.

MURR. *Ann. and Magaz. of Nat. Histor.*

Calabar.

II. — GROUPE INDIEN.

15. A. WESTERMANNI. — CAND. *Monogr.,* t. I, p. 216, pl. IV, fig. 10.

Java.

16. A. SPECIOSUS. — LINN. *System. Nat.*, t. II, p. 652, 2. — CAND. *Monogr.,* t. I, p. 216.

Ceylan.

17. A. PODARGUS. — *Niger, squamulis oblongis cinereis brunneisque densissime tectus; prothorace latitudine vix longiore, apice a medio leviter angustato; elytris apice truncatis, macula laterali brunnea.*

Long. 30 mill., lat. 10 mill.

Forme du *speciosus* mais plus petit, très-densément revêtu de squamules allongées, d'un blanc brunâtre sale, parmi les-

quelles d'autres, brunes, formant des points et de petites taches sur le corselet et les élytres et, sur ces dernières, une grande tache latérale et une fascie interrompue vers le sommet. Antennes brunâtres. Prothorax un peu plus long que large, un peu rétréci en avant à partir du milieu, convexe, densément et inégalement ponctué, ce qui n'est visible que là où les écailles sont enlevées, ses angles postérieurs divergents et carénés. Écusson court, échancré et bidenté en avant, arrondi en arrière. Élytres convexes, échancrées au bout, l'angle interne de l'échancrure aigu, l'externe arrondi, légèrement strié, les stries ponctuées, les intervalles plats, le troisième formant une crête oblique vers la base. Dessous et pattes revêtus comme le dessus. Fossette mésosternale à bords courts, horizontaux, élevés au niveau du métasternum, légèrement divergents.

Luçon. (Coll. Jans.)

18. A. Senecterei. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 217.

Dekkan.

19. A. lacteus. — Fabr. *Syst. Eleuth.*, t. II, p. 250, 44. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 218, pl. IV, fig. 9.

Bornéo; Sumatra.

20. A. lophura. — *Niger, pilis squamiformibus cervinis cervino-cinnamomeisque confertissimis obductus, plagis minutis fuscis albicantibusque adspersus; prothorace latitudine sublongiore, disco inæquali, postice medio costato; elytris brevibus, apice emarginatis; corpore subtus albicante.*

Long. 26-28 mill., lat. 10-11 mill.

Cand., *Mém. Acad. Br.*, 1865, p. 15.

De la forme du *lacteus* à côté duquel il doit être placé, mais bien distinct par plusieurs caractères essentiels. Noir, très-densément recouvert de poils squamiformes courts, d'un gris jaunâtre plus ou moins clair, parsemé d'une multitude de petites taches plus obscures et d'autres d'une teinte blanchâtre. Front excavé

en avant. Antennes très-courtes. Prothorax à peine plus long que large, rétréci en avant à partir du milieu, son disque inégal, impressionné, et présentant sur la ligne médiane une côte large et de plus en plus forte à mesure qu'elle se rapproche de la base, ses angles postérieurs divergents au bout et carénés. Écusson arrondi, échancré et bidenté en avant. Élytres deux fois plus longues que le prothorax, arquées sur les côtés depuis la base, fortement échancrées à l'extrémité, portant à la base une petite arête oblique limitant de chaque côté une large fossette scutellaire, marquées de séries de points. Dessous du corps et pattes recouverts d'un enduit écailleux blanchâtre.

Cambodge; presqu'île de Malacca et Bornéo.

21. A. SCULPTUS. — WESTW. *Cab. of or. Entom.*, p. 72, pl. XXXV, fig. 8. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 219.

Hindoustan; Kasyah Hills.

22. A. VOLLENHOVENI. — *Niger, pilis squamiformibus fulvis confertissime obductus; prothorace latitudine longiore, lateribus parallelo; punctis duobus nigris notato; elytris ultra medium parallelis, apice truncatis; macula media, rotundata, in utroque, nigra; subtus flavescenti squamosus.*

Long. 26 mill., lat. 7 mill.

CAND., *Mém. Acad. Br.*, 1865, p. 14.

Noir, couvert de poils squamiformes d'un jaune fauve qui masquent totalement la couleur du fond, le prothorax marqué sur le disque de deux points noirs, les élytres présentant chacune vers leur milieu une grande tache irrégulièrement arrondie, noire, veloutée. Antennes courtes, noires. Front triangulairement excavé. Prothorax un peu plus long que large, presque parallèle sur les côtés, bombé, ses angles postérieurs divergents, vaguement carénés, le milieu du bord postérieur portant un tubercule longitudinal. Écusson arrondi en arrière, profondément échancré et bidenté en avant, concave. Élytres de la largeur du prothorax,

parallèles jusqu'au delà du milieu, tronquées au bout, submucronées à l'angle apical, finement ponctuées-striées, les intervalles très-faiblement convexes, le troisième uni au cinquième à la base et y formant un faible tubercule. Dessous et pattes revêtus de poils squamiformes blanchâtres.

Célèbes.

Cette belle espèce se trouve au Musée de Leyde et dans la collection de M. Janson.

23. A. APPENDICULATUS.— *Niger, pilis subsquamiformibus albis tectus, nigro-maculatus et vittatus; prothorace latitudine paulo longiore, depresso, angulis posticis latis, divaricatis, carinatis; elytris sulcatis, interstitiis alternis elevatioribus, apice mucronatis; mesosterno prominente.*

Long. 25-35 mill., lat. 7-10 mill.

*Elater appendiculatus.* HERB. *Käf.*, t. X, p. 330, pl. CLVII, fig. 9.

*Elater farinosus.* OL. *Journ. Hist. nat.*, 1792, p. 265 ?

Entièrement revêtu de poils squamiformes assez allongés, blancs, avec une tache médiane et des raies longitudinales noires sur les élytres. Cette espèce ne ressemble à aucune autre et est fort reconnaissable. Son écusson court, canaliculé, bidenté en avant, son mésosternum à bords élevés le rapprochent davantage des premières espèces de cette section que des dernières; sous d'autres rapports il tient de près aux *Alaus* polynésiens.

Céram et Amboine.

La description et la figure qu'Olivier donne de son *E. farinosus*, qu'il indique comme de l'Afrique équinoxiale, se rapportent bien certainement à un *Alaus* et c'est à celui-ci qu'elles conviennent le mieux, mais je n'ai aucune certitude à cet égard.

24. A. PARREYSI. — STEV. *Bull. de Moscou*, t. II, pl. II, fig. 1. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 223.

Crimée, Asie Mineure orientale, Perse.

25. A. Berus. — *Niger, pilis squamiformibus griseo-fuscis, cinereis, nigrisque confertis, maculatim vestitus; prothorace latitudine longiore, basin versus coarctato, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris punctato-striatis, utrinque juxta scutellum foveatis, apice integris.*

Long. 22-30 mill., lat. $6^3/_4$-10 mill.

Cand. *Mém. Acad. Brux.*, 1865, t. XVII, p. 15.

Noirâtre, densément revêtu de poils squamiformes grisâtres, cendrés et noirs entremêlés, les derniers formant une multitude de petites taches, le ton général assez foncé. Antennes noires. Front triangulairement impressionné en avant. Prothorax plus long que large, rétréci vers la base, arqué sur les côtés, inégalement ponctué, longitudinalement élevé au milieu, biimpressionné, ses angles postérieurs aplatis, très-divergents, carénés le long de leur bord externe. Écusson très-incliné. Élytres curvilinéairement rétrécies d'avant en arrière, profondément fovéolées de chaque côté de l'écusson, la fovéole revêtue de squamules noires, ponctuées-striées, les intervalles un peu convexes, surtout les impairs, l'extrémité entière.

Dessous et pattes revêtus de squamules grises.

Japon méridional.

26. A. nubilus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 230.

Java.

27. A. mortuus. — Thoms. *Rev. Zool.*, 1856, p. 473, pl. XXIV, fig. 1.

*A. torquilla.* — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 239.

Bornéo.

28. A. sordidus. — Westw. *Cab. of or. Entom.*, p. 72, pl. XXXV, fig. 9. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 251.

Ceylan.

29. A. LACTELLUS. — *Fusco-niger, squamulis albidis cinereisque tectus, brunneo variegatus; prothorace tumido, nigro bipunctato, latitudine haud longiore, lateribus arcuato, angulis, posticis divaricatis, leviter carinatis; elytris convexis, brevibus, striis remote punctatis, apice truncatis; subtus brunneus.*

Long. 10-15 mill., lat. 3-5 mill.

Forme du *lacteus*, mais plus petit, et l'écusson autrement fait. Brunâtre, revêtu densément d'écailles blanchâtres, les élytres ornées de dessins nuageux bruns avec quelques petites taches plus foncées, le prothorax piqueté et bipunctué de noirâtre. Front assez grand, plat. Prothorax aussi large que long, arrondi sur les côtés, très-bombé, ponctué, ses angles postérieurs plats, divergents et faiblement carénés. Écusson ovale oblong, plat, déclive. Élytres courtes, très-bombées, atténuées au tiers postérieur, échancrées au bout, marquées de lignes de points peu serrés. Dessous et pattes revêtus d'écailles brunes.

Bornéo.

Un exemplaire de Sarawack, dans la collection Janson, provenant des chasses de M. Wallace.

Un second, mesurant le minimum de la taille indiquée ci-dessus, pris par M. Doria dans la même localité; de la collection du Musée de Gênes.

30. A. FIGURATUS. — *Fusco-niger, squamulis albidis, brunneis fuscisque dense vestitus; antennis nigris; prothorace longitudine paulo latiore, antice paulo dilatato, convexo; angulis posticis subdivaricatis, carinatis; elytris brevibus, basi tuberculatis, apice oblique emarginatis.*

Long. 15 mill., lat. 5 mill.

De la forme également du *lacteus* et très-voisin du précédent, dont il diffère surtout par ses élytres tuberculées à la base. Brunâtre, densément revêtu de squamules blanches brunes et brun foncé, les premières disposées surtout à la partie antérieure

du prothorax, les secondes mêlées avec celles-ci pour former des dessins nuageux, les troisièmes formant une tache transversale près du bord antérieur et deux points sur le disque du prothorax et quelques taches sur les élytres. Antennes noires. Prothorax un peu plus large que long, très-bombé, ses angles postérieurs un peu divergents, carénés, longitudinalement élevé au devant de l'écusson, élévation teintée de brun. Élytres courtes, bituberculeuses à la base, obliquement échancrées au bout, assez convexes et striées-ponctuées. Dessous et pattes gris.

Java et Malacca. (Coll. Jans. Cand.)

31. A MACULOSUS. — *Fuscus, squamulis minutis brunneis flavisque variegatus; fronte antrorsum concava; prothorace latitudine longiore, lateribus parallelo, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris striato-punctatis, apice oblique emarginatis.*

Long. 25 mill., lat. 7 mill.

Forme du *nubilus*, mais beaucoup plus petit, le prothorax plus allongé. Brunâtre, revêtu de petites écailles brunes parmi lesquelles d'autres, plus petites encore, de couleur jaune, forment une multitude de mouchetures plus ou moins confluentes. Front concave en avant. Prothorax plus long que large, parallèle sur les côtés en arrière, curvilinéairement rétréci au sommet, égal en dessus, convexe, ponctué, ses angles postérieurs divergents et carénés. Écusson ovale, placé dans une fossette assez profonde. Élytres de la largeur du prothorax, atténuées à partir du tiers antérieur, striées-ponctuées, présentant à la base un faible tubercule entre l'épaule et l'écusson, leur sommet obliquement échancré.

Bornéo : Sarawak.

Un seul exemplaire trouvé par M. Wallace et qui fait partie de la collection de M. Janson.

32. A. CENCHRIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 231.

Birmanie; Laos.

33. A. ELAPS. — *Fusco-niger, squamulis minutis fuscis, cinereis, griseis pallidisque confertis, variegatus; prothorace latitudine paulo longiore, valde convexo, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris striato-punctatis, basi utrinque longitrorsum elevatis, apice emarginatis; episterno vitta denudata grosse punctata.*

Long. 18 mill., lat. 6 mill.

Petit et convexe, noirâtre, densément revêtu de squamules allongées et piliformes grisâtres ou jaunâtres, parmi lesquelles de petites taches de couleur claire et d'autres d'un noir brun forment un dessin varié, les dernières figurant sur le prothorax deux petites taches oblongues et, sur les élytres, deux petites taches derrière l'écusson, deux taches latérales déchiquetées et mal définies et une sorte de fascie ondulée et interrompue entre cette tache et l'extrémité. Prothorax un peu plus long que large, plus étroit à la base qu'au milieu, régulièrement arqué sur les côtés, très-convexe, marqués de gros points inégalement distribués entre lesquels on en remarque de plus petits (aux endroits dénudés), les côtés présentant une légère impression arquée, son milieu élevé vers la base, ses angles postérieurs divergents, carénés. Élytres parallèles jusqu'au milieu, striées-ponctuées, échancrées au bout, présentant entre l'écusson et l'épaule une élevure longitudinale peu accusée. Flancs du prothorax présentant une bande longitudinale médiane, dépourvue de squamules et marquée de très-gros points.

Laos; Bornéo; Java.

Collections Janson, Saunders, Candèze et Musée de Leyde. L'exemplaire de cette dernière collection qui provient de la partie orientale de Java (volcan Ardjoeno), est d'une teinte générale plu sjaune que les autres.

34. A. ANGUIS. — *Niger, pilis squamiformibus albidis dense vestitus, fusco-variegatus; prothorace latitudine paulo longiore, apice parum angustato, lateribus arcuato, valde convexo, postice*

*carina media, brevi, transversa; elytris ultra medium attenuatis, apice rotundatis, punctato-striatis.*

Long. 20 mill., lat. 6 mill.

Cand. *Mém. Acad. Brux.*, 1865, p. 15.

Subcylindrique, parallèle, noir, revêtu densément de poils squamiformes, blancs, fuligineux et noirs, les premiers constituant le fond, les seconds formant des taches diffuses, plus abondants vers la ligne médiane du prothorax, dans la région médiane latérale et vers le sommet des élytres, les troisièmes groupés en petites taches ou linéoles bien limitées et disposées ainsi qu'il suit : des points disséminés sur le prothorax parmi lesquels deux discoïdaux plus grands, des linéoles vers la partie moyenne des élytres entourant postérieurement la tache fuligineuse située en cet endroit, enfin quatre petites taches placées sur le bord externe à l'extrémité des mêmes organes. Antennes très-courtes, obscures, les trois premiers articles seuls portant des poils blanchâtres. Prothorax un peu plus long que large, élargi dans son milieu, peu rétréci au sommet, arqué sur les côtés, très-convexe dans les deux sens, couvert de points fins parmi lesquels on en remarque de plus gros inégalement disséminés, (ce qui ne peut se voir qu'aux endroits dénudés), portant en arrière une petite carène transversale. Écusson en pentagone allongé, plan, déclive. Élytres de la largeur du prothorax et conservant cette largeur à peu près jusqu'au tiers postérieur, curvilinéairement rétrécies à partir de ce point, arrondies au bout, striées, les stries marquées de points espacés, les intervalles subconvexes. Dessous et pattes couverts de poils blancs et fuligineux.

Laos.

Collections de MM. de Mniszech et Janson.

35. A. Borelli. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 229.

Malaisie et Moluques.

36. A. CERASTES. — *Fusco-niger, squamulis nigris, fuliginosis pallidisque confertissime variegatus; prothorace latitudine paulo longiore; a medio angustato, depresso, medio longitrorsum, elevato, angulis posticis carinatis, carina submarginali; elytris basi tuberculis validis acutis, punctato-striatis, apice late emarginato-truncatis.*

Long. 20-28 mill., lat., 6 $^1/_2$-9.

CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 16.

Voisin de l'*A. Boreli*, mais cependant distinct par quelques caractères importants. Le système de coloration est, à peu de chose près, le même. Le prothorax est plus déprimé sur ses côtés, un peu plus atténué en avant, le bord latéral formant un coude léger vers le milieu; sur la ligne médiane on observe une légère carène qui se termine en arrière par un tubercule moins fort que chez le *Boreli;* les angles postérieurs portent une carène très-rapprochée du bord externe et plus près de ce bord que d'une ligne fictive formant l'axe de l'angle, tandis que chez le *Boreli* cette carène est plus rapprochée de la ligne en question que du bord externe. Enfin la troncature de l'extrémité des élytres est ici beaucoup plus large, au point que la distance entre ses angles externes est de trois à quatre millimètres, suivant la taille des individus, mesure qui dépasse de plus d'un tiers celle des points correspondants de l'autre espèce.

Batchian; Nouvelle-Guinée.

Elle a été envoyée en Europe par M. Wallace dans ces dernières années. Je l'ai vue dans les collections de MM. de Mniszech et Janson.

37. A. MUSIVATUS. — *Bruneo-niger, squamulis nigris, brunneis, fuliginosis cinereisque variegatim obductus; prothorace latitudine longiore, medio leviter dilatato, longitrorsum utrinque late subsulcato et inaequali, postice transverse carinato; elytris striato-punctatis, apice emarginatis.*

Long. 28 mill., lat. 8 mill.

CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 16.

Voisin également du *Boreli;* même système de coloration sauf les taches latérales obscures des élytres qui sont ici beaucoup plus grandes. Prothorax plus long que large, longitudinalement élevé au milieu, déprimé, inégal et comme largement et longitudinalement impressionné de chaque côté, la côte médiane terminée en arrière, à deux millimètres du bord postérieur par une petite crête transversale. Élytres présentant à la base deux petits tubercules, beaucoup moins forts et autrement placés que chez les *Boreli* et *cerastes*. Chez ce dernier ils sont acuminés, rapprochés et placés de telle sorte qu'une ligne qui les réunirait passerait en arrière de l'écusson; ici ils sont espacés, plus rapprochés de la base des élytres et la ligne qui les réunirait couperait la pointe de l'écusson.

Cette espèce est de Java. Je l'ai reçue en communication de M. Mäklin. Elle fait partie du Musée de Helsingfors.

38. A. REGALIS. — *Niger, pilis squamiformibus atris dense et opace vestitus; prothorace latitudine longiore, apice parum angustato, pilis fulvis circumcincto; elytris basi fulvo-plagiatis, ultra basin fulvo-nebulosis, apice emarginatis.*

Long. 23 mill., lat. 7 $^1/_2$ mill.

CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 16.

Var. *a. Prothoracis elytrorumque basi flavo-pilosa.*

Var. *b. Corpus totum atrum, opacum.*

Oblong, subcylindrique, noir, très-densément recouvert de poils squamiformes noirs qui le rendent mat, le prothorax orné d'une bordure de poils fauves, ceux-ci couvrant en outre la base des élytres et formant quelques petites taches diffuses, peu apparentes, dans leur première moitié. Front concave. Antennes courtes, noires. Prothorax allongé, légèrement rétréci en avant à partir du milieu, bombé, fortement et irrégulièrement ponctué, ses angles postérieurs divergents et carénés, tuberculeux au milieu près du bord basilaire. Écusson pentagonal, déclive. Élytres de la largeur du prothorax et deux fois plus longues,

parallèles jusqu'au milieu, atténuées au delà, échancrées au bout, bituberculeuses à la base derrière l'écusson, fortement déclives en avant de ces tubercules, marquées de séries de points espacés avec les intervalles faiblement convexes. Dessous et pattes entièrement noirs.

Amboine.

La variété *a* a les portions déclives, correspondantes à la base du prothorax et des élytres couvertes de poils d'un jaune flave clair; elle est de Bourou. La variété *b*, qui provient de Ceram, a tout le corps d'un noir mat.

De nombreux spécimens de cette belle espèce ont été envoyés en Europe par M. Wallace; elle est actuellement assez répandue dans les collections.

39. A. CAPRIMULGUS. — *Brunneo-niger, squamulis minutissimis brunneis, ferrugineis pallidisque confertissimis concinne variegatus; prothorace latitudine haud longiore, disco inaequali, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris punctato-striatis, apice emarginatis.*

Long. 30 mill., lat. 9 mill.

Brunâtre, agréablement orné de petites squamules très-serrées d'un brun ferrugineux clair et foncé avec toutes les teintes intermédiaires, et d'autres blanchâtres, formant un dessin très-compliqué sur lequel se détachent deux grandes taches brunes latérales sur les élytres. Front carré, impressionné. Antennes brunes. Prothorax aussi large que long, arqué et subsinueux sur les côtés, son disque convexe et inégal offrant en arrière, au milieu, une petite crête transversale, ses angles postérieurs divergents et carénés. Écusson élargi en arrière, plat, déclive. Élytres de la largeur du prothorax, atténuées dans leur moitié postérieure, impressionnées à la base de chaque côté de l'écusson, marquées de séries de points, leur extrémité transversalement échancrée. Dessous et pattes revêtus d'écailles brunes.

Bornéo; Sarawak.

Belle espèce dont les teintes rappellent le plumage de l'Engoulevent (*Caprimulgus europeus*). (Coll. Jans.)

40. A. SCOPS. — *Fuscus, squamulis confertissimis albis, fulvis brunneisque maculatim concinne vestitus; antennis brunneis; prothorace latitudine longiore, convexo, ante scutellum tuberculato, angulis posticis parum divaricatis, valde carinatis; elytris striato-punctatis, basi tuberculatis, apice emarginatis spinosis.*

Long. 20 mill., lat. 6 mill.

Brunâtre, élégamment revêtu de squamules piliformes blanches, brunes et noirâtres, les deux premières couleurs formant des taches fondues l'une dans l'autre, la dernière se détachant en nombreuses mouchetures, dont les plus grandes s'observent, sur les élytres, derrière l'écusson, vers le milieu du bord latéral, au tiers antérieur et au quart postérieur près de la suture, enfin, sur les épines externes de l'extrémité. Antennes d'un brun clair. Prothorax plus long que large, peu arqué sur les côtés, assez bombé, tuberculeux en arrière devant l'écusson, ses angles postérieurs peu divergents, fortement carénés. Élytres de la largeur du prothorax, striées-ponctuées, présentant deux tubercules acuminés derrière la fossette scutellaire, leur extrémité fortement échancrée, l'angle externe de l'échancrure épineux. Dessous et pattes grisâtres.

Nouvelle-Guinée.

Cette jolie espèce qui rappelle tout à fait, par ses nuances, le plumage de certains *scops*, a été découverte à Dorey par M. Wallace. Je l'ai vue dans la collection de M. Janson.

41. A. NEBULOSUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 232, 24:

Manille.

Les élytres sont parfois tronquées au bout chez cette espèce.

42. A. TIMORIENSIS. — *Fuscus, griseo-vestitus, prothorace obscuro-bipunctato, elytris macula media marginali fusca; prothorace latitudine haud longiore, convexo, angulis posticis parum divaricatis, obsolete carinatis; elytris ultra medium paulo dila-*

*tatis, striato-punctatis, basi, abrupte declivi, inaequalibus, apice truncatis, angulo suturali mucronato.*

Long. 24 mill., lat. 7 mill.

Noirâtre, densément revêtu de poils squamiformes d'un gris brun clair sur lesquels se détachent quelques mouchetures plus foncées, peu apparentes, et en outre deux points obscurs sur le prothorax et deux taches assez grandes, triangulaires, contiguës au bord latéral vers le milieu de la longueur des élytres, bien limitées, presque noires. Prothorax aussi large que long, médiocrement arqué sur les côtés, assez convexe, marqué de gros points, ses angles postérieurs peu divergents, peu carénés. Écusson très-déclive. Élytres un peu élargies au delà du milieu, très-déclives à la base, la déclivité portant des élevures et des impressions, l'extrémité tronquée, l'angle interne de la troncature mucroné.

Timor.

Un ♂ dans la collection du Musée de Leyde.

43. A. SCYTALE. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 228.

Philippines et Célèbes.

44. A. ROSENBERGI. — *Elongatus, niger, albido seu flavo vestitus, nigro irroratus, macula magna versus medium elytrorum; prothorace elongato, inaequaliter grosse punctato, angulis posticis divaricatis, carinatis; scutello pentagonali; elytris striato-punctatis, postice emarginatis.*

Long. 25-30 mill., lat. 7-7 $^1/_2$ mill.

Allongé, noir, revêtu de poils squamiformes blancs ou jaunâtres avec de petites taches noires et deux très-grandes de même couleur, veloutées, vers le milieu des élytres, d'autant plus marquées qu'elles se détachent sur un fond blanc. Antennes noires. Prothorax allongé, peu arqué sur les côtés, inégalement ponctué, ses angles postérieurs peu divergents, carénés. Écusson

pentagonal, son bord postérieur anguleux au milieu. Élytres parallèles jusqu'au milieu, tuberculeuses à la base entre l'épaule et l'écusson, échancrées au bout. Dessous et pattes d'un brun clair.

Célèbes.

Cette espèce ressemble beaucoup au *scytale*, mais on l'en distinguera toujours, outre sa taille beaucoup plus grande, à son écusson, dont le bord postérieur est anguleux, tandis qu'il est droit chez le précédent.

Musée de Leyde et coll. Janson.

45. A. LATERALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 227, pl. IV, fig. 16.

Ceylan : Colombo.

46. A. LYNCEUS. — *Fusco-niger, squamulis minutis brunneis griseisque variegatus; prothorace latitudine longiore, medio longitrorsum elevato; elytris brevibus, punctato-striatis, apice integris.*

Long. 17 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Assez petit, épais, brun foncé, revêtu d'écailles blanchâtres, grises et brun foncé, les dernières formant deux taches arrondies sur le prothorax, deux de même forme assez grandes sur les côtés des élytres et quelques-unes allongées vers l'extrémité; les premières dominantes autour des taches brunes du prothorax, de façon à imiter vaguement une face féline. Front excavé. Prothorax plus long que large, rétréci en avant des angles postérieurs qui sont aplatis, divergents et carénés, longitudinalement élevé au milieu, surtout en arrière, les côtés déclives. Écusson très-incliné. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, ponctuées-striées, leur partie antérieure excavée pour former une fossette scutellaire, leur extrémité entière.

Inde boréale. (Coll. Jans.)

47. A. NANUS. — *Angustus, parallelus, brunneus, minus*

*dense squamulosus; antennis nigris articulis latis; prothorace latitudine sesqui longiore, angulis posticis carinatis, elytris brevibus, punctato-striatis, apice integris.*

Long. 12 mill., lat. 5 mill.

La plus petite espèce. Étroit et parallèle, brun, rougeâtre, revêtu de squamules blanchâtres peu serrées, avec de petites taches noires disséminées, parmi lesquelles une plus grande, au bord latéral des élytres vers le milieu. Front grand. Antennes noires, leurs articles larges. Prothorax une demi-fois plus long que large, droit et parallèle sur les côtés, convexe, ponctué, ses angles postérieurs petits, aigus, non divergents, carénés. Écusson en pentagone allongé, déclive. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, entières ou à peine visiblement échancrées au bout, ponctuées-striées, les intervalles convexes et pointillés. Dessous et pattes de la couleur du dessus. Canaux prothoraciques largement ouverts au sommet.

Java : Sourabaia, au pied du volcan Ardjoeno.

Cette espèce, remarquable par sa petite taille, fait partie du Musée de Leyde.

48. A. PUTRIDUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 223, pl. IV, fig. 15.

Java.

49. A. ERYX. — *Fuscus, squamulis fuscis, brunneis, fulvis albidisque variegatus, punctis duobus prothoracis maculaque marginali ovata elytrorum nigris, velutinis; prothorace latitudine longiore, parallelo, medio carinato, utrinque declivi, angulis posticis tenuibus, acutis, carinatis; elytris striato-punctatis, apice anguste emarginatis.*

Long. 25 mill., lat. 7 $^1/_4$ mill.

Noirâtre, densément revêtu de squamules brun foncé, brun clair, fauves et blanches entremêlées, les dernières formant de petites taches alternant avec des noires sur les intervalles im-

paires des stries des élytres, le prothorax présentant deux petites taches noires oblongues, aréolées de blanc, les élytres en présentant une assez grande, également oblongue, noire et veloutée, contre leur bord latéral vers le milieu de leur longueur. Prothorax plus long que large, un peu élargi en avant, ses bords peu arqués, élevé longitudinalement en carène dans toute sa longueur au milieu, sa surface déclive de chaque côté, ses angles postérieurs assez grêles, recourbés en dehors, aigus, carénés. Écusson déclive, allongé, pentagonal, très-acuminé en arrière. Élytres striées-ponctuées, les lignes de points réunies par paires à la base par un petit sillon courbe, l'extrémité étroitement échancrée. Dessous varié de gris de diverses teintes.

Laos.

Trouvé par Mouhot. (Coll. Jans.)

50. A. LARVATUS. — *Fuscus, squamulis minutissimis griseis, cinereis fuscisque variegatus, macula laterali elytrorum oblonga, fusca, velutina; prothorace latitudine longiore, longitrorsum medio carinato, angulis posticis tenuibus divaricatis, carinatis; scutello pentagonali; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis convexis, apice conjunctim late emarginatis.*

Long. 28 mill., lat. 8 mill.

Noirâtre, revêtu de petites squamules très-denses grises, cendrées, noirâtres, les dernières formant deux points sur le prothorax, deux grandes taches oblongues, contiguës au bord externe des élytres, vers leur milieu, et une sorte de fascie constituée par une huitaine de lignes courtes, longitudinales, avant le sommet; dans le large sillon transversal qui sépare le prothorax des élytres ainsi que sur l'écusson, les écailles affectent une teinte jaunâtre. Antennes noires. Prothorax plus large que long, le milieu longitudinalement élevé en carène, avec les parties latérales très-déclives de chaque côté et planes, ses bords latéraux tranchants et légèrement coudés au milieu, ses angles postérieurs grêles, très-aigus, très-divergents, carénés, au devant

de l'écusson une petite crête transversale. Écusson pentagonal, allongé. Élytres plus larges que le prothorax, atténuées à partir des épaules, déclives et inégales de chaque côté de l'écusson, ponctuées-striées avec les intervalles convexes, l'extrémité largement échancrée. Dessous brun, les flancs du prothorax portant une raie longitudinale obscure fortement ponctuée, toutes les cuisses présentant près du sommet une petite tache noirâtre.

Chine : Shang-Haï?

Un exemplaire de cette belle espèce qui, par la forte carène du prothorax, se rapproche, comme la précédente, du *putridus*, fait partie de la collection de M. Janson. Elle se distingue par la convexité des intervalles des stries des élytres, caractère rare chez les *Alaus*.

51. A. TISIPHONE. — *Fuscus, squamulis minutissimis griseis, brunneis fuscisque variegatus, macula laterali elytrorum nigra velutina; prothorace latitudine longiore, longitrorsum medio carinato, angulis posticis tenuibus, extrorsum flexis, carinatis; scutello oblongo, postice rotundato; elytris prothorace latioribus, punctato-striatis, interstitiis imparibus convexis, apice conjunctim late emarginatis.*

Long. 28 mill., lat. 8 mill.

Noirâtre, revêtu de petites écailles très-denses, grises, cendrées et noirâtres; les dernières formant quelques lignes contournées sur le prothorax, et, sur les élytres, de petites taches, principalement à la base et en arrière, outre une grande de forme irrégulièrement quadrangulaire placée vers le milieu du bord latéral. Antennes noires. Prothorax plus long que large, assez fortement rétréci en avant des angles postérieurs, arqué sur les côtés, fortement et longitudinalement élevé au milieu avec ses faces latérales déclives et planes, ses angles postérieurs fortement recourbés en dehors, grêles, aigus au bout, carénés. Écusson oblong, déclive, largement arrondi en arrière. Élytres plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, inégales de chaque

côté de l'écusson, striées-ponctuées avec les intervalles impairs, surtout le troisième, sensiblement convexes, les autres plats, l'extrémité largement échancrée. Dessous et pattes brunâtres.

Ceylan. (Coll. Jans.)

52. A. HAJE. — *Brunneus, griseo cinereoque variegatus punctis duobus prothoracis maculaque laterali elytrorum ultra medium nigris; prothorace latitudine longiore, parallelo, medio longitrorsum elevato, carinato, angulis posticis divaricatis, tenuibus, vix carinatis; scutello oblongo, pentagonali; elytris brevibus, striato-punctatis, postice emarginatis.*

Long. 20 mill., lat. 5 mill.

Plus petit que les précédents et proportionnellement plus étroit, brun, la vestiture écailleuse ayant les teintes habituelles mais plus mêlées, le prothorax et les élytres présentant, le premier, deux points discoïdaux noirs, les secondes, une tache oblongue de même couleur située de chaque côté près du bord latéral, mais sans l'atteindre, un peu au delà du milieu de leur longueur. Antennes brunes. Prothorax allongé, parallèle, longitudinalement élevé au milieu avec une fine carène lisse médiane, ses côtés déclives, ses angles postérieurs grêles, divergents, aigus, à peine carénés. Écusson oblong, pentagonal. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, marquées de lignes de gros points, les intervalles faiblement convexes au bout, l'extrémité échancrée. Dessous brun comme le dessus, le prosternum, le métasternum, les hanches postérieures et le milieu de l'abdomen revêtus de squamules blanchâtres.

Cambodge. (Coll. Jans.)

53. A. OBLIQUUS. — *Fuscus, squamulis fusco-cinereis vestitus; prothorace latitudine longiore, lateribus fere recto parallelo, medio longitrorsum leviter carinato, angulis posticis divaricatis, extus carinatis; elytris castaneis, fascia obliqua obscuriori, striato-punctatis, basi cristatis, apice emarginatis.*

Long. 25-30 mill., lat. 7-8 mill.

Brun obscur avec les élytres brun-rougeâtre, revêtu de petites squamules d'un cendré sale, les élytres marquées d'une bande oblique paraissant plus obscure parce que les squamules moins serrées laissent paraître la couleur du fond. Antennes brun-rougeâtre. Front concave. Prothorax plus long que large, presque droit sur les côtés, peu convexe, marqué de points très-fins assez serrés, et de très-gros disséminés, le milieu présentant une très-fine carène longitudinale, ses angles antérieurs avancés, les postérieurs divergents, carénés très-près du bord externe. Écusson pentagonal. Élytres un peu plus larges au milieu qu'à la base, striées-ponctuées, le troisième intervalle s'élevant, de chaque côté de l'écusson, en une forte crête longue de 3 à 3 $^1/_2$ mill., leur extrémité échancrée avec l'angle externe de l'échancrure spiniforme. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

Nouvelle-Guinée : Dorey.

Collections Janson et Saunders. Trois exemplaires trouvés par M. Wallace.

54. A. INFUMATUS. — *Fuscus, squamulis fusco-cinereis vestitus, plaga laterali, triangulari, elytrorum brunnea; fronte antice biangulata; prothorace latitudine longiore, lateribus fere recto parallelo, convexo, tenuiter carinato, postice tuberculo minuto; elytris striato-punctatis, basi tuberculatis, apice emarginatis.*

Long. 20 mill., lat. 6 mill.

Brunâtre obscur, revêtu de petites squamules d'un cendré brun, s'éclaircissant çà et là, présentant en outre, sur les parties latérales des élytres, une grande tache triangulaire brune variée de brun clair, dont la base s'appuie au bord externe et l'angle antérieur au calus huméral. Front carré, très-concave, ses angles antérieurs redressés. Antennes brunes. Prothorax rectangulaire, un peu plus long que large, les angles antérieurs saillants en avant, sa surface convexe, marqués de gros points, présentant au milieu une fine carène lisse, longitudinale, plus élevée en arrière, ses angles postérieurs divergents, carénés. Écusson oblong,

subpentagonal. Élytres de la largeur du prothorax, moins de deux fois plus longues, marquées de lignes de points assez gros et espacés, le troisième intervalle portant une crête courte à la base, leur extrémité échancrée, les angles de cette échancrure spiniformes. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

Nouvelle-Guinée; Adaï.

Un exemplaire ♀ trouvé par M. Rosenberg. (Musée de Leide.)

55. A. ANGULARIS. — *Fusco-brunneus, pilis squamiformibus fusco-cinereis minus dense vestitus; prothorace latitudine longiore, convexo, medio tenuiter carinato, angulis anticis in mari prominulis, dilatatis; elytris striato-punctatis, basi tuberculatis, apice emarginatis.*

Long. 13-16 mill., lat. 4-5 mill.

(♂) Brun, les élytres rougeâtres, revêtu de squamules d'un cendré jaunâtre peu denses et laissant apercevoir la couleur du fond, surtout à la partie médiane et antérieure du prothorax, la fossette scutellaire seule et l'écusson offrant des squamules brunes. Front excavé, présentant deux plaques de squamules plus serrées. Antennes brunes. Prothorax plus long que large, graduellement élargi d'arrière en avant, convexe, finement ponctué, avec de gros points disséminés, finement caréné, ses angles antérieurs larges, avancés, tronqués, les postérieurs divergents et finement carénés. Écusson pentagonal. Élytres moins de deux fois plus longues que le prothorax, atténuées en arrière, striées-ponctuées, portant deux tubercules aigus en arrière de l'écusson, leur extrémité échancrée avec l'angle externe de l'échancrure allongé, spiniforme. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

(♀) Les principaux caractères qui distinguent cette espèce sont ici atténués. Les angles antérieurs du prothorax sont moins larges, moins saillants, arrondis et non tronqués; les tubercules de la base des élytres sont beaucoup moins forts. Il est toutefois bon de noter que la seule femelle que j'ai vue était de taille

beaucoup plus petite que le mâle et paraissait un individu de faible développement.

Mysol.

Des envois de M. Wallace; collection Janson.

### III. — ESPÈCES AUSTRALIENNES.

56. A. GIGAS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 234.

Australie.

57. A. MAC-LEAYI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 235.

Clarence-River. Il y a des individus plus grands que la mesure indiquée; on le distinguera toujours du précédent par les intervalles des stries des élytres tout à fait plats.

58. A. GIBBONI. — *Nigro-brunneus, pilis squamiformibus confertis, nigris, ochraceis, albisque maculatim ornatus; prothorace latitudine paulo longiore, basi angustato, parum convexo, angulis posticis extrorsum flexis, carinatis; elytris striato-punctatis, interstitiis imparibus subelevatioribus, postice latioribus, basi bituberculatis, apice emarginatis; subtus pedibusque ochraceis.*

Long. 35 mill., lat. 11 mill.

*Elater* (*Alaus*) *Gibboni.* — NEWM. *Trans. Entom. Soc.*, n. sér., t. IV, p. 51, 1857.

Moreton-Bay.

59. A. PROSECTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 236.

Sydney.

60. A. FUNEREUS. — *Fuscus, squamulis fuscis, brunneis albidisque marmoratim variegatus; fronte concava; prothorace latitudine longiore, apice dilatato lateribusque arcuato; elytris ultra basin albido squamosis, striato-punctatis, basi tuberculatis, apice integris.*

Long. 21 mill., lat. 6 mill.

CAND. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 17.

Voisin de l'*A. suboculatus*, mais plus long proportionnément à sa largeur, varié de teintes autrement disposées. Noirâtre, teinté latéralement de ferrugineux, densément revêtu de poils squamiformes noirâtres, bruns et blancs; les seconds couvrant principalement le milieu du prothorax, les trois cinquièmes antérieurs (moins la base) et l'extrémité des élytres; les blancs revêtant le reste du corps; sur les parties blanches on observe en outre de petites mouchetures brunes ou noirâtres dont deux plus grandes sur le disque du prothorax; les parties brunes sont de même mouchetées de blanc; vers le milieu des élytres et à la limite postérieure de la couche brune existe, adossée au bord externe, une tache plus foncée envoyant un rameau dans la direction de l'écusson. Les autres caractères semblables à ceux du *suboculatus*, sauf les suivants : prothorax visiblement plus long que large; tubercules de la base des élytres plus saillants; extrémité de ces organes plutôt arrondie que tronquée.

Moreton-Bay. (Coll. Jans., etc.)

61. A. SUBOCULATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 229.

Port Denison.

62. A. FUNEBRIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 233.

Moreton-Bay.

63. A. MELANCHOLICUS. — *Niger, squamulis nigris cinereisque vestitus; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato, angulis posticis tenuibus, divaricatis, acutis, apice carinatis; elytris punctato-striatis, interstitio tertio basi elevato, apice integris, subtus pedibusque obscuris.*

Long. 22 mill., lat. 5 $^1/_2$ mill.

Plus étroit, en proportion, que les précédents, d'une teinte générale plus noire due à la prédominance des squamules de cette couleur, lesquelles forment une bande oblique au milieu des élytres ; sur le reste du corps des squamules cendrées sont disséminées sans former de taches à proprement parler. An-

tennes noires. Prothorax plus long que large, rétréci à la base et au sommet avec ses côtés régulièrement arqués, convexe, présentant une saillie vers la base, devant l'écusson, ses angles postérieurs recourbés en dehors, grêles, aigus, carénés très-brièvement à l'extrémité. Écusson oblong, déclive. Élytres plus larges que le prothorax, entières au bout, ponctuées-striées, les intervalles un peu convexes, le troisième élevé vers la base, de chaque côté de l'écusson, mais sur un plan postérieur. Dessous et pattes noirâtres.

Queensland. (Coll. Jans.)

64. A. SERICEUS. — *Fuscus, vestitura brunneo-cinerea sericante, elytris basi ochraceis, macula media marginali fusca; prothorace parallelo, latitudine paulo longiore, convexo, basi tuberculato, angulis posticis divaricatis, carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, basi abrupte declivis, tuberculatis, apice emarginatis; subtus pedibusque fusco-ochraceis.*

Long. 26 mill., lat. 7 $^1/_2$ mill.

Noirâtre, densément recouvert de squamules d'aspect soyeux d'un cendré brunâtre, le prothorax blanchâtre en avant, passant au jaunâtre en arrière, cette dernière couleur dominant à la base des élytres, lesquelles présentent en outre une petite tache noirâtre vers le milieu du bord latéral. Antennes courtes, noires. Prothorax à peine plus long que large, de forme à peu près carrée, bombé, ponctué, présentant un tubercule vers la base, en avant de l'écusson, ses angles postérieurs recourbés en dehors, aigus au bout, carénés. Écusson oblong, déclive. Élytres de la largeur du prothorax, parallèles jusqu'au milieu, peu profondément ponctuées-striées, les intervalles plats, brusquement déclives à la base où elles portent un tubercule de chaque côté et en arrière de l'écusson, fortement échancrées au sommet, l'angle externe de l'échancrure très-aigus. Dessous du corps et pattes revêtus de squamules d'un jaunâtre obscur.

Rockhampton. (Coll. Jans.)

65. A. PUMILUS. — *Fuscus, albido-vestitus, vitta media prothoracis maculaque laterali elytrorum nigris; prothorace latitudine paulo longiore, antice ampliato, convexo, angulis posticis subdivaricatis, brevibus, vix apice carinatis; elytris tenuiter punctato-striatis, basi tuberculatis, apice integris.*

Long. 10-15 mill., lat. 3-4 $^1/_2$ mill.

Petit, revêtu de squamules blanches, avec une bande longitudinale médiane sur le prothorax brunâtre et une tache latérale vers le milieu de chaque élytre noire, la tête et la partie antérieure du prothorax passant au jaune. Antennes très-courtes. Prothorax un peu plus long que large, arqué sur les côtés, rétréci à la base, convexe, ponctué, tuberculeux en avant de l'écusson, ses angles postérieurs courts, aigus, à peine carénés au sommet. Écusson oblong, très-déclive. Élytres de la largeur du prothorax, courtes, faiblement ponctuées-striées, tuberculeuses à la base, isolément arrondies au sommet. Dessous et pattes revêtus de squamules d'un gris jaunâtre.

Rockhampton. (Coll. Jans.)

#### IV. — ESPÈCES POLYNÉSIENNES.

66. A. FARINOSUS. — *Niger, albido vestitus; prothorace latitudine longiore, parum convexo, angulis posticis divaricatis; elytris interstitiis alternis elevatis, apice emarginatis, macula laterali nigra.*

Long. 23 mill., lat. 7 mill.

*Agrypnus farinosus.* — MONTR. *Ann. Soc. Entom. Fr.*, 1860, p. 255.

Ile d'Art.

67. A. MONTRAVELI. — *Niger, albicanti-vestitus; prothorace latitudine haud longiore, parum convexo; angulis posticis acute carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis convexis, apice emarginatis.*

Long. 17 mill., lat. 15 mill.

*Agrypnus Montravelii.* — MONTR. *Loc. cit.*, p. 255.

Nouvelle-Calédonie et Lifu.

Ces deux espèces ont les bords de la fossette mésosternale élevés et la suture qui sépare ceux-ci du métasternum peu visible. Cette conformation, jointe au *facies*, rappelle tout à fait les *Chalcolepidius* américains.

68. A. CRISTATUS. — *Niger, sordide albicanti vestitus, sericeus; prothorace depresso, sulcato, angulis posticis tenue carinatis; elytris punctato-striatis, interstitiis planis, apice truncato-emarginatis, basi oblique cristatis.*

Long. 25-35 mill., lat. 8-11. mill.

Noir, revêtu de squamules d'un gris blanchâtre ou jaunâtre sale, d'aspect soyeux. Front carré, excavé. Antennes courtes. Prothorax aussi large que long, déprimé, arqué sur les côtés, largement sillonné au milieu d'arrière en avant, assez densément couvert de points fins, parmi lesquels on en remarque de plus gros disséminés, ses angles postérieurs larges, un peu divergents, muni d'une fine carène rapprochée du bord externe. Écusson pentagonal, déclive. Élytres de la largeur du prothorax à la base, un peu élargies au milieu, largement échancrées ou plutôt tronquées au bout avec les angles de la troncature aigus, présentant à la base une crête oblique assez élevée, le calus huméral formant également une arête tranchante. Dessous et pattes comme le dessus. Bords de la fossette mésosternale horizontaux, bien séparés du métasternum par une suture.

Nouvelles-Hébrides; Anatoum. (Coll. Jans. et Saund.)

Tournure de *Chalcolepidius* comme les précédents, mais mésosternum normal.

### V. — ESPÈCES AMÉRICAINES.

69. A. TRICOLOR. — OL. *Entom.*, t. II, pp. 31, 9, 4, pl. V, fig. 49.

*Calais tricolor.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 240, pl. IV, fig. 6.

Saint-Domingue.

Cette espèce, connue au temps d'Olivier, n'a pas été retrouvée depuis, à ma connaissance.

70. A. NOBILIS. — Sallé, *Ann. Soc. Entom. Fr.*, 1855, p. 263, pl. XIV, fig. 1.

*Calais nobilis.* — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 241.

Saint-Domingue.

71. A. PATRICIUS. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 242, pl. IV, fig. 8. (*Calais.*)

Cuba.

72. A. PRIMARIUS. — *Brunnea, pilis squamiformibus cinereis dense vestita; prothorace subquadrato, medio longitrorsum elevato, quadrifoveolato, angulis posticis divaricatis; elytris punctato-substriatis, apice emarginatis, plagis quatuor brunneis.*

Long. 32 mill., lat. 10 mill.

*Calais primaria.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, t. XVIII, 1865, p. 18.

(♂) Brun, très-densément revêtu de poils squamiformes d'un cendré blanchâtre avec deux taches sur les élytres formées par des poils bruns, la première subquadrangulaire, transversale, grande vers le milieu, la seconde, plus petite, près de l'extrémité. Antennes longuement lamellées, brunes. Front longitudinalement excavé. Prothorax à peu près aussi large que long, de forme carrée, longitudinalement élevé au milieu, déprimé de chaque côté, éparsément ponctué, marqué de quatre fossettes, deux à fond lisse, ce qui les fait paraître brunes, vers le milieu, deux autres moins apparentes en arrière, ses côtés offrant quelques crénelures, ses angles postérieurs larges, très-divergents, carénés. Écusson caréné longitudinalement. Élytres plus larges que le prothorax, faiblement atténuées depuis la base, échancrées au bout avec l'angle sutural mucroné, ponctuées-substriées. Dessous revêtu de poils cendrés comme le dessus.

Cuba.

Je n'ai vu qu'un mâle de cette espèce, que m'a communiqué le Dr Gundlach. Son système de coloration la distingue des *A. patricius* et *nobilis*. Elle diffère notamment de la première, qui est du même pays, par les fossettes du prothorax.

73. A. PLEBEJUS. — *Parallelus, fuscus, squamulis brunneis albicantibusque variegatus; prothorace latitudine longiore, convexo, angulis posticis brevibus, obsolete carinatis; elytris punctato-striatis, basi tuberculatis, apice integris.*

Long. 20 mill., lat. 5 mill.

*Calais plebeja.* — JANS. *Mss.*

Allongé, subcylindrique, parallèle, brunâtre, revêtu de squamules brunes et blanchâtres entremêlées, les premières formant en outre quelques petites taches dont deux plus grandes au bord latéral des élytres. Front carré, un peu concave en avant. Antennes courtes, noires. Prothorax notablement plus long que large, peu rétréci en avant, assez convexe, fortement et éparsément ponctué, ses angles postérieurs courts, à peine divergents, peu distinctement carénés. Élytres de la largeur du prothorax, rétrécies seulement vers l'extrémité, ponctuées-striées avec le troisième intervalle tuberculeux à la base, l'extrémité arrondie. Dessous et pattes comme le dessus.

Cayenne. (Coll. Jans.)

74. A. NIETOI. — *Niger, albido variegatus; antennis maris pectinatis; prothorace latitudine longiore, basi apiceque angustato; scutello postice emarginato; elytris brevibus, a basi attenuatis, apice integris.*

Long. 17 mill., lat. 4 $^1/_2$ mill.

*Calais Nietoi.* — SALLÉ. *Rev. zool.*, 1870.

Mexique.

Forme du suivant, mais plus grand; bien distinct par sa vestiture autrement disposée et surtout par son écusson échancré en arrière.

75. A. GLAUCUS. — CAST. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 9.

*Calais glauca.* — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 245, pl. IV, fig. 5.

Cayenne.

76. A. OCULATUS. — LINN. *Syst. nat.*, 1, 2, p. 651. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 256.

États-Unis de l'Est et du Sud, très-commun.

77. A. LUSCIOSUS. — HOPE, *Anim. Kingd.*, t. I, p. 363, pl. III, fig. 5.

*Alaus gorgops.* — LEC. *Journ. Ac. Phil.*, 2e sér., t. IV, p. 35, 1858.

Mexique septentrional et États-Unis du Sud-Ouest.

Cette espèce, que j'ai considérée autrefois comme une variété de l'*oculatus*, est décidément distincte. Elle en diffère constamment par sa forme plus courte, ses marbrures blanches plus larges, les taches ocellées du prothorax plus arrondies, etc.

78. A. MELANOPS. — LEC. *New spec. col.*, t. I, 1863, p. 83.

*Alaus naja.* — CAND. *Mém. Acad. Belg.*, t. XVII, 1863, p. 18.

Californie.

79. A. MYOPS. — FABR. *Syst. Eleuth.*, t. II, p. 222. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 238.

États-Unis du Sud et du Centre. On le rencontre aussi, mais rarement, dans l'Orégon.

## HEMIRHIPUS.

LATR. *Règne animal* (éd. 3), t. II, p. 402.

1. H. LINEATUS. — FABR. *Syst. Eleuth.*, t. II, pp. 223, 13. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 247.

Brésil : Rio.

2. H. FAIRMAIREI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 248, pl. V, fig. 1.

Nouvelle-Grenade; Amérique centrale.

3. H. ROJASI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 249.

Vénézuéla.

4. H. APICALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 250.

Nouvelle-Grenade.

5. H. BIMACULATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 250.

Mexique.

6. H. BONVOULOIREI. — *Ferrugineus, fulvo-villosus; prothorace elongato, maculis quatuor nigris; elytris punctato-striatis, postice nigris.*

Long. 42 mill., lat. 10 mill.

Allongé, ferrugineux, avec quatre taches arrondies sur le prothorax et les deux tiers postérieurs des élytres noirs, la pubescence de la couleur des parties qu'elle recouvre. Front bombé, le vertex maculé de noir et portant une petite saillie oblongue. Antennes courtes, noires, les premiers articles ferrugineux. Prothorax plus long que large, parallèle en arrière, rétréci curvilinéairement en avant, très-convexe avec une ligne saillante et lisse au milieu, finement et densément ponctué, ses côtés très-déclives, ses angles postérieurs fortement carénés. Écusson en ovale transversal, faisant saillie dans une profonde fossette scutellaire. Élytres atténuées et déprimées en arrière, sillonnées, les intervalles convexes et finement ponctués. Dessous noir, pattes brunâtres.

Cayenne.

Un exemplaire portant ce nom dans la collection de M. Janson.

7. H. TRILINEATUS. — CAST. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 12. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 251.

Brésil.

8. H. FASCICULARIS. — FABR. *Mantiss.*, t. I, p. 171. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 252, pl. V, fig. 2.

Amérique intertropicale.

9. H. DEJEANI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 253.

Brésil.

10. H. DECORUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 254.

Mexique.

11. H. VIDUUS. — CHEVR. *Ann. Fr.*, 1867, p. 598.

Cuba.

12. H. PERROUDI. — *Niger, parum nitidus, flavo-pilosus; prothorace rugoso, bifoveato; elytris punctato-striatis, interstitiis convexis, tertio basi elevato, rufo maculatis; pedibus rufis.*

Long. 28 mill., lat. 8 mill.

Noir, peu luisant, revêtu de poils d'inégale longueur et couchés en différents sens d'un gris flave, les élytres ornées d'une tache rougeâtre, appendiculée en arrière et couvrant leur tiers antérieur, sauf le voisinage de l'écusson, et d'une petite tache de même couleur vers leurs deux tiers postérieurs. Front excavé, très-rugueux. Antennes rougeâtres à la base. Prothorax un peu plus long que large, très-rugueux, offrant de chaque côté dans sa portion moyenne une fossette assez profonde, ses angles postérieurs dirigés en arrière, fortement carénés. Écusson déclive. Élytres de la largeur du prothorax, régulièrement et curvilinéairement rétrécies dans leur moitié postérieure, fortement ponctuées-striées, les intervalles rugueusement ponctués, convexes, le troisième costiforme à la base. Pattes rougeâtres, les cuisses teintées de noir.

Du Brésil.

Je dois la connaissance de cette espèce à M. Perroud, de Lyon, dans la collection de qui elle existe.

## TETRIGUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 254.

Ainsi que je l'ai dit dans une notice antérieure (1), les insectes qui rentrent dans ce genre ont de grandes affinités avec les

(1) *Élatérides du Japon.* MÉM. DE LA SOC. DES SC. DE LIÉGE, 2e sér., t. V.

*Ludius*, les *Aphanobius*, les *Orthostethus* de la tribu des *Ludiites*. La forme générale, la couleur, la nature de la pubescence, le contour des hanches postérieures sont semblables. D'autre part leur parenté avec les *Hemirhipus* n'est pas moins évidente : c'est notamment la même conformation de la tête, la même disposition du rebord frontal ; enfin la structure flabellée des antennes, quoique différant un peu dans sa manière d'être, les rapproche encore. C'est manifestement une forme de transition entre le groupe actuel et celui des *Ludiites*. J'avais d'abord l'intention de les reléguer parmi ces derniers, mais les motifs qui m'engagent à les laisser auprès des *Hemirhipus*, près desquels je les ai classés autrefois, ayant une valeur égale, je me suis décidé à les maintenir ici.

Les représentants de ce genre sont rares dans les collections. Des femelles, je ne connais que celle du *T. Parryi*.

A Élytres non divariquées au sommet chez les mâles.
  *a* Pubescence gris-fauve . . . . . 1. *T. parallelus.*
  *aa* Pubescence noire.
    *α* Prothorax aussi large que long. . . . . 2. *T. ater.*
    *αα* Prothorax un peu plus long que large . . . . . 3. *T. cyprius.*

AA Élytres divariquées au bout chez les ♂.
  *a* Lamelles des antennes des ♂ étroites.
    *α* Élytres plus de trois fois plus longues que le prothorax . 4. *T. flabellatus.*
    *αα* Élytres moins de trois fois plus longues que le prothorax.
      * Des stries de points couvrant entièrement les élytres. . 5. *T. Lewisi.*
      ** Des stries de points obsolètes au sommet des élytres . 6. *T. pexus.*
  *aa* Lamelles des antennes des ♂ larges . . . . . 7. *T. Parryi.*

1. T. PARALLELUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 255, pl. V, fig. 5.

Bengale.

2. T. ATER. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 256.

Ceylan.

3. T. CYPRIUS. — (♂) *Elliptico-elongatus, ater, subnitidus; parce nigro-pubescens; prothorace latitudine paulo longiore, confertissime punctato, linea media elevata; elytris parallelis,*

*striato-punctatis, apice haud divaricatis; antennis prothorace brevioribus pedibusque nigris.*

Long. 25 mill., lat. 8 mill.

(♂) A peine distinct de l'*ater*. Il paraît avoir le prothorax proportionnément un peu plus long que ce dernier.

Cette espèce, encore fort rare dans les collections, n'a été rencontrée jusqu'ici, à ma connaissance, que dans le nord de la Syrie (Antioche) et dans l'île de Chypre.

4. T. FLABELLATUS. — (♂) *Elongatus, fusco-niger, dense cervino-pilosus; fronte convexa apice truncata; prothorace longitudini latitudine aequali, convexo, crebre punctato; elytris prothorace plus quam triplo longioribus, apice acutis et divaricatis.*

Long. 35 mill., lat. 8 $^1/_2$ mill.

*Aphanobius flabellatus.* — GERMAR, *Zeitschr.*, t. V, p. 186.

Java.

5. T. LEWISI. — CAND. *Elater. Japon. in Mém. Soc. sc. Liége*, 2e sér., t. V, p. 6.

Chine (Amoy, Shang-Hai) et Japon méridional. (Coll. Jans.)

6. T. PEXUS. — (♂) *Fusco-niger, dense fulvo-pilosus; fronte convexa, apice truncata; prothorace longitudine vix latiore, crebre tenuiter inaequaliterque punctato, angulis posticis retrorsum productis, acutis, carinatis; elytris crebre punctatis, basi densius tomentosis.*

Long. 30 mill., lat. 8 mill.

Allongé, un peu luisant, densément revêtu de poils fauves couchés, plus épais à la base du prothorax et des élytres, et sur l'écusson. Antennes brunes. Front bombé, tronqué au sommet, obliquement coupé au-dessus des fossettes antennaires. Prothorax aussi long que large ou à peu près, curvilinéairement rétréci au sommet, convexe, couvert de points serrés, petits, inégaux, ses angles postérieurs dirigés en arrière, aigus, carénés. Écusson allongé. Élytres de la largeur du prothorax et un peu

moins de trois fois plus longues, parallèles en avant, divariquées au sommet, marquées de points nombreux et fins disposés en séries transversales, sans trace de stries si ce n'est dans leur moitié postérieure.

Dorey.

Un exemplaire (♂) dans la collection de M. Janson provenant des chasses de M. Wallace.

7. T. Parryi. — (♂) *Fusco-niger, dense griseo-tomentosus; antennis flabellatis, laminis latis; prothorace latitudine longiore, a basi leviter angustato; elytris tenuiter punctato-substriatis, interstitiis rugulosis, apice acuminatis.*

Long. 24 mill., lat. 6 mill.

(♁) *Major, antennis serratis.*

Long. 35 mill., lat. 10 mill.

*Tetrigus Parryi.* — Cand. *Mém. Acad. Belg.*, 1865, p. 18.

(♂) Noirâtre, densément revêtu d'une pubescence d'un gris clair qui voile la teinte des téguments. Front convexe, perpendiculaire en avant où son bord est arrondi. Antennes très-courtes, leurs articles 2 et 3 petits, les suivants munis d'une longue lamelle. Prothorax plus long que large, faiblement rétréci depuis la base jusqu'au sommet avec les bords latéraux peu arqués, assez convexe, moins densément ponctué sur le milieu du disque que sur les côtés, ses angles postérieurs dirigés en arrière, aigus, carénés. Écusson oblong, très-déclive. Élytres à peine plus larges que le prothorax, deux fois et demie plus longues, rétrécies à partir du milieu avec leurs côtés curvilinéaires, aiguës et un peu divariquées au bout, très-finement ponctuées-striées, les intervalles plats et finements rugueux. Pattes médiocrement longues et assez grêles.

(♀) Beaucoup plus grande que le mâle, plus noirâtre, la pubescence moins dense, les antennes dentées en scie, les élytres non divariquées au sommet.

Natal.

Un mâle et deux femelles dans la collection de M. Janson.

### CHALCOLEPIS.

Cand. *Monogr.*, t. I, p. 244.

C. LUCZOTI. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 245.

Nouvelle-Grenade. (Coll. Jans., Cand., etc.) Nicaragua. (Coll. Sallé.)

## TRIBU III.

# CHALCOLÉPIDIITES.

Cette tribu reste composée des quatre genres sur lesquels elle a été établie primitivement. Les *Campsosternus* et les *Semiotus* seuls ont reçu un contingent notable d'espèces nouvelles.

### CHALCOLEPIDIUS.

Eschs. — *Entom. Arch.*, t. II, 1829, p. 33.

Je n'ai pas cru nécessaire de reproduire ici le tableau synoptique des espèces, vu le petit nombre de celles que j'ajoute aux anciennes. J'indiquerai pour chacune d'elles en quoi elle diffère de celle de ces dernières où l'on aboutirait en consultant le tableau en question.

J'ai réuni la deuxième et la troisième section en une seule, l'établissement de celle-ci, basé sur la longueur relative du 3e article des antennes, me paraissant peu justifié.

#### Section I.

1. C. GOSSIPIATUS. — Guér. *Rev. Zool.*, 1844, p. 17. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 265.

Nouvelle-Grenade; Vénézuéla.

On trouve, par exception, des individus de cette espèce chez lesquels les intervalles des stries des élytres sont presque égaux, notamment dans la variété *Erichsoni*.

2. C. OXIDATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 266.

Vénézuéla.

Je ne connaissais autrefois que la ♀; depuis, j'ai vu le ♂. Il se distingue, outre le caractère tiré de la forme du dernier segment de l'abdomen, par ses jambes antérieures munies en dedans, non de cils, mais d'une dizaine d'épines noires placées à distance égale l'une de l'autre.

3. C. LEMOINEI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 266, pl. V, fig. 7.

Nouvelle-Grenade; Vénézuéla.

Même remarque que pour le précédent, en ce qui concerne le mâle. Parfois le prothorax est couvert d'écailles vertes, avec une bande blanche plus ou moins nettement limitée de chaque côté.

4. C. EXULATUS. — *Niger, squamulis minimis griseis parce obductus; prothorace latitudine paulo longiore, lateribus arcuato, parum convexo, crebre punctulato sparsimque grosse punctato, vitta laterali alba; elytris punctato-sulcatis, interstitiis alternis elevatioribus, sulcis margine epipleurisque albis; subtus griseus.*

Long. 28 mill., lat. 9 mill.

Cette espèce est indiquée, dans la collection de M. Janson, comme originaire du Brésil. Si cette indication est exacte, c'est le seul représentant dans ce pays des *Chalcolepidius* de la 1re section; peut-être vient-il de quelque partie rapprochée de la Colombie. Quoi qu'il en soit, il diffère peu du *Lemoinei* si ce n'est par les points suivants : son prothorax est moins rétréci en avant des angles postérieurs; il en résulte que ceux-ci sont moins divergents; ses bandes blanches latérales sont étroites et aussi nettement séparées de la teinte foncée du milieu qu'elles le sont chez le *limbatus;* ses épipleures sont blanches; enfin le dessous du corps est d'un gris plombé, tandis qu'il est ordinairement blanc chez le *Lemoinei.*

5. C. ATTENUATUS. — ERICHS. *Zeitschr. f. d. Entom*, t. III, p. 86. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 267.

Mexique.

6. C. MEXICANUS. — CAST. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 13. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 268.

Mexique.

7. C. RUBRIPENNIS. — LEC. *Proceed. Acad. Phil.*, 1861, p. 336.

Californie.

8. C. JEKELI. — *Niger, squamulis minutissimis cyaneis dense vestitus; prothorace tenuiter punctato, punctis majoribus sparsis; elytris basi parallelis, striatis.*

Long. 40 mill., lat. 13 mill.

Cette espèce ressemble tout à fait au *Lacordairei :* même forme très-cambrée, même couleur, même taille ; mais elle a l'écusson replié en avant comme toutes les espèces de cette section, son prothorax est dépourvu des rides longitudinales qui constituent l'un des caractères les plus saillants de celle à laquelle je la compare, enfin ses élytres sont plus parallèles dans leur moitié antérieure.

Le seul exemplaire ♀ que j'aie vu et dont je dois la communication à M. Jekel est dépourvu d'antennes, en sorte que je ne puis dire s'il a ces organes conformés comme ceux des *oxydatus, gossypiatus*, etc. Il est indiqué comme provenant de Colombie, mais j'ai des raisons de croire qu'il y a là erreur et que sa patrie est l'Amérique centrale.

9. C. DESMARESTI. — CHEV. *Coll. du Mex. Cent.*, t. II, p. 195. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 269.

Mexique : Orizaba.

2me SECTION.

10. C. PORCATUS. — LIN. *Syst. Nat.*, t. I, II, pp. 652, 6. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 270.

Répandu dans toute l'Amérique méridionale jusque vers le 30me degré. La variété *virens* paraît s'étendre au nord, jusqu'au Mexique, mais elle y est très-réduite de taille et très-rare.

Une très-belle variété de la division *b*, *c'*, originaire du Para, dans la collection de M. Chevrolat, a le prothorax uniformément brun et les élytres blanches sauf les intervalles impairs qui forment des côtes noires, c'est-à-dire que sur ces derniers les lignes blanches se sont élargies au point d'envahir les intervalles pairs moins saillants que les autres.

11. C. AURULENTUS. — *Niger, squamulis minimis viridibus, aureo-micantibus tectus ; prothorace a basi angustato, apice subito coarctato; elytris punctato-sulcatis, sulcis epipleurisque albo squamulosis.*

Long. 25-35 mill., lat. 7 1/2-11 mill.

Cette espèce présente les caractères généraux du *porcatus*, var. *c'*, c'est-à-dire qu'elle est revêtue de squamules vertes avec les stries des élytres garnies d'écailles blanches plus grandes, mais elle présente des différences assez marquées pour que, eu égard aussi à son lieu d'origine, j'aie cru devoir la distinguer comme espèce. Les écailles vertes ont un reflet doré rougeâtre ; les blanches envahissent et recouvrent complétement les épipleures, ce qui, je pense, ne s'observe pas chez le *porcatus;* le prothorax est moins régulièrement bombé, plus aplati latéralement, enfin il se rétrécit assez brusquement au sommet où les bords latéraux s'abaissent en même temps, tandis que dans toutes les variétés du *porcatus* ces mêmes bords forment en cet endroit une courbe régulière et restent dans le même plan partout.

Je ne puis le rapporter au *Webbi* Lec., espèce que je ne con-

nais du reste que par la description, mais qui me paraît en différer par quelques points essentiels.

Californie méridionale.

Deux exemplaires ♂ et ♀ dans la collection de M. Janson. Le mâle, beaucoup plus grand que la femelle, a la partie interne des jambes et du dernier article des tarses, aux quatre pattes antérieures, garnie d'une double rangée de longs cils noirs.

12. C. LIMBATUS. — Eschs. *Thon, Arch.*, t. I, p. 33. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 272.

Amérique méridionale. Il s'étend au sud jusque dans l'Uruguai. C'est, je pense, celui que l'on rencontre le plus loin dans cette direction.

13. C. ZONATUS. — Eschs. *Thon, Arch.*, t. II, I, p. 32. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 273.

Brésil, Guyane, Colombie.

(*Addend.*) Var. *b. Squamulis brunneis, vittis striisque albidis.*

Mexique : Puebla. (Coll. Sallé.)

14. C. MOCQUERYSI. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 274.

Nouvelle-Grenade.

15. C. APPROXIMATUS. — Erichs. *Zeitschr.*, t. III, p. 82. — Cand. *Monogr.*. t. I, p. 275.

Mexique.

N'est peut-être, ainsi que le précédent, qu'une variété du *zonatus*.

16. C. CORPULENTUS. — *Crassus, niger, olivaceo-vestitus; antennis obscure cyaneis; prothorace convexo, apice tantum angustato, latissime pallide flavo limbato; elytris striis per paria approximatis, marginibus epipleurisque pallide flavis.*

Long. 12 mill., lat. 15 mill.

Grand, épais, très-cambré, noir, revêtu de très-petites squamules bronzé olivâtre, les côtés du prothorax largement flave blanchâtre, de telle sorte que chacune des bandes latérales a la même largeur que la bande bronzée médiane, les stries des élytres et les bords latéraux, y compris les épipleures, également garnis de squamules allongées flave blanchâtre. Antennes bleues, les trois premiers articles noirs revêtus de poils vert bronzé, le troisième aussi long que le quatrième. Prothorax aussi large que long, droit et parallèle dans sa moitié postérieure, curvilinéairement rétréci en avant, bombé, finement et densément pointillé, avec quelques gros points disséminés et des rides longitudales, ses angles postérieurs presque droits, un peu tronqués au bout. Écusson en triangle curviligne, sillonné au milieu, ses angles arrondis. Élytres de la largeur du prothorax, bombées, sillonnées, les intervalles impairs plus larges et plus élevés que les autres. Dessous et pattes bronzés, tarses noirs.

Bahia.

Une femelle dans la collection de M. Fry.

Cette espèce a la coloration du *limbatus* avec forme plus large, plus bombée, ce qui la rapproche davantage du *Bomplandi*, mais elle est plus massive que toutes celles que je connais. Elle se distingue notamment par la grande largeur des bandes latérales du prothorax.

17. C. Silbermanni. — Chevr. *Col. du Mex. Cent.*, II, p. 197. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 275.

Mexique, Amérique centrale et Nouvelle-Grenade.

Le *C. æquinoctialis* Cast. doit être rapporté à cette espèce.

18. C. pruinosus. — Ericus. *Zeitschr. f. d. Entom.*, t. III, p. 84. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 276.

Mexique.

19. C. Jansoni. — *Niger, æneo-vestitus, opacus, subsericeus, subopalescens; prothorace latitudine longiore, depresso, angulis pos-*

*ticis divaricatis, truncatis; scutello triangulari; parte antica coarctata; elytris punctato-striatis, angulo apicali mucronato.*

Long. 28-35 mill., lat. 11 mill.

Allongé, assez déprimé, noir, très-densément recouvert de très-petites écailles d'un vert olivâtre, bronzé ou parfois légèrement bleuâtre, plus ou moins soyeux ou subopalescent, mat. Front concave. Antennes noires, dentées en scie, leur troisième article verdâtre, aussi long, mais plus étroit que le quatrième. Prothorax allongé, déprimé, aplati latéralement, ses bords latéraux un peu sinueux, marqué de quelques points dans sa portion antérieure, ses angles postérieurs divergents, fortement tronqués au bout. Écusson triangulaire, sa moitié antérieure non aplatie comme dans toutes les espèces de cette section, mais rétrécie et déclive latéralement. Élytres de forme ordinaire, régulièrement striées, les stries fortement ponctuées, les intervalles un peu convexes, le troisième élevé à la base, l'angle apical un peu prolongé en pointe. Dessous et pattes comme le dessus.

Nicaragua.

J'en ai vu plusieurs exemplaires dans les collections de MM. Janson, Fry et Sallé, trouvés par MM. Janson fils et Belt à Chontales. Son aspect mat et soyeux le distingue de ses congénères. On ne pourrait le confondre qu'avec la variété verte du *porcatus*, mais celui-ci a le corselet plus bombé, à angles postérieurs moins fortement tronqués, les stries des élytres moins ponctuées, la couleur d'un vert ordinairement plus clair, etc.

20. C. Fabricii. — Erichs. *Zeitschr. f. de Entom.*, t. III, p. 83. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 277.

Nouvelle-Grenade.

21. C. Bomplandi. — Guér. *Rev. Zool.*, t. VII, p. 17. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 278, pl. VI, fig. 3.

Nouvelle-Grenade. Il paraît se trouver aussi au Mexique. (Sallé.)

22. C. Eschscholtzi. — Chevr. *Col. de Mex. cent.*, I, p. 7. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 729, pl. V, fig. 8.

Mexique; État de Vera-Cruz.

23. C. rugatus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 280.

Chiapas; Tabasco; Guatemala.

24. C. Lacordairei. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 281, pl. V, fig. 6.

Cette belle espèce, commune aux environs de la ville de Guatemala, se retrouve dans toute l'Amérique centrale jusque dans la Nouvelle-Grenade, d'une part, et s'étend, de l'autre côté, en suivant le littoral du Pacifique, jusqu'en Californie. Elle varie beaucoup, quant à la couleur, mais sa teinte reste uniforme dans chaque individu. Le type est bleu; il y en a de verts, vert-olive, vert bronzé grisâtre, vert bronzé pourpre; un exemplaire de la collection Janson, provenant de San Diego, en Californie, s'écarte un peu des autres sous le rapport de la coloration : il est violet-pourpre, avec le dos garni de sqamules brunes, visibles seulement par leur reflet légèrement doré.

25. C. sulcatus. — Fabr. *Entom. system.*, t. II, p. 220, 20. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 282.

Antilles.

26. C. validus. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 283.

Antilles.

Ce n'est peut-être qu'une forme plus robuste du précédent.

27. C. longicollis. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 284.

Nouvelle-Grenade.

28. C. morio. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 284.

Mexique : Oajaca.

29. C. Perrisi. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 285.

Amérique équatoriale.

30. C. ERYTHROLOMA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 282, pl. VI, fig. 1.

Chili.

31. C. FRYI. — *Niger, pilis squamiformibus flavescentibus dense vestitus; antennis cyaneis, articulo tertio quarto minore; prothorace lateribus vitta abbreviata ferruginea; elytris striatis, interstitiis alternis paulo elevatioribus, ferrugineo-marginatis.*

Long. 38 mill., lat. 13 mill.

Régulièrement bombé, en ovale allongé, noir, densément revêtu de poils squamiformes flavescents, une bande raccourcie de chaque côté sur le prothorax et le bord latéral des élytres ferrugineux. Antennes bleues, leur troisième article notablement plus court que le quatrième, noir ainsi que les deux premiers. Prothorax à peine plus long que large, médiocrement bombé, assez brusquement rétréci au sommet, portant un pointillé fin et serré, quelques gros points disséminés et quelques rides longitudinales peu marquées. Écusson triangulaire, sillonné au milieu, bidenté en avant. Élytres de la largeur du prothorax, de forme ordinaire, striées, intervalles impairs un peu plus larges et plus élevés que les autres. Dessous et pattes comme le dessus sauf les tarses qui sont noirs garnis de poils à reflet bleu.

Pérou.

Système de coloration de l'*erythroloma*. Je n'en ai vu qu'une femelle dans la collection de M. Fry.

32. C. OBSCURUS. — CAST. *Silb. Rev.*, t. IV, p. 15. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 286, pl. V, fig. 9.

Antilles.

33. C. HERBSTI. — ERICHS. *Zeitschr. f. de Entom.*, t. III, p. 82. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 287.

Amérique méridionale.

34. C. VIRGINALIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 288.

Yucatan : Merida.

35. C. CHALCANTHEUS. — CAND. *Monog.*, t. I, p. 288.

Brésil et Colombie.

36. C. CIRCUMDUCTUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 289.

État de Vera-Cruz.

37. C. ANGUSTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 290, pl. VI, fig. 4.

Mexique : Oajaca.

38. C. WEBBI. — LEC. *Proceed. Acad. Phil.*, 1854, p. 225.

Californie ; San Diego.

3me SECTION.

39. C. VIRIDIPILIS. — SAY, *Ann. Lyc.* t. I, p. 257. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 290, pl. VI, fig. 2.

États-Unis du sud.

40. C. SMARAGDINUS. — LEC. *Proceed. Acad. Phil.*, 1854, p. 225.

Californie : San Diego.

41. C. BOUCARDI. — *Elongatus, niger, squamulis griseis tectus; antennis pectinatis; prothorace latitudine sesqui longiore, punctulato, sparsim grosse punctato; elytris profunde sulcatis, sulcis punctatis.*

Long. 24 mill., lat. 6 mill.

Cette espèce a la tournure du *viridipilis*, mais elle en diffère par sa couleur grise, sa forme plus atténuée aux extrémités, son prothorax portant, outre le pointillé ordinaire, de gros points visibles à l'œil nu, ses élytres plus profondément sillonnées, etc.

La pectination des antennes du mâle est aussi très-différente : les lamelles des articles sont larges et obliquement coupées à partir du milieu.

Je n'en ai vu qu'un ♂, provenant de Cuernavaca, au Mexique, et appartenant à M. Boucard.

## SEMIOTUS.

Eschs. in Thon, *Entom. Arch.*, 1829, t. II, p. 31,

J'ai quelque peu modifié l'arrangement des espèces de ce genre. Les sections I, IV, V, VI et VII sont devenues les sections I, II, III, IV et V; les sections II, III et VIII ont été fondues et constituent ici les sections VI et VII. On verra dans le tableau ci-dessous sur quels caractères elles ont été établies.

A Chaperon épineux.
- *a* Une seule épine médiane. . . . . *Section I.*
- *aa* Deux épines au moins.
  - α Élytres avec ou sans bandes noires; celles-ci dans le premier cas ne dépassant pas le nombre de trois (1).
    - * Une seule bande noire sur le prothorax quand il en existe . . . . . *Section II.*
    - ** Deux bandes noires . . . . . *Section III.*
  - αα Plus de trois bandes sur chaque élytre.
    - * Élytres ornées de quatre à six raies noires . . . . *Section IV.*
    - ** Plus de six raies noires. . . . . *Section V.*

AA Chaperon inerme.
- *a* Une seule épine au sommet des élytres. . . . . *Section VI.*
- *aa* Élytres biépineuses ou tronquées au bout . . . . . *Section VII.*

### Section I.

1. *S. imperialis.* 2. *S. cuspidatus.*

### Section II.

A Élytres jaunes en avant, noires dans leur moitié postérieure.
- *a* Antennes noires au sommet. . . . . 15. *S. caracasanus.*
- *aa* Antennes jaunes au sommet.
  - α Élytres uniépineuses au bout . . . . . 16. *S. zonatus.*
  - αα Élytres biépineuses au bout. . . . . 17. *S. chontalenus.*

AA Élytres unicolores ou avec des bandes longitudinales discolores.
- *a* Intervales des stries inégalement élevés. . . . . 13. *S. Fryi.*
- *aa* Intervalles égaux.
  - α Des taches noires, arrondies, sur le prothorax . . . 14. *S. insignis.*
  - αα Prothorax unicolore ou avec une bande.

(1) Il arrive quelquefois que la bande moyenne se divise en avant (*S. fascicularis*). Il paraît alors y en avoir quatre.

* Trois bandes noires sur chaque élytre.
× La bande moyenne divisée en avant . . . . . 11. *S. fascicularis.*
×× La bande moyenne entière.
\+ Antennes noires.
o Élytres finement ponctuées-striées. . . 8. *S. fulvicollis.*
oo De simples lignes de points très-faibles sur les élytres . . . . . 9. *S. Jansoni.*
++ Antennes jaunes . . . . . 7. *S. fuscatus.*
** Deux bandes noires sur chaque élytre.
α Bords latéraux du prothorax formant un coude brusque avant d'arriver aux angles antérieurs.
* Une tache ponctiforme noire vers le milieu du bord latéral du prothorax . . 5. *S. approximatus.* 6. *S. decoratus.*
** Pas de tache noire sur le bord latéral du prothorax. . . . . 3. *S. suturalis.* 4. *S. sanguinicollis.*
αα Bords latéraux du prothorax régulièrement courbes ou droits. . . . . 10. *S. bilineatus.* 12. *S. nigriceps.*

## Section III.

A Antennes jaunes . . . . . 20. *S. illustris.*
AA Antennes noires.
*a* Une petite tache noire sur le bord latéral du prothorax.
α Ces taches situées sur deux saillies des bords latéraux. 25. *S. angusticollis.*
αα Ces taches situées en arrière de ses saillies quand elles existent.
* Trois bandes noires sur chaque élytre . . . . . 18. *S. tæniatus.*
** Deux bandes noires.
× Bandes du prothorax flexueuses . . . . . 21. *S. intermedius.*
×× Ces bandes droites.
\+ Élytres striées . . . . . 23. *S. affinis.*
++ Élytres sans stries . . . . . 24. *S. Candezei.*
*aa* Pas de tache noire sur le bord latéral du prothorax.
22. *S. longus.* 19. *S. Lafertei.* 26. *S. convexicollis.*

## Section IV.

A Une seule bande noire sur le prothorax . . . . 28. *S. virgatus.* 29. *S. Illigeri.*
AA Deux ou trois bandes, ou une tache trifide en avant sur le prothorax.
*a* Une seule tache trifide en avant . . . . . 38. *S. elegantulus.*
*aa* Deux ou trois bandes sur le prothorax.
α Deux bandes.
* Ces bandes s'étendant latéralement jusqu'au rebord marginal.
× Suture des élytres noire.
\+ Corps large. . . . . 27. *S. regalis.*
++ Très-étroit . . . . . 34. *S. acutus.*
×× Suture des élytres jaune . . . . . 30. *S. Germari.* 31. *S. punctatus.*

** Ces bandes étroites.
× Prothorax presque aussi large que long . . . 32. *S. Sommeri.*
×× Prothorax notablement plus long que large.
+ Trois épines au front . . . . . 33. *S. superbus.*
++ Deux épines.
o Premier intervalle des stries jaune jusqu'au bout . . . . . 35. *S. bispinus.*
oo Premier intervalle noir en arrière . . . 36. *S. multifidus.*
αα Trois bandes . . . . . 37. *S. trilineatus.*

## Section V.

A Prothorax glabre.
*a* Antennes rougeâtres . . . . . 41. *S. glabricollis.*
*aa* Antennes noires.
α Des taches noires aux angles antérieurs du prothorax. 42. *S. Reaumuri.*
αα Pas de taches noires aux angles antérieurs du prothorax.
AA Prothorax pubescent.
*a* Élytres non striées.
α Corps large. . . . . 40. *S. cristatus.*
αα Corps étroit . . . . . 39. *S. Linnei.*
*aa* Élytres striées.
α Une fine carène longitudinale au milieu du prothorax . 44. *S. punctatostriatus*
αα Pas de carène sur le prothorax. . . . . 45. *S. auripilis.*

## Section VI.

A Rouge, l'extrémité des élytres noire. . . . . 49. *S. Schaumi.*
AA Jaune.
*a* Pas de bandes noires sur le prothorax . . . . . 47. *S. ligneus.*
*aa* Des bandes noires sur le prothorax.
α Une seule bande . . . . . 46. *S. distinctus.*
αα Deux bandes . . . . . 48. *S. striatus.*
*aaa* Une tache centrale noire sur le prothorax. . . . . 53. *S. scitulus.*
AAA Verdâtre.
*a* Téguments villeux. . . . . 50. *S. seladonius.*
*aa* Téguments glabres.
α Prothorax immaculé . . . . . 51. *S. virescens.*
αα Prothorax maculé . . . . . 52. *S. fusiformis.*

## Section VII.

A Taille grande (25 à 30 millimètres) . . . . . 54. *S. luteipennis.*
AA Taille petite (15 à 20 millimètres, au plus).
*a* Corps fortement cambré, élytres gibbeuses à la base.
α Élytres entières au bout . . . . . 60. *S. capucinus.*
αα Élytres échancrées au bout.

* Une fossette scutellaire. . . . . 59. *S. conicicollis.*
** Pas de fossette scutellaire. . . . . 58. *S. stramineus.*
*aa* Corps normalement arqué en dessus.
α Une carène longitudinale sur le prothorax.
* Élytres noires latéralement . . . . . 61. *S. nigricollis.*
** Élytres unicolores . . . . . 62. *S. diptychus.*
αα Carène du prothorax nulle ou peu marquée.
* Élytres jaune-verdâtre, unicolores.
× Deux taches noires sur le prothorax . . . . . 55. *S. brevicollis.*
×× Une seule tache sur le prothorax.
+ Celui-ci pubescent . . . . . 56. *S. quadricollis.*
++ Glabre . . . . . 57. *S. juvenilis.*
** Élytres noires ou maculées.
× Élytres noires . . . . . 63. *S. morio.*
×× Élytres testacées, noires latéralement . . . . 64. *S. limbaticollis.*

---

1re SECTION.

1. S. IMPERIALIS. — Guér. *Rev. Zool.*, t. VII, p. 15. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 298.

Nouvelle-Grenade; Ecuador.

2. S. CUSPIDATUS. — Chev. *Coléopt. du Mex.*, fasc. 1. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 299.

Mexique, Amérique centrale, Nouvelle-Grenade, Ecuador.

2me SECTION.

3. S. SUTURALIS. — Fabr. *Entom. syst.*, t. II, p. 224, 35. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 305.

Guyane et Bas-Amazone.

4. S. SANGUINICOLLIS. — Blanch. *Voy. de d'*Orbigny, *Col.*, p. 128. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 304.

*Semiotus speciosus.* — Erichs. *Wiegm. Arch.*, 1847, p. 71, 1. — Cand. *Monogr.* t. I, p. 337.

J'ai vu des exemplaires de ces deux types dans la collection de M. Janson. Le premier, découvert primitivement dans la

Bolivie, a été retrouvé par M. Buckley dans la province de Macas (Ecuador). Ceux du second que j'ai pu examiner provenaient de Tabatinga, sur le Haut-Amazone. Ce sont bien évidemment des variétés d'une seule et même espèce; je suis même porté à croire qu'elles ne diffèrent pas spécifiquement du *S. suturalis*, du Bas-Amazone et de la Guyane, mais pour trancher cette question il faudrait voir des spécimens de la région qui sépare ces points extrêmes. Indépendamment des couleurs, qui varient du rouge corail au jaune clair, l'espèce actuelle a le prothorax plus étroit, même chez la femelle, que le *suturalis*. C'est la seule différence de quelque valeur qu'elle présente.

5. APPROXIMATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 305.

Cayenne.

6. S. DECORATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 306.

Cayenne.

7. S. FURCATUS. — FABR. *Entom. sys.*, 2, 224, 35. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 307.

Guyane et Para.

8. S. FULVICOLLIS. — BLANCH. *Voy. de d'*ORBIGNY, *Col.*, p. 129. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 308.

Guyane; Brésil; Bolivie.

9. S. JANSONI. — *Elongatus, glaber, nitidus, luteus, fronte basi nigra, spinis tribus, media brevi; prothorace elongato, parallelo, plaga longitidinali media nigra; elytris sutura et margine late vittaque media nigris; pedibus nigro-marginatis.*

Long. 20-25 mill., lat. 4-5 $^1/_2$ mill.

Allongé, glabre et brillant, jaune avec la base du front, une large bande longitudinale n'atteignant le bord antérieur que par une avance médiane sur le prothorax, l'écusson, trois bandes sur les élytres : une suturale, une marginale raccourcie, une

troisième allant du calus huméral à l'extrémité, généralement rétrécie dans son quart antérieur, noirs. Front triépineux. Antennes noires avec les deux premiers articles jaunes. Prothorax allongé, aussi étroit à la base qu'au sommet, un peu bombé au milieu dans le sens longitudinal, éparsément ponctué, ses bords latéraux assez épais, ses angles antérieurs assez saillants, arrondis, les postérieurs sensiblement divergents. Écusson échancré en avant. Élytres plus larges que le prothorax, offrant, outre la strie suturale, des stries de points plus accusées en arrière qu'en avant. Dessous jaune avec une bande latérale noire ne s'étendant pas sur l'abdomen; pattes jaunes bordées extérieurement de noir.

Ecuador : province de Macas. (M. Buckley.)

Plusieurs spécimens dans la collection de M. Janson à qui je le dédie.

10. S. BILINEATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 308.

Ecuador.

11. S. FASCICULARIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 309.

Nouvelle-Grenade.

12. S. NIGRICEPS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 310.

Brésil.

13. S. FRYI. — *Niger, nitidus; antennis latis nigris, basi rufis; prothorace a basi angustato, lateribus late rufo-luteis; elytris latis, convexis, profunde punctato-striatis, interstitiis convexis, tertio et septimo elevatioribus margineque rufo-luteis.*

Long. 27 mill., lat. 7 mill.

Large, brillant, noir avec la tête, le premier article des antennes, les bords latéraux du prothorax, les troisième et septième intervalles des stries sur les élytres, la portion antérieure des quatrième, cinquième et neuvième, ainsi que le bord exté-

rieur, d'un beau jaune rougeâtre. Épines de la tête courtes. Antennes à articles très-larges à partir du troisième. Prothorax allongé, cambré, rétréci à partir de la base, largement sillonné le long du bord latéral, légèrement canaliculé au milieu, très-finement et éparsément pointillé. Écusson subarrondi, sillonné. Élytres larges, peu atténuées en arrière, profondément striées, les stries ponctuées, les intervalles convexes, ceux colorés en jaune un peu plus élevés que les autres. Dessous noir avec une série de taches au milieu et sur les côtés rougeâtres. Pattes rouges, tarses noirs.

Cette remarquable espèce est de Quito. Je n'en ai vu qu'un exemplaire dans la collection de M. Fry, à qui je la dédie.

14. S. INSIGNIS. — CAND. *Monogr.* t. I, p. 311, pl. VI, fig. 9.

Amérique centrale; Chontales.

15. S. CARACASANUS. — ROJAS, *Rev. Zool.*, 1855, p. 160. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 311, pl. VI, fig. 13.

Vénézuéla.

16. S. ZONATUS. — *Niger, nitidus; antennis nigris, apice flavis; prothorace elongato, flavo-marginato; elytris subtiliter striato-punctatis, apice oblique emarginatis, dimidia parte antica flavis.*

Long. 14 mill., lat. 5 mill.

Noir et brillant, glabre, les trois derniers articles des antennes, le bord latéral du prothorax, la moitié antérieure des élytres, sauf la fossette scutellaire, et les côtés de l'abdomen d'un jaune clair. Front armé de deux épines assez longues. Prothorax allongé, un peu rétréci en arrière et en avant, médiocrement convexe, éparsément ponctué, sans rebord latéral. Écusson un peu transversal, sans échancrure en avant. Élytres plus larges que le prothorax, obliquement échancrées et épineuses au bout, finement striées-ponctuées. Dessous et pattes noirs et brillants, sauf les côtés de l'abomen.

Ecuador, province de Macas. Trouvé par M. Buckley.

Deux exemplaires dans la collection de M. Janson.

17. S. CHONTALENUS. — *Niger, nitidus; antennis apice flavis; prothorace elongato, late aurantiaco-marginato; elytris subtiliter punctatis, stria suturali unica, apice transverse emarginatis, bispinosis, dimidia parte antica aurantiaca.*

Long. 17 mill., lat. fere 4 mill.

Noir et brillant, glabre, les quatre derniers articles des antennes flaves, les bords latéraux du prothorax, largement, et la moitié antérieure des élytres, jaune-orange. Front biépineux en avant, marqué de quelques points. Prothorax très-allongé, rétréci peu à peu d'arrière en avant, marqué de quelques points épars vers le milieu, sans rebord latéral. Écusson subtriangulaire, noir. Élytres un peu plus larges que le prothorax, transversalement échancrées et biépineuses au bout, ne présentant qu'une strie, près de la suture, sa fossette scutellaire profonde, demi-circulaire. Dessous noir avec les côtés de l'abdomen jaunes. Pattes jaunes avec les tarses noirs.

Nicaragua : Chontales.

Un exemplaire trouvé par M. E. M. Janson. La coloration des élytres de cette espèce, ainsi que de la précédente, n'a d'analogue que chez le *S. caracasanus*. Quant à celle des antennes, elle est particulière, dans le genre, à ces deux nouvelles espèces et rappelle tout à fait certains *Eudactylus* et *Smilicerus*.

3me SECTION.

18. S. TÆNIATUS. — ERICHS. *Ins. peruan.* in WIEGM. *Arch.*, 1847, p. 75. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 312.

Ecuador.

19. S. LAFERTEI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 313.

Mexique.

20. S. ILLUSTRIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 313.

Guyane : Cayenne.

21. S. INTERMEDIUS. — HERBST, *Käf.*, t. X, pp. 8, 21, pl. CLIX, fig. 4. — CAND. *Monogr.*, t. I. p. 314.

Brésil; Rio.

22. S. LONGUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 315.

Mexique.

23. S. AFFINIS. — GUÉRIN, Voy. d'OSCULATI in *Verh. Zool. Bot. Ver. Wien*, 1855, p. 578, 25. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 316.

Ecuador.

24. S. CANDEZEI. — *Elongatus, glaber, nitidus, capite spinis duabus acutis, brevibus remotis, sanguineo, macula verticali et frontali nigris; thorace luteo-rufescente, vittis duabus antrorsum abbreviatis punctoque marginali nigris, angulis posticis divaricatis, scutello emarginato fossulaque scutellari nigris; elytris punctato-striatis, luteis, sutura postice latius vittaque lata laterali antice abbreviata nigris, interstitiis planis, stria suturali sulciformi.*

Long. 24-28 mill.

KIRSCH, *Berlin. Zeitschr.*, 1866, p. 180.

Bogota; rencontré aussi par M. Buckley dans l'Ecuador; il pourrait bien n'être qu'une variété de l'*affinis*.

La fossette scutellaire n'est noire que lorsque la bande suturale s'avance jusqu'à l'écusson.

25. S. ANGUSTICOLLIS. — BLANCH. *Voy. de d'Orbigny*, col., p. 127. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 317.

Brésil.

26. S. CONVEXICOLLIS. — BLANCH. *loc. cit.*, p. 128. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 318.

Guyane? Bolivie.

4me SECTION.

27. S. REGALIS. — GUÉR. *Rev. Zool.*, t. VII, 1844, p. 16. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 319.

Nouvelle-Grenade; Ecuador.

28. S. VIRGATUS. — ERICHS. *Ins. peruan.* in *Wiegm. Arch.*, 1847, p. 76. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 320.

Nouvelle-Grenade; Ecuador; Pérou.

29. S. ILLIGERI. — GUÉR. *Rev. Zool.*, t. VII, 1844, p. 16. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 321.

Nouvelle-Grenade; Ecuador; Pérou.

30. S. GERMARI. — GUÉR. *Loc. cit.*, p. 17. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 322.

Nouvelle-Grenade.

31. S. PUNCTATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, 322.

Vénézuéla.

32. S. SOMMERI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 325, pl. VI, fig. 11.

Cette espèce a ordinairement quatre raies sur les élytres, au lieu de trois, ainsi qu'il est dit dans le texte. M. Kirsch a déjà relevé cette erreur en lui comparant l'espèce suivante.

Nouvelle-Grenade; Ecuador.

33. S. SUPERBUS. — *Elongatus, nitidus, glaber, capite trispinoso, luteo, lunula verticali nigra; thorace disco punctato, lateribus sparsim punctulatis, luteo, medio sanguineo, vittis duabus abbreviatis nigris, angulis anticis obtusis, paulo prominentibus, posticis paulo divergentibus; fossula scutellari scutelloque nigris, hoc disco sanguineo; elytris sulfureis, sutura*

*angusta vittisque quatuor nigris; subtus sanguineus, utrinque vitta nigra, lateribus sulfureis.*

Long. 25 mill.

Kirsch, *Berlin. Zeitsch.*, 1866, p. 181.

Bogota; trouvé également par M. Buckley dans l'Ecuador.

34. S. acutus. — *Angustus, nitidus, glaber, fronte trispinosa, spinis luteis; prothorace longo, fortius punctato, linea media margineque luteis; scutello pallido, nigro-cincto; elytris elongatis, a basi attenuatis, apice acutissimis luteis, sutura vittisque quatuor latis, nigris; subtus nigro, flavo circumcincto, medio pedibusque rufescentibus.*

Long. 20-25 mill., lat. 4-5 mill.

Étroit et allongé, très-atténué et aigu en arrière, glabre et brillant; couleur dominante noire, avec les épines de la tête, une ligne médiane et les bords, sur le prothorax et quatre lignes, les impaires raccourcies, plus les épipleures, aux élytres, jaunes. Front armé de trois épines, la médiane plus courte. Antennes noires, les deux premiers articles jaunes. Prothorax étroit et long, parallèle, assez ponctué, ses bords latéraux épaissis, ses angles antérieurs ronds et saillants, les postérieurs assez divergents. Écusson échancré en avant, de couleur claire, bordé de noirâtre. Élytres plus larges que le prothorax aux épaules, rétrécies presque rectilinéairement depuis ce point jusqu'au sommet, où elles sont très-acuminées, peu distinctement striées-ponctuées, les intervalles finement réticulés. Dessous pubescent, noir bordé de jaune, rougeâtre au milieu; pattes rougeâtres.

Ecuador : province de Macas. M. Buckley. L'un des plus sveltes du genre. (Coll. Jans.)

35. S. bispinus. — *Elongatus, glaber, nitidus; fronte spinis approximatis duabus longiusculis, prothorace longo, parallelo, punctato, medio obscure rufo, marginibus luteo, vittis duabus nigris; scutello nigro; elytris subtiliter striato-punctatis, sutura, stria marginali vittisque quatuor nigro-brunneis.*

Long. 23 mill., lat. 5 mill.

Allongé, glabre et brillant, jaune, la base du front, deux bandes parallèles sur le prothorax n'atteignant pas le bord antérieur, et l'écusson noirs, l'intervalle entre les bandes du prothorax rouge, la suture, la strie marginale et les intervalles pairs des élytres d'un brun plus ou moins foncé. Front armé de deux épines rapprochées, assez longues. Antennes noires, leur base rougeâtre. Prothorax allongé, parallèle dans ses trois quarts postérieurs, rétréci assez brusquement dans son quart antérieur, médiocrement convexe, assez ponctué, ses angles antérieurs un peu saillants, arrondis, les postérieurs divergents. Écusson échancré en avant. Élytres plus larges que le prothorax, atténuées en arrière, finement striées-ponctuées, acuminées au sommet. Dessous rougeâtre, les côtés du métasternum et la suture prosternale noirs, les bords de l'abdomen jaunes; pattes rougeâtres.

Ecuador; province de Macas. M. Buckley. Je le décris d'après un exemplaire de la collection de M. Janson.

36. S. MULTIFIDUS. — *Elongatus, nitidus, rufus; antennis nigris basi rufis; prothorace parallelo, convexo, sparsim punctato, vittis duabus nigris; elytris luteis, vittis quatuor nigris.*

Long. 22 mill., lat. 5 mill.

Rougeâtre, lisse et brillant, le prothorax marqué de deux bandes noires parallèles, parfois presque effacées, réunies en arrière quand elles sont bien marquées, l'écusson noir, les élytres jaunes avec quatre raies noires, raccourcies en avant, une suturale détachée de la suture en avant, une juxta marginale, les deux médianes confondues à l'extrémité. Antennes noires, les deux premiers articles rouges. Front armé de deux épines aiguës. Prothorax allongé, parallèle sur les côtés, rétréci dans son cinquième antérieur, convexe, très-éparsément ponctué, impressionné dans le sillon juxta marginal latéral, ses angles postérieurs un peu divergents, carénés. Élytres un peu plus larges que le prothorax, marquées de séries de points rapprochées par paire, les intervalles noirs plus étroits. Dessous et

pattes jaune-rougeâtre avec les parapleures du métasternum noirs.

Colombie. (Coll. Saunders.)

37. S. TRILINEATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 324.

Nouvelle-Grenade.

38. S. ELEGANTULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 325.

Nouvelle-Grenade.

5me SECTION.

39. S. LINNEI. — GUÉR. *Rev. Zool.*, 1844, p. 17. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 325, pl. VI, fig. 14.

Nouvelle-Grenade.

Une variété de l'Ecuador a la tête et le protorax rouges. Il est remarquable que cette couleur remplace souvent le jaune dans les *Semiotus* de la région andéenne, exemple *S. speciosus* Er. (*sanguinicollis* Bl.), *virgatus* Er., *regalis*, *Schaumi* Guér., etc.

40. S. CRISTATUS. — *Latus, brunneus, pubescens; fronte nigra, spinis brevibus tribus sanguineis; prothorace latitudine paulo longiore, apice angustato planiusculo, fortiter marginato, punctato, nigro, linea media marginibusque sanguineis; elytris prothorace latioribus, striato-punctatis, interstitio tertio basi elevato.*

Long. 2 mill., lat. 6 mill.

Assez large, comparé à ses congénères, pubescent sauf les élytres, noir, les élytres brunes, les trois épines du front, le pourtour du prothorax et une ligne médiane sur cette pièce, l'écusson et les pattes rouges. Front peu excavé, son bord antérieur présentant trois épines courtes, la médiane plus avancée que les deux autres. Antennes assez longues, noires avec la base rouge. Prothorax pas beaucoup plus long que large, arqué sur

les côtés, assez plat, finement ponctué, ses bords latéraux fortement rebordés, ses angles antérieurs abaissés et un peu saillants en avant, les postérieurs courts, divergents. Écusson échancré en avant. Élytres plus larges que le prothorax, peu atténuées en arrière, un peu déprimées vers la suture, striées-ponctuées, le troisième intervalle élevé en forme de crête à la base. Dessous assez pubescent.

Colombie.

Un exemplaire dans la collection de M. Janson, sans indication plus précise d'habitat.

41. S. GLABRICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 326.

42. S. REAUMURI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 327.

43. S. BUCKLEYI. — *Elongatus, nitidus, glaber, luteus, fronte spinis tribus, basi nigra; prothorace longo, parum convexo, plaga dorsali nigra, medio fortiter punctato, lateribus valde marginatis; scutello emarginato, nigro, medio pallido; elytris a basi attenuatis apice acuminatis, sutura lineisque novem nigris; subtus rufus, lateribus obscuris pubescentibus.*

Long. 22-30 mill., lat. 5-7 mill.

Allongé, brillant, glabre en dessus, jaune clair avec la base du front, une large bande, avancée en pointe au milieu vers le bord antérieur, sur le prothorax, le pourtour de l'écusson et neuf raies sur les élytres, plus la suture, noirs. Antennes assez fortement dentées, noires, les deux premiers articles jaunes. Front armé de trois épines, les externes assez longues. Prothorax long, un peu rétréci au sommet, peu convexe, assez fortement ponctué sur la tache noire, son rebord latéral épais, ses angles antérieurs bien marqués, arrondis au bout, les postérieurs un peu divergents, la saillie antéscutellaire élevée. Écusson échancré en avant, tranversal. Élytres plus larges que le prothorax, atténuées en arrière, présentant des lignes de points distinctes seulement

sur les côtés et en arrière. Dessous rougeâtre, noir et pubescent latéralement, le pourtour jaune. Pattes testacées.

Ecuador : province de Macas.

Cette belle espèce, dont j'ai vu deux exemplaires dans la collection de M. Janson, a été découverte par M. Buckley, à qui je la dédie.

44. S. PUNCTATO-STRIATUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 528.

Nouvelle-Grenade.

45. S. AURIPILIS. — *Elongatus, parum nitidus, brunneus; fulvo-pubescens; fronte basi nigra, spinis tribus; prothorace latitudine longiore, a basi angustato, plano, punctato, lateribus carinatis; scutello subrotundato; elytris testaceis ad suturam depressis, profunde striatis, striis punctatis, interstitiis convexis; subtus obscuro, pubescente, pedibus brunneis.*

Long. 24 mill., lat. 5 mill.

Très-voisin du précédent, mais plus étroit en proportion; brun rougeâtre avec la base du front et les côtés du disque prothoracique noirs, l'écusson et les élytres jaune testacé, plus clair vers les bords latéraux, revêtu, sauf les élytres, d'une pubescence couchée, soyeuse, d'un jaune d'or. Front impressionné, ponctué, triépineux. Antennes brunâtres. Prothorax plus long que large, rétréci en avant à partir de la base, avec les côtés un peu arqués, plat, ponctué, ses bords latéraux surmontés d'une forte carène un peu courbe, qui s'arrête avant d'atteindre les angles antérieurs. Écusson subarrondi. Élytres plus larges que le prothorax, curvilinéairement atténuées en arrière à partir du milieu, déprimées vers la suture, profondément striées, les stries ponctuées, les intervalles convexes, le troisième élevé à la base. Dessous brun noirâtre varié de rougeâtre et pubescent; pattes brunes.

Bolivie. (Coll. Janson.)

6me SECTION.

46. S. DISTINCTUS. — HERBST, *Käf.*, t. X, pp. 5, 21, pl. CLIX, fig 3. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 301.

Brésil méridional.

47. S. LIGNEUS. — LINN. *Syst. Nat.*, t. II, pp. 652, 7. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 302.

Brésil; principalement dans la vallée de l'Amazone.

48. S. STRIATUS. — GUÉR. Voy. d'OSCULATI, in *Verh. Zool. Bot. Ver. Wien*, 1855, p. 579. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 329.

Ecuador : Rio Napo.

49. S. SCHAUMI. — GUÉR. *Rev. Zool.*, t. VII, p. 17. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 330, pl. VI, fig. 10.

Nouvelle-Grenade.

Dans une variété de l'Ecuador on remarque une raie d'un jaune clair, occupant la partie moyenne du troisième intervalle des stries, sur les élytres.

50. S. SELADONIUS. — GUÉR. *Rev. Zool.*, t. VI, p. 16. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 330.

Nouvelle-Grenade.

51. S. VIRESCENS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 331.

Nouvelle-Grenade.

52. S. FUSIFORMIS. — *Elongato-ellipticus, glaber, nitidus, capite luteo, macula verticali nigra, fronte impressa, emarginata; thorace subquadrato, remote punctulato, angulis anticis rotundatis, productis, posticis acutis, retrorsum spectantibus, lateribus anguste marginatis ciliatis, luteo, medio vitta fusiformi nigra; elytris punctato-striatis, apice mucronatis, virescenti sul-*

*fureis, striis nigro-tinctis. Subtus brunneo testaceus, sparsim pubescens, prosterno punctato, utrinque nigro vittato.*

Long. 13 mill.

Kirsch, *Berlin. Zeitschr.*, 1866, p. 181.

Nouvelle-Grenade : Bogota.

53. S. scitulus. — *Elongato-ellipticus, glaber, nitidus, antennis nigris, basi rufis; fronte rufa, medio emarginata; prothorace subquadrato, parum convexo, sparsim punctato, angulis anticis rotundatis, posticis leviter divaricatis, carinatis, luteo, plaga rhomboidali nigra; scutello nigro; elytris convexis, brevibus, apice acuminatis, striato-punctatis, luteis, sutura vittisque tribus obscuris.*

Long. 11 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Petit, elleptiquement allongé, très-acuminé au bout, bombé, glabre et brillant, jaune clair avec la tête rougeâtre, les antennes, une tache rhomboïdale sur le prothorax et l'écusson noirs, la suture et trois raies sur chaque élytre, n'atteignant pas la base, noirâtres. Front échancré, assez fortement ponctué en avant. Prothorax carré, un peu bombé, un peu inégal vers les bords, éparsément ponctué, ses angles antérieurs petits, saillants, arrondis, les postérieurs courts, un peu divergents, carénés. Écusson triangulairement oblong. Élytres convexes, arquées sur les côtés, très-aiguës au sommet, striées-ponctuées. Dessous et pattes jaune-rougeâtre avec une ligne de chaque côté obscure.

Ecuador. Buckley. (Coll. Janson.)

7me SECTION.

54. S. luteipennis. — Guér. *Mag. de Zool.*, 1838, t. IX, pl. CCXXVIII, fig. 2. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 300.

Chili.

55. brevicollis. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 332.

Nouvelle-Grenade.

56. S. QUADRICOLLIS. — *Subelongato-ellipticus, capite thoraceque dense punctatis, fusco-pilosis, rufis, macula verticali vittaque thoracis media nigris, fronte parum impressa, antice vix emarginata, utrinque subtuberculata ; antennis (articulo primo excepto) nigris; thorace subquadrato, planiusculo ; elytris convexis ad medium usque parallelis, apice emarginatis, punctato-striatis, sordide virescenti testaceis, striis obscuris, interstitiis convexis ; subtus rufo-ferrugineus, thorace dense punctato appresse piloso, prosterno medio lævi atque glabro, abdomine lateribus subtilissime punctato et sparsim piloso, medio lævi.*

Long. 12 mill.

KIRSCH, *Berlin. Zeitschr.*, 1866, p. 181.

57. JUVENILIS. — *Elongato-ellipticus, nitidus, fere glaber, virescenti-flavus; fronte impressa, basi nigra; prothorace subquadrato, sparsim fortiter punctato, angulis posticis carinatis. vitta media fusiformi nigra; scutello subquadrato; elytris striis fortiter brunneo-punctatis, interstitiis postice convexis, apice emarginatis ; subtus pedibusque rufescentibus, sterni lateribus nigris.*

Long. 11 mill., lat. 2 $^3/_4$ mill.

Petit, elliptiquement allongé, un peu bombé, médiocrement luisant, portant quelques cils épars sur les côtés, jaune verdâtre, la base du front et une petite bande fusiforme, raccourcie, sur le prothorax, noires. Front échancré, fortement ponctué. Antennes ? Prothorax presque carré, déprimé, un peu élevé longitudinalement au milieu, fortement ponctué, ses angles antérieurs courts, saillants, dirigés en avant, arrondis, les postérieurs divergents et fortement carénés. Écusson subquadrangulaire, un peu plus long que large. Élytres sensiblement plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, échancrées au bout, assez fortement ponctuées-striées, les points brunâtres, les intervalles convexes en arrière, la fossette scutellaire à peu près nulle. Dessous et pattes rougeâtres, avec la suture du prosternum et les côtés du métasternum noirs.

Colombie. (Coll. Janson.)

58. S. STRAMINEUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 333.

Nouvelle-Grenade.

59. S. CONICICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 333.

Nouvelle-Grenade.

60. S. CAPUCINUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 334.

Nouvelle-Grenade.

61. S. NIGRICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 335.

Nouvelle-Grenade.

62. S. DIPTYCHUS. — *Elongatus, parum nitidus, virescenti-flavus; fronte impressa, parum punctata et emarginata, rufescenti, vertice nigro maculata; antennis nigris, basi rufescentibus; prothorace plano, carina longitudinali media, dense punctato, pubescente, disco nigro, subquadrato; elytris prothorace latioribus, ultra medium parallelis, apice breviter emarginatis, striis profundis brunneo-punctatis, interstitiis convexis.*

Long. 13 mill., lat. 3 mil.

Allongé, peu brillant, pubescent, sauf les élytres, d'un flave verdâtre, le front rougeâtre avec une tache basilaire noire, le prothorax noir avec le pourtour flavescent. Front carré, peu ponctué, impressionné en avant, légèrement échancré. Antennes noires, leur base rougeâtre. Prothorax un peu plus long que large, subrectangulaire, plat, caréné longitudinalement au milieu, assez densément ponctué, ses angles antérieurs assez larges, arrondis, les postérieurs suivant la direction des bords latéraux, subcarénés. Écusson un peu oblong. Élytres visiblement plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au delà du milieu, brièvement échancrées au bout, fortement striées, les stries marquées de points brunâtres, les intervalles convexes dans toute leur longueur. Dessous et pattes rougeâtres.

Ecuador; Buckley. (Coll. Janson.)

63. S. MORIO. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 336.

Nouvelle-Grenade.

64. S. LIMBATICOLLIS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 336.

Nouvelle-Grenade.

### OISTUS.

CAND. *Monogr.*, t. I, p. 338.

1. O. CACICUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 339.

Mexique : Orizaba.

2. O. SPHENOSOMUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 339.

Mexique : Orizaba.

### CAMPSOSTERNUS.

LATR. *Ann. Soc. entom. Fr.*, t. III, p. 141.

Les espèces de ce beau genre sont principalement répandues dans l'Indo-Chine et la partie orientale de l'Hindoustan, y compris Ceylan. On en rencontre aussi, mais plus rarement, dans les grandes îles de la Malaisie et en Chine, mais ils disparaissent au delà. Dans l'énorme quantité d'insectes récoltés par M. Wallace pendant les onze années qu'il a passées dans l'archipel malais, il ne se trouve que trois *Campsosternus :* deux, capturés à Sarawack, et un à Singapore.

Vers l'ouest je n'en connais que deux (*C. Duponti, Delesserti*), qui dépassent la longitude du cap Comorin.

A Des bandes rouges non métalliques sur le prothorax.
  *a* Prothorax finement rebordé sur les côtés.
    α Angles postérieurs du prothorax carénés . . . . . 2. *C. Dohrni.*
    αα Angles postérieurs du prothorax non carénés. . . . 3. *C. Mouhoti.*
  *aa* Prothorax fortement rebordé latéralement.
    α Angles postérieurs du prothorax larges et épais. . . 4. *C. gemma.*
    αα Angles postérieurs aigus et divergents.

* Prothorax portant deux fortes impressions au moins sur le disque . . . . . 6. *C. œneus.*
** Prothorax sans impressions ou avec de petites impressions ponctiformes.
× Bande verte du milieu du prothorax étroite . . 1. *C. splendidus.*
×× Cette bande large . . . . . 5. *C. Stephensi.*

AA Pas de bandes rouges non métalliques sur le prothorax.
*a* Corps glabre en dessus.
α Quatre fossettes profondes sur le disque du prothorax . 15. *C. Bohemani.*
αα Prothorax plus ou moins impressionné mais sans fossettes arrondies et profondes.
* Prothorax aplati en dessus, sa surface unie et mate. 14. *C. aureolus.*
** Prothorax plus ou moins bombé en dessus ou avec une côte longitudinale au milieu.
× Une saillie costiforme longitudinale au milieu du prothorax.
+ Ses angles postérieurs divergents.
o Carénés . . . . . 17. *C. Duponti.*
oo Non carénés . . . . . 18. *C. Iris.*
+-+ Ces angles droits . . . . . 16. *C. Templetoni.*
×× Prothorax bombé au milieu, ses côtés seulement plus ou moins déprimés.
+ Prothorax sans impressions sur le disque.
o Ses angles postérieurs peu ou point carénés.
c Vert; prothorax finement et éparsément ponctué au milieu. . . . . 7. *C. fulgens.*
cc Bronzé; prothorax fortement ponctué partout . . . . . 9. *C. punctatus.*
oo Les angles fortement carénés . . . . 8. *C. latiusculus.*
+-+ Prothorax impressionné de chaque côté.
o Ponctué, très-finement granuleux et à demi mat.
c Élytres sans stries . . . . . 12. *C. violatus.*
cc Élytres striées-ponctuées . . . . . 13. *C. Plutus.*
oo Prothorax éparsément ponctué, très-brillant.
c Très-impressionné, vert brillant . . 10. *C. rutilans.*
cc Peu impressionné; élytres rouge-pourpre extérieurement . . . . . 11. *C. igneus.*

AA Corps, au moins le prothorax, pubescent en dessus.
*a* Élytres fortement ponctuées-striées ou offrant des lignes de poils blancs . . . . . 19. *C. tricolor.* 20. *C. Guerini.*
*aa* Élytres sillonnées ou unies.
α Pattes testacées ou ferrugineuses ou rouges.
* Prothorax plus long que large . . . . . 22. *C. Nietneri.*
** Prothorax moins long que large à la base.
× Élytres jaunes . . . . . 28. *C. Candezei.*
×× Élytres vertes, métalliques.

o Angles postérieurs du prothorax non divergents.
c Carénés . . . . . 24. *C. pallidipes.*
cc Non carénés . . . . . 25. *C. Mulleri.*
oo Ces angles divergents.
c Prothorax fortement et éparsément ponctué.
x Petit, d'un cuivreux bronzé . . . . . 21. *C. venustulus.*
xx Assez grand, vert doré . . . . . 23. *C. malaisianus.*
cc Prothorax densément et fortement ponctué . 32. *C. sobrinus.*
*αα* Pattes brunes ou métalliques.
* D'un noir violet, prothorax bleu. . . . . 27. *C. luctuosus.*
** Bronzé vert ou brun.
× A peine pubescent . . . . . 29. *C. Delesserti.*
+ Élytres à peine distinctement ponctuées . . 26. *C. Apollo.*
++ Élytres ponctuées.
×× Élytres pubescentes.
+ Pubescence très-forte et blanchâtre.
o Prothorax aussi long que large . . . . 33. *C. argentipilis.*
oo Prothorax plus large que long. . . . . 34. *Saundersi.*
++ Pubescence médiocre.
o Prothorax trapéziforme.
c Rebord latéral du prothorax prolongé jusqu'à l'extrémité des angles postérieurs . . . . . 30. *C. Cantori.*
cc Ce rebord s'effaçant avant d'atteindre les angles postérieurs . . . . . 31. *C. Mniszechi.*
oo Prothorax à côtés parallèles dans leur portion moyenne . . . . . 35. *C. parallelus.*

1. C. SPLENDIDUS. — HERBST, *Käf.*, t. X, p. 3, 10, pl. CLIX, 2. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 342.

Tenasserim.

2. C. DOHRNI. — WESTW. *Cab. of orient. Entom.*, 1848, p. 17, pl. XXXV, fig. 2. — CAND. *Monogr.*, t. I, p, 343.

Assam.

3. C. MOUHOTI. — *Chalybeo-viridis, nitidissimus, glaber, antennis nigris; prothorace lateribus sanguineo, convexo, sparsim punctato, angulis posticis haud carinatis; elytris punctatis, striatis.*

Long. 18 mill., lat. 5 mill.

D'un vert bleuâtre brillant avec les côtés du prothorax rouges, glabre. Front ponctué et impressionné. Antennes assez courtes,

noires, à articles 3-11 larges et ponctués. Prothorax plus large que long, un peu arrondi sur les côtés en avant, un peu bombé, éparsément ponctué dans la portion médiane, sans points sur les côtés, marqué de deux impressions vers la base, ses angles postérieurs divergents, courts, un peu bombés, mais non carénés. Écusson en ovale transversal. Élytres de la largeur du prothorax et parallèles jusqu'au milieu, acuminées à l'extrémité, très-finement striées, finement ponctuées et réticulées. Métathorax et pattes de la couleur des élytres, flancs du prothorax rouges, prosternum vert et abdomen d'un vert bronzé ; tarses noirs.

Laos.

Plusieurs exemplaires de cette petite et jolie espèce, envoyée par Mouhot, existent dans les collections de MM. Janson et Saunders et dans la mienne. Elle se rapproche du *C. Dohrni*, mais s'en distingue par plusieurs caractères importants.

4. C. GEMMA. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 344.

Chine : Schang-Hai.

5. C. STEPHENSI. — HOPE, *Zool. miscel.*, 1829, p. 28. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 344.

Népaul.

6. C. ÆNEUS. — *Aeneus, nitidus, glaber ; fronte valde concava ; prothorace longitudine latiore, lateribus medio parallelis, medio subelevato nitidissimo, utrinque deplanato, granulato, opaco, rubescente, dorso impresso, angulis posticis valde divaricatis ; elytris tenuiter reticulatis ; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 34 mill., lat. 10 $^1/_2$ mill.

Entièrement d'un bronzé assez brillant, glabre, les côtés du prothorax légèrement teinté de rouge sombre. Front fortement concave. Antennes noires. Prothorax plus large que long, ses bords latéraux parallèles dans leur partie moyenne, assez brus-

quement rétréci au sommet, plat, avec le milieu un peu élevé, celui-ci lisse brillant et éparsément ponctué, les côtés finement granuleux et mats, présentant une ou deux impressions assez profondes et plus ou moins réunies, de chaque côté de la portion élevée et lisse, ses angles postérieurs longs, assez grêles, très-divergents, leur pointe aiguë et un peu recourbée en arrière. Écusson fortement transversal, obcordiforme. Élytres plus larges que le prothorax, atténuées à partir de la base, très-finement réticulées, aiguës au bout, présentant à la base des traces de sillons et une élévation de chaque côté de la fossette scutellaire. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

Bengale. (Coll. Fry.)

Cette espèce se distingue aisément de toutes les autres : par la coloration rouge des côtés du prothorax, de celles qui n'ont pas de rouge, et des précédentes par le peu d'intensité de cette teinte; du *Stephensi* notamment dont elle se rapproche le plus par les fortes impressions du disque prothoracique et le parallélisme des bords latéraux de cette pièce.

7. C. FULGENS. — FABR. *Entom. syst.*, t. II, p. 220, 22. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 345.

Chine méridionale.

8. C. LATIUSCULUS. — *Viridis, nitidus, glaber; antennis nigris; prothorace lato, æqualiter convexo, punctato, angulis posticis haud divaricatis, punctatis; elytris brevibus, minus nitidis, sæpe violaceo tinctis, subtilissime striatis, crebre punctatis, subtus pedibusque viridibus nitidioribus, tarsis nigris.*

Long. 23-33 mill., lat. 8 $^1/_2$-11 mill.

Court et large, régulièrement bombé, médiocrement brillant, glabre, vert avec un reflet violet sur les élytres. Front impressionné. Antennes noires. Prothorax plus large que long, rétréci d'arrière en avant avec les côtés arqués au sommet, un peu et régulièrement bombé, rebordé latéralement, couvert d'une ponctuation assez dense, ses angles postérieurs carénés. Écusson

transversal. Élytres un peu moins larges que le prothorax, deux fois seulement plus longues, bombées, ponctuées comme le prothorax, finement striées. Dessous et pattes verts, brillants; tarses noirs.

Poulo-Pinang et Malacca; Bornéo. (Collect. Jans., Cand.)

Les stries des élytres sont plus ou moins marquées; parfois elles manquent presque complétement.

9. C. PUNCTATUS. — *Aureo-cupreus, minus nitidus, glaber; antennis nigris; prothorace longitudine latiore, æqualiter convexo, crebre punctato, angulis posticis haud divaricatis, haud carinatis; elytris breviusculis, nitidioribus, punctatis, basi punctato-striatis; subtus pedibusque concoloribus.*

Long. 23 mill., lat. 8 mill.

De la tournure du précédent, régulièrement bombé, médiocrement brillant, glabre, d'un cuivreux bronzé. Front impressionné. Antennes noires. Prothorax plus large que long, peu atténué en avant, sa surface égale et bombée, densément couverte de points, ses bords latéraux étroitement aplatis et rebordés, ses angles postérieurs non divergents, dépourvus de carènes. Écusson transversal. Élytres de la largeur du prothorax et un peu plus de deux fois plus longues, régulièrement et curvilinéairement rétrécies à partir de la base, acuminées au sommet, ponctuées comme le prothorax, présentant quelques stries ponctuées à la base. Dessous et pattes d'un bronzé un peu plus verdâtre que le dessus; tarses noirs.

Singapore.

Un exemplaire, rapporté par M. Wallace, dans la collection de M. Janson.

10. C. RUTILANS. — CHEVR. *Rev. Zool.*, 1841, p. 222. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 546.

Philippines.

11. C. IGNEUS. — *Viridis, nitidissimus, glaber; prothorace a basi angustato, remote subtiliter punctato, utrinque leviter biimpresso, angulis posticis haud divaricatis, carinatis; elytris reticulatis, punctatis, lateribus igneo-purpureis.*

Long. 20-25 mill., lat. 7-8 mill.

Cette espèce est très-voisine du *rutilans*, mais elle est constamment plus petite, son prothorax est moins plat, moins fortement impressionné, et ses élytres sont toujours teintées latéralement, surtout en arrière, d'un pourpre doré très-vif.

Malacca et Bornéo. (Coll. Jans., Cand.)

12. C. VIOLATUS. — GERM. *Zeitschr.*, t. IV, p. 106. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 347.

Bengale.

13. C. PLUTUS. — *Aureo-viridis, nitidus, glaber; prothorace oblongo, a basi attenuato, lateribus fere recto, dorso granulato, punctato et utrinque impresso, angulis posticis haud divaricatis, acute carinatis; elytris striato-punctatis.*

Long. 30-32 mill., lat. 9-9 $^1/_2$ mill.

D'un beau vert doré assez brillant avec le prothorax d'aspect légèrement soyeux, glabre. Antennes courtes, noires, leur base verdâtre. Prothorax trapéziforme, ses côtés droits, sauf au sommet, rebordés, le disque peu bombé, aplati et impressionné latéralement, finement rugueux et ponctué, ses angles postérieurs nullement divergents, fortement carénés. Écusson transversal, plan. Élytres fortement impressionnées à la base, finement ponctuées-striées, les intervalles pointillés. Pattes rougeâtres, les tarses bruns.

Bornéo.

Sa forme est celle des *rutilans* et *violatus*, mais son aspect soyeux lui donne une physionomie propre. Il diffère de tous deux par ses élytres nettement ponctuées-striées. (Coll. Jans.)

14. C. AUREOLUS. — HOPE, GRIFF. *Anim. Kingd.* t. I, p. 563. pl. XXXI. — CAND. *Monogr.*, t I, p. 347.

Poulo-Penang.

15. C. BOHEMANI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 348, pl. VI, fig. 7.

Ceylan.

16. C. TEMPLETONI. — WESTW. *Cab. of orient. Entom.*, 1848, p. 71, pl. XXXV, fig. 1. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 348.

Ceylan.

17. C. DUPONTI. HOPE, *Trans. Ent. Soc.*, t. III, p. 290. — CAND. *Monogr.*, t, I, p. 349.

Malabar.

18. C. IRIS. — *Smaragdinus, nitidissimus, glaber; antennis longiusculus, nigris; prothorace trapeziformi, violaceo-tincto, planiusculo, medio longitrorsum elevato, lateribus marginato, angulis posticis divaricatis, haud carinatis; scutello purpureo; elytris reticulatis, basi impressis et rugatis.*

Long. 30 mill., lat. 8 $^1/_2$ mill.

D'un beau vert d'émeraude très-intense, avec des reflets violets principalement sur le prothorax, très-brillant et glabre. Front d'un vert doré avec l'impression médiane violette. Antennes assez allongées, noires (♂). Prothorax trapéziforme, ses côtés rectilignes et brusquement portés en dedans en faisant un coude au sommet, sa surface plane, finement rugueuse, avec une élévation longitudinale médiane plus lisse, rebordé latéralement, ses angles postérieurs divergents et non carénés. Écusson subarrondi, d'un violet pourpré. Élytres allongées, un peu plus larges que le prothorax, atténuées vers l'extrémité, celle-ci spiniforme, finement réticulées sans stries, leur base présentant une impression rugueuse. Dessous et pattes d'un vert légèrement bronzé, les tarses noirs teintés de vert métallique.

Madras.

Cette magnifique espèce se rapproche du *Duponti* par la forme du prothorax. Je la décris d'après un mâle de la collection de M. Janson.

19. C. ROSICOLOR. — HOPE, *Trans. Entom. Soc.*, t. III, p. 290. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 350.

Java.

20. C. GUERINI. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 351.

C'est le *C. Latreillei* GUÉR. (*Voy. de Delessert*, 1843, p. 37), nom qui fait double emploi avec celui appliqué, la même année, par Germar, à une autre espèce.

Coromandel.

21. C. VENUSTULUS. — CAND. *Monogr.*, t. I, p. 351.

Ceylan.

22. C. NIETNERI. — *Ferrugineus, æneo-tinctus, flavo-sericeus; antennis brunneis; prothorace depresso, latitudine longiore, a basi angustato, subtiliter punctulato; elytris substriatis, crebre punctulatis, apice mucronatis.*

Long. 25 mill., lat. 6 mill.

CAND. *Mém. Acad. Belg.* t. XVII, 1865, p. 19.

Étroit et allongé, ferrugineux avec un reflet bronzé, revêtu d'une légère pubescence flave. Front impressionné. Antennes brunes. Prothorax plus long que large, peu à peu rétréci depuis la base jusqu'au sommet, assez déprimé, finement ponctué. Élytres finement striées, les intervalles plats, très-pointillés, leur extrémité aiguë. Dessous de la couleur du dessus.

Ceylan : Rambodde.

23. C. MALAÏSIANUS. — *Viridis, aureo-micans, subtiliter pubescens; antennis nigris; prothorace utrinque deplanato, medio longitrorsum elevato, aureo et chalybeo-tincto; scutello chalybeo;*

*elytris lineis subelevatis, sparsim punctatis; apice acuminatis; subtus densius cinereo-pubescens, pedibus rufis.*

Long. 30 mill., lat. 9 mill.

Cand. *Mém. Acad. Belg.*, t. XVII, 1865, p. 19.

Vert, avec des reflets dorés surtout sur les côtés du prothorax et la base des élytres, le premier revêtu d'une pubescence courte et éparse, cendrée. Antennes noires, très-finement pubescentes. Front fortement impressionné. Prothorax un peu plus large que long, curvilinéairement rétréci au sommet, un peu bombé, assez densément ponctué avec les intervalles très-finement rugueux, au moins latéralement, assez fortement rebordé vers les angles antérieurs, les postérieurs divergents. Écusson plus large que long, transversalement impressionné. Élytres un peu plus larges que le prothorax, impressionnées et sillonnées à la base, densément ponctuées, acuminées au bout. Dessous teinté de bleu et pubescent. Pattes rouges.

Poulo-Pinang; Siam : Juthia.

24. C. PALLIDIPES. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 352.

Ceylan.

25. C. Mulleri. — *Purpureo-metallicus, nitidus, subtiliter pubescens; antennis nigris; prothorace longitudine latiore, a basi angustato, parum convexo, medio punctato, lateribus subtilissime granulato, angulis posticis vix divaricatis, haud carinatis; elytris vix visibiliter striatis, subtilissime strigulosis; subtus viridis, pedibus late rufis.*

Long. 26 mill., lat. 8 mill.

D'un cuivreux pourpré, médiocrement brillant pour le genre, le prothorax pubescent. Antennes noires. Front concave. Prothorax un peu plus large que long, trapéziforme avec ses côtés un peu arqués en avant, peu convexe, marqué de points dans son milieu et finement granuleux sur les parties latérales, ses

bords latéraux étroitement rebordés, ses angles postérieurs aigus, à peine divergents, dépourvus de carène. Écusson transversal, concave. Élytres de la largeur du prothorax, curvilinéaires sur les côtés de la base au sommet où elles sont divariquées et mucronées, marquées de très-fines stries à peine visibles, leur surface finement et transversalement ruguleuse. Dessous vert; pattes d'un rouge clair.

Sumatra.

Un exemplaire trouvé par M. Muller et appartenant au musée de Leyde.

26. C. Apollo. — *Viridis, nitidissimus, aureo et purpureo micans; antennis nigris; prothorace apice angustato, convexiusculo, basi lateribusque breviter pilosulis, sparsim punctato; elytris medio latiusculis, punctatis, subsulcatis; subtus pubescens.*

Long. 32 mill., lat. 10 mill.

Assez large, très-brillant, vert avec des reflets dorés et pourprés, le prothorax pubescent à la base et sur les parties latérales. Antennes noires, assez fortement dentées en scie (♂). Prothorax un peu plus large que long, assez rétréci en avant, ses côtés rectilignes jusque près du sommet où ils se recourbent en dedans, un peu convexe avec quelques impressions vagues latéralement, éparsément ponctué. Écusson subarrondi, subcaréné, vert. Élytres plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, puis régulièrement rétrécies jusqu'au sommet, impressionnées et sillonnées à la base, largement subsillonnées sur le disque, assez densément ponctuées. Dessous et pattes pubescents, vert teinté de bleu en avant et de cuivreux en arrière.

Laos.

Provenant des chasses de Mouhot. (Coll. Saunders, Janson et Castelnau.)

27. C. luctuosus. — *Atro-cyaneus, parum nitidus; protho-*

*race trapeziformi, lateribus opacis, subgranulatis, punctatis breviterque pubescentibus, angulis posticis elongatis, divaricatis; elytris violaceo-nigris, latis, glabris.*

Long. 35 mill., lat. 10 mill.

D'un bleu sombre, non métallique, avec les élytres d'un noir légèrement violet, glabre, sauf les côtés du prothorax qui présentent une courte pubescence, peu luisant. Front fortement impressionné, rugueux. Antennes noires. Prothorax court, trapéziforme, assez fortement rétréci en avant, élevé au milieu où il est violet et ponctué, ses côtés finement rugueux et ponctués avec des traces vagues d'impressions, ses bords latéraux fortement rebordés et inégalement crénelés, ses angles postérieurs assez grêles, allongés, sans carènes. Écusson transversal. Élytres amples, plus larges que le prothorax, parallèles jusqu'au milieu, impressionnées à la base, leur disque finement réticulé et pointillé avec de vagues traces de sillons. Dessous et pattes violets, luisants.

Madras.

La couleur insolite de cette espèce la distingue de toutes les autres. Elle existe dans la collection de M. Janson.

28. C. Candezei. — *Fulvo-ferrugineus, parum nitidus; prothorace trapeziformi, planiusculo, medio elevato et obscuriori, pube subtili sericea, densa cinereaque obducto; elytris dilutioribus, obsolete striatis.*

Long. 35-42 mill., lat. 10-13 mill.

Dohrn, *Stettin. Entom. Zeitschr.*, 1873, 17.

Bornéo : Sarawack.

J'ai vu quatre exemplaires de cette espèce : deux dans la collection de M. Janson, les autres dans celles de M. Dohrn et du musée de Gênes.

29. C. Delesserti. — Guér. *Rev. Zool.*, 1840, p. 38. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 353.

Nielgerrhies.

30. C. Cantori. — Hope, *Trans. Ent. Soc.*, t. III, p. 288. — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 353.

Syhlet; Birmanie.

31. C. Mniszechi. — *Fusco-æneus, parum nitidus, villosulus; prothorace confertissime inæqualiterque punctato, lateribus parum marginato, subsinuato; scutello cordiformi; elytris sulcatis, confertim punctatis; subtus pedibusque dense pubescentibus.*

Long. 40 mill., lat. 11 $^1/_2$ mill.

Forme et taille du précédent. Plus pubescent. Front assez fortement concave. Antennes brunâtres. Prothorax en trapèze, déprimé, très-densément ponctué, sa surface impressionnée çà et là, ses bords latéraux subsinueux, faiblement rebordés, le rebord s'évanouissant avant d'atteindre les angles postérieurs qui sont divergents, aigus à l'extrémité, non carénés. Écusson cordiforme. Élytres régulièrement curvilinéaires sur les côtés de la base au sommet, assez fortement sillonnées, densément ponctuées. Dessous et pattes très-pubescents.

Malacca.

Il est fort voisin du *Cantori*, mais on l'en distinguera par sa ponctuation plus dense, sa pubescence plus forte, ses élytres plus sillonnées, et surtout par le rebord latéral du prothorax bien moins prononcé. (Coll. Janson.)

32. C. sobrinus. — *Cupreo-æneus, purpureo-micans, nitidus, villosulus; prothorace trapeziformi, parum convexo, crebre punctato, valde marginato, vix sinuato; scutello transverso; elytris crebre punctatis, æqualibus, interdum subsulcatis; subtus pedibusque pubescentibus, rufis, medio viridi, metallico.*

Long. 32-35 mill., lat. 10-11 mill.

Peu différent du *Cantori*, dont j'ai hésité longtemps à le séparer. La persistance de quelques caractères distinctifs, chez

les nombreux exemplaires de l'un et de l'autre que j'ai pu examiner, m'a engagé cependant à adopter ce dernier parti. Celui-ci est toujours plus petit, sa teinte est plus cuivreuse, plus rosée, il est plus brillant, ses élytres sont exceptionnellement sillonnées; dans le *Cantori*, c'est le contraire qui se remarque; enfin l'écusson est ici plus court et visiblement transversal, tandis que dans l'autre espèce il s'allonge un peu en pointe, en arrière.

Le *C. sobrinus* paraît habiter plus particulièrement les parties orientales de la presqu'île transgangétique. Le *Cantori* se rencontre plutôt dans les régions occidentales de cette péninsule.

33. C. ARGENTIPILIS. — *Brunneus, pube densa, longiuscula, argentea vestitus; prothorace latitudini medii longitudine æquali, subænescente, dense inæqualiter punctato, anguste marginato, angulis posticis divaricatis, obsolete carinatis; elytris elongatis, dense punctatis, subsulcatis; subtus pedibusque brunneis, dense pubescentibus.*

Long. 38 mill., lat. 10 mill.

Allongé, brun, avec un reflet bronzé sur le prothorax, très-densément couvert d'une pubescence soyeuse, argentée, couchée. Antennes noirâtres. Front excavé au milieu. Prothorax déprimé, aussi long que large au milieu, ses bords latéraux presque parallèles dans leur portion moyenne, finement rebordés, densément et finement ponctués latéralement, ses angles postérieurs divergents, portant une trace de carène. Écusson aussi long que large. Élytres allongées, parallèles jusqu'au milieu, curvilinéairement atténuées au delà, très-ponctuées, sillonnées, les intervalles subinégaux en hauteur. Dessous et pattes de la couleur du dessus et également pubescents.

Siam.

L'une des plus remarquables espèces par la densité de sa pubescence. (Coll. Janson.)

34. C. Saundersi. — *Brunneus, vix submetallicus, pube densa, longiuscula, cinereo-argentea vestitus; prothorace longitudine latiore, sparsim subtiliter punctato, anguste marginato, angulis posticis divaricatis, obsolete carinatis; elytris ultra medium leviter dilatatis, dense punctatis, subsulcatis; subtus concolor.*

Long. 35 mill., lat. 10 mill.

Couleur et aspect du précédent, mais se rapprochant davantage de la forme du *sobrinus*. Brun, faiblement métallique, revêtu d'une pubescence longue, couchée, assez dense, blanchâtre. Antennes noires. Front concave. Prothorax notablement plus large que long, médiocrement rétréci en avant, convexe, un peu impressionné de chaque côté, finement ponctué, les bords latéraux finement rebordés, ses angles postérieurs divergents, obsolètement carénés. Écusson presque aussi long que large. Élytres un peu plus larges que le prothorax, plus larges au delà du milieu qu'à la base, beaucoup moins atténuées au sommet que chez le précédent, sillonnées, finement et densément ponctuées. Dessous et pattes de la couleur du dessus.

Laos.

Un exemplaire provenant des chasses de Mouhot dans l'ancienne collection Saunders.

35. C. parallelus. — *Aeneo-brunneus, nitidus, cinereo-pubescens; prothorace subquadrato, parum convexo, inæqualiter, lateribus confertim punctato, angulis posticis divaricatis; scutello transverso; elytris ultra medium parallelis, dense punctatis, subsulcatis; subtus, cum pedibus, concoloribus.*

Long. 32 mill., lat. 9 mill.

Parallèle, brun plus ou moins bronzé, assez brillant, légèrement pubescent. Antennes noirâtres. Front concave. Prothorax aussi long que large, parallèle sur les côtés dans sa partie moyenne, peu convexe, fortement rebordé sur les côtés jusqu'à

l'extrémité des angles postérieurs, ceux-ci divergents, non-carénés, le disque finement et très-densément ponctué de chaque côté, moins au milieu. Écusson plus large que long. Élytres parallèles jusqu'au delà du milieu, curvilinéairement atténuées au delà, l'extrémité pointue sans être épineuse, très-ponctuées, offrant des traces de sillons. Dessous et pattes brunâtres, plus pubescents que le dessus.

Birmanie.

Deux spécimens dans la collection de M. Janson.

*Species invisae.*

C. SMARAGDINUS, PROTEUS, LEACHII, WILSONI, ESCHSCHOLSZI. — HOPE, *Trans. Entom. Soc.* t. III, pp. 290 et seq.

## TRIBU IV.

# OXYNOPTÉRITES.

J'ai retiré de cette tribu le genre *Beliophorus*, qu'à l'exemple de Lacordaire j'y avais compris autrefois. Malgré des rapports très-évidents qu'il présente avec les *Oxynopterus* et les *Leptophyllus*, je crois le *B. cebrionoides* mieux placé à côté des *Ictis* et des *Dima* qu'il représente en Afrique; on le trouvera donc plus loin dans la tribu des *Dimites*. Quant au *B. viduus*, c'est un *Corymbitite*.

### OXYNOPTERUS.

Hope, *Proceed. Zool. Soc.*, 1842, 77.

Après une lecture attentive de tout ce qui a été écrit sur les insectes de ce genre, tant dans les auteurs anciens que dans les modernes; après un examen minutieux des figures qu'en ont données Olivier et M. Westwood et la comparaison des nombreux exemplaires de provenances diverses que j'ai sous les yeux, je pense que l'on peut y admettre deux formes assez distinctes, dont voici les diagnoses :

1. O. MUCRONATUS. — *Fusco-brunneus, nitidus, villositate fulvo-cinerea sat longa, sericea, undique obductus; prothorace transverso, crebre punctato; elytris apice mucronatis.*

Long. 56-65 mill., lat. 17-22 mill.

(Lin?) Ol. *Journ. d'hist. nat.*, t. I, p. 262, pl. XIV, fig. 1.

Se rencontre principalement à Java, à Célèbes et aux Philippines. Elle se distingue par une couleur brun sombre, un aspect luisant des téguments et surtout par une pubescence soyeuse, fauve cendré, longue et qui, bien qu'assez caduque, se retrouve encore, chez les individus les plus déflorés, sur le prothorax et çà et là sur les élytres.

Il faut y rapporter les *O. Cumingii* et *javanus* de Hope.

2. O. Audouini. — *Brunneus, parum nitidus, fere glaber; prothorace elytrisque confertissime punctatis, his apice mucronatis, sæpe emarginatis.*

Long. 65-80 mill., lat. 25-27 mill.

Hope, *loc, cit.*

Celle-ci se rencontre particulièrement à Bornéo et dans la presqu'île de Malacca. Un exemplaire de la collection Janson est indiqué comme originaire du Syhlet. On le reconnaîtra à sa taille plus grande, son aspect plus mat, plus rougeâtre, à la brièveté de la pubescence qui n'existe ordinairement que sur le prothorax et qui peut même manquer complétement, à sa ponctuation beaucoup plus dense, à son prothorax moins court, enfin à une forte échancrure de l'extrémité des élytres. Ce dernier caractère, toutefois, n'est pas constant.

## LEPTOPHYLLUS.

Hope, *Proceed. Zool. Soc.*, 1842, p. 79. — *Megalorhipis* (Lac). Cand. *Monogr.*, t. I, p. 569.

L. Strachani. — Hope, loc. cit., — *M. validicornis* (Boh). Cand. *Monogr.*, t. I, p. 560, pl. VII, fig. 1, 2.

Afrique intertropicale et australe.

Je pense que le *L. latipennis* Hope et mon *M. minor* ne doivent être considérés que comme des variétés de cette espèce.

## PECTOCERA.

Hope, *Proceed. Zool. Soc.*, 1842, p. 70.

A Téguments brun rougeâtre.
*a* Antennes brunes . . . . . 1. *P. Cantori*, 2. *P. Mellyi*.
*aa* Antennes rougeâtre clair . . . . . 3. *P. Fortunei*.
AA Noir, les élytres châtain rougeâtre . . . . . 4. *P. Messi*.

1. P. Cantori. — Hope, *loc. cit.*, — Cand. *Monogr.*, t. I, p. 361.

Bengale, régions montagneuses.

2. P. Mellyi. — Hope, *loc. cit.*

Semla.

3. P. Fortunei. — Cand. *Ins. rec. au Japon.* in *Mém. Liége*, 2e sér., t. V, p. 6.

Japon méridional et Chusan.

4. P. Messi. — *Nigra, nitida, pubescentia rufescenti* (♂) *seu fulva* (♀) *obducta; antennis nigris; prothorace antice grosse sparsim punctato, haud canaliculato ; elytris rufo-castaneis subsulcatis, sparsim punctatis.*

Long. (♂) 28- (♀) 40 mill., lat. 7-12 mill.

Noir avec les élytres d'un châtain rouge luisant, revêtu d'une pubescence soyeuse, rougeâtre chez le mâle, fulvescente chez la femelle, disposée inégalement et formant des taches. Antennes noires, celles du mâle longuement flabellées, celles de la femelle dentées en scie. Prothorax aussi long que large, rétréci graduellement depuis la base jusqu'au sommet, peu convexe, aplati de chaque côté en avant, sans sillon ni impression au milieu, sauf chez la femelle où il y a un faible sillon médian, ponctué sur les parties aplaties, ses angles antérieurs obtus, les posté-

rieurs brièvement carénés. Écusson subcordiforme et transversal. Élytres de la largeur du prothorax à la base, curvilinéaires latéralement, vaguement sillonnées et éparsément ponctuées. Dessous et pattes noirs, pubescents.

Canton. Je dédie cette remarquable espèce à M. Mess, de Munich, de qui je la tiens. Elle existe aussi dans la collection de M. Janson.

# ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page 7. *Agrypnus maculicollis*, ajoutez : GERSTAECH. *Beitr. zur Ins. v. Zanzibar*, t. III, 1871, p. 53.

Page 59, ligne 12. Au lieu de : *modestus*, lisez : *molestus*.

Page 100, ligne 5. Ajoutez : voici leurs noms : *L. Gayndahensis*, *L. alternans*, *L. maculatus*, *L. granulatus*.

Page 156. *Tetrigus cyprius*, ajoutez : BAUD. *Berlin. Zeitschr.*, 1871, p. 50.

Deux espèces de *Lacon*, décrites depuis peu et que je ne connais pas en nature, ont été, par oubli, passées sous silence dans les pages qui concernent ce genre; ce sont :

1° *L. argillaceus* (SOLSKI, *Hor. entom. rossic.*, t. VII, p. 360) de Sibérie, dont la place serait à côté de l'*ellipticus*;

2° *L. pygmæus* (BAUD. *Berlin. Zeitschr.*, 1871, p. 49) de Chypre, qui différerait peu de l'*ovalis*.

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES GENRES ET DES ESPÈCES CONTENUS DANS CE FASCICULE.


| | Pages. |
|---|---|
| ACROCRYPTUS. . . . . | 39 |
| » ater . . . . . | *ib.* |
| ADELOCERA . . . . . | 14 |
| » aberrans. . . . . | 23 |
| » adspersa . . . . . | 30 |
| » *atomaria* . . . . | 17 |
| » aurorata . . . . . | 18 |
| » aurulenta. . . . . | 26 |
| » avita . . . . . | 21 |
| » brevicornis . . . . | 19 |
| » calabarica . . . . | 23 |
| » carbonaria . . . . | 17 |
| » cavicollis. . . . . | 19 |
| » Chabannei . . . . | 29 |
| » *Chapuisi*. . . . . | *ib.* |
| » chilensis. . . . . | 20 |
| » cœca . . . . . | 18 |
| » conspersa . . . . | 16 |
| » cribrata . . . . . | 25 |
| » dorsalis . . . . . | 22 |
| » drusa. . . . . | 20 |
| » fasciata . . . . . | 19 |
| » geografica . . . . | 24 |
| » græca. . . . . | 17 |
| » impressicollis . . . | 18 |
| » inæqualis. . . . . | 29 |
| » inflata. . . . . | 22 |
| » Jacquieri. . . . . | 29 |
| » *lacerta* . . . . . | 25 |
| » laticollis . . . . . | 24 |
| » lepidoptera . . . . | 17 |
| » linearis . . . . . | 22 |

| | Pages. |
|---|---|
| ADELOCERA lithophila. . . . | 19 |
| » maculata. . . . . | 22 |
| » Mäklini . . . . . | *ib.* |
| » mamillata . . . . . | 28 |
| » marmorata . . . . . | 20 |
| » mexicana. . . . . | 31 |
| » modesta . . . . . | 47 |
| » obtecta . . . . . | 19 |
| » Oliveri. . . . . | 20 |
| » palliata . . . . . | 29 |
| » pectinata. . . . . | 27 |
| » pennata . . . . . | 28 |
| » pollinaria. . . . . | 29 |
| » profusa . . . . . | 19 |
| » pyrsolepis . . . . | 18 |
| » quercea . . . . . | 20 |
| » rorulenta. . . . . | 18 |
| » rubra . . . . . | 29 |
| » setosa. . . . . | *ib.* |
| » sparsa. . . . . | 17 |
| » spurca. . . . . | 25 |
| » *squalida*. . . . . | 27 |
| » subcostata . . . . | 31 |
| » tenebrioides. . . . | 22 |
| » unicolor . . . . . | 21 |
| » *varia* . . . . . | 20 |
| » Wallacei . . . . . | 26 |
| AGRÆUS . . . . . | 105 |
| » cuniculus. . . . . | *ib.* |
| » feroculus. . . . . | *ib.* |
| » Mannerheimi . . . . | *ib.* |
| » Mouhoti . . . . . | 106 |

Pages.

AGRYPNITES . . . . . 1

AGRYPNUS. . . . . *ib.*
» æqualis. . . . . 9
» arabicus . . . . . 6
» attenuatus. . . . . 4
» attonitus . . . . . 10
» australis . . . . . 5
» bifoveatus. . . . . 12
» bipunctatus . . . . 11
» *Bocandei*. . . . . 5
» caliginosus . . . . 4
» cinereus . . . . . 11
» crassiusculus. . . . 5
» Dewalquei. . . . . 6
» *funestus* . . . . . 10
» fuscipes . . . . . 7
» fusiformis. . . . . 11
» *gilvus* . . . . . 10
» infuscatus. . . . . 4
» javanus . . . . . 12
» judaicus . . . . . 6
» lacertosus. . . . . 11
» *latior* . . . . . 13
» luridus. . . . . 7
» maculicollis . . . . *ib.*
» Mastersi . . . . . 13
» mœstus . . . . . 10
» mucronatus . . . . 12
» notodonta. . . . . 4
» ocellatus . . . . . 11
» opacus. . . . . 8
» persicus . . . . . 6
» politus. . . . . 12
» puber . . . . . 4
» pubescens. . . . . 5
» punctatus. . . . . 10
» resectus . . . . . 12
» rubiginosus . . . . 9
» rufipes. . . . . 7
» rufus . . . . . 6
» Sallei . . . . . 14
» Schotti. . . . . *ib.*
» *sondaicus*. . . . . 10
» substriatus . . . . 4
» tomentosus . . . . 12

ALAITES . . . . . 112

Pages.

ALAOLACON . . . . . 114
» cyanipennis . . . . *ib.*
» griseus. . . . . *ib.*
ALAUS . . . . . 117
» anguis . . . . . 132
» angularis . . . . . 146
» appendiculatus . . . 128
» atropos . . . . . 125
» berus . . . . . 126
» Boreli . . . . . 133
» caffer . . . . . 124
» Candezei . . . . . 125
» caprimulgus . . . . . 136
» cenchris . . . . . 131
» cerastes. . . . . 134
» cerberus . . . . . 123
» cristatus . . . . . 150
» detritus. . . . . 124
» elaps. . . . . 132
» elegantulus. . . . . 122
» eryx . . . . . 140
» excavatus , . . . . . 122
» farinosus . . . . . 149
» *farinosus* . . . . . 128
» figuratus . . . . . 130
» funebris. . . . . 147
» funereus . . . . . 146
» Gibboni. . . . . *ib.*
» gigas. . . . . *ib.*
» glaucus . . . . . 152
» *gorgops*. . . . . 153
» haje . . . . . 143
» hieroglyphicus . . . . 124
» infumatus . . . . . 144
» lactellus. . . . . 130
» lacteus . . . . . 126
» larvatus. . . . . 141
» lateralis. . . . . 139
» lophura . . . . . 125
» lusciosus . . . . . 153
» lynceus . . . . . 139
» Mac-Leayi . . . . . 146
» maculosus . . . . . 131
» marmoratus . . . . . 124
» melancholicus . . . . 147
» melanops . . . . . 153
» Mniszechi . . . . . 124
» mœrens. . . . . 122

Pages.

ALAUS Montraveli . . . . . 149
» mortuus. . . . . 129
» musivatus . . . . . 134
» myops . . . . . 135
» *naja* . . . . . 153
» nanus . . . . . 139
» nebulosus . . . . . 137
» Nietoi . . . . . 152
» nobilis . . . . . 151
» nubilus . . . . . 129
» obliquus . . . . . 143
» oculatus. . . . . 153
» Parreysi . . . . . 128
» patricius . . . . . 151
» plebejus. . . . . 152
» podargus . . . . . 125
» primarius . . . . . 151
» prosectus . . . . . 146
» pumilus. . . . . 149
» putridus . . . . . 140
» regalis . . . . . 135
» Rosenbergi. . . . . 138
» rudis . . . . . 122
» scops. . . . . 137
» sculptus. . . . . 127
» scytale . . . . . 138
» Senecteri . . . . . 126
» *senegalensis* . . . . . 122
» sericeus. . . . . 148
» sinuosicollis . . . . . 124
» sordidus. . . . . 129
» speciosus . . . . . 125
» suboculatus . . . . . 147
» timoriensis. . . . . 137
» tisiphone . . . . . 142
» *torquilla* . . . . . 129
» tortrix . . . . . 123
» tricolor . . . . . 150
» Vollenhoveni . . . . . 127
» Westermanni . . . . . 125
ALITEUS . . . . . 116
» Reichei . . . . . *ib.*
» adspersus . . . . . 117
ANACANTHA . . . . . 37
» crux . . . . . 38
» marmorata . . . . *ib.*
» sulcicollis. . . . . 37
» vitticollis . . . . . *ib.*

Pages.

*CALAIS*. . . . . 150
CAMPSOSTERNUS. . . . . 189
» æneus . . . . 192
» Apollo . . . . 199
» argentipilis . . 202
» aureolus . . . 196
» Bohemani. . . *ib.*
» Candezei . . . 200
» Cantori. . . . 201
» Delesserti. . . 200
» Dohrni. . . . 191
» Duponti . . . 196
» Eschscholtzi. . 204
» fulgens. . . . 193
» gemma. . . . 192
» Guerini. . . . 197
» igneus . . . . 195
» Iris . . . . . 196
» latiusculus . . 193
» Leachi. . . . 204
» luctuosus. . . 199
» malaïsianus . . *ib.*
» Mniszechi. . . 201
» Mouhoti . . . 191
» Mulleri. . . . 198
» Nietneri . . . 197
» pallidipes. . . 198
» parallelus. . . 202
» Plutus . . . . 195
» Proteus . . . 204
» punctatus. . . 194
» rosicolor . . . 197
» rutilans . . . 194
» Saundersi. . . 202
» smaragdinus. . 204
» sobrinus . . . 201
» splendidus . . 191
» Stephensi. . . 192
» Templetoni . . 196
» venustulus . . 197
» violatus . . . 195
» Wilsoni . . . 204

CHALCOLÉPIDIITES . . . . 160

CHALCOLEPIDIUS . . . . . *ib.*
» angustatus . . 169
» approximatus . 164

Pages.

CHALCOLEPIDIUS aurulentus . . 163
» attenuatus. . . 162
» Bomplandi . . 166
» Boucardi . . . 169
» chalcantheus. . *ib.*
» circumductus . *ib.*
» corpulentus . . 164
» Desmaresti . . 162
» erythroloma . . 168
» Eschscholtzi. . 167
» exulatus . . . 161
» Fabricii . . . 166
» Fryi. . . . . 168
» gossipiatus . . 160
» Herbsti. . . . 168
» Jansoni. . . . 165
» Jekeli . . . . 162
» Lacordairei . . 167
» Lemoinei . . . 161
» limbatus . . . 164
» longicollis. . . 167
» mexicanus. . . 162
» Mocquerysi . . 164
» morio . . . . 167
» obscurus . . . 168
» oxydatus . . . 161
» Perrisi. . . . 167
» porcatus . . . 163
» pruinosus . . . 165
» rubripennis . . 162
» rugatus . . . 167
» Silbermanni . . 165
» smaragdinus. . 169
» sulcatus . . . 167
» validus. . . . *ib.*
» virginalis . . . 168
» viridipilis. . . 169
» Webbi . . . . *ib.*
» zonatus. . . . 164
CHALCOLEPIS. . . . . 159
» Luczoti. . . . . *ib.*
*CRYPTOTARSUS* . . . . . 39
CTENICERA . . . . . 115
» insignis . . . . . *ib.*
» lugubris . . . . . *ib.*
» nobilis. . . . . *ib.*
DILOBITARSUS . . . . . 31
» abbreviatus . . . 33

Pages.

DILOBITARSUS bicornis . . . . 34
» bidens. . . . . *ib.*
» columbianus. . . 33
» cornutus . . . . 36
» cuneatus . . . . 33
» Deyrollei . . . . 34
» Eloini . . . . . 35
» gracilis. . . . . *ib.*
» inopinus . . . . *ib.*
» irroratus . . . . 34
» lignarius . . . . *ib.*
» nebulosus. . . . 32
» nubilus. . . . . 34
» petiginosus . . . 32
» quadrituberculatus. 34
» subsulcatus . . . *ib.*
» tessellatus. . . . 32
EIDOLUS . . . . . 41
» linearis . . . . . *ib.*
EUMÆUS . . . . . 113
» Murrayi . . . . . *ib.*
EUPHEMUS. . . . . 112
» funerarius. . . . . *ib.*
» quadrimaculatus . . *ib.*
HEMICLEUS . . . . . 41
» adspersulus. . . . *ib.*
» caffer. . . . . *ib.*
HEXAULACUS. . . . . 40
» Reedi. . . . . *ib.*
HEMIRHIPUS . . . . . 153
» apicalis . . . . . 154
» bimaculatus. . . . *ib.*
» Bonvouloirei . . . *ib.*
» decorus . . . . . 155
» Dejeani . . . . . 154
» Fairmairei . . . . 153
» fascicularis. . . . 154
» lineatus . . . . . 153
» Perroudi. . . . . 155
» Rojasi. . . . . 153
» trilineatus . . . . 154
» viduus . . . . . 155
LACON . . . . . 42
» adspersus . . . . . 84
» afflictus . . . . . 68
» albitactus . . . . . 55
» albopictus . . . . . *ib.*
» alternans. . . . . 209

| | Pages. |
|---|---|
| LACON amplicollis | 58 |
| » angulosus | 60 |
| » antiquus | 52 |
| » apodixus | 77 |
| » asper | 55 |
| » assus | 88 |
| » bidivisus | 58 |
| » binodulus | 72 |
| » bipapulatus | 69 |
| » birmanicus | 71 |
| » brachychœtus | 86 |
| » brevis | 100 |
| » brunnipennis | 75 |
| » calamitosus | 100 |
| » caliginosus | 86 |
| » carinulatus | 95 |
| » cervinus | 78 |
| » *charcus* | 59 |
| » cinnamomeus | 76 |
| » coarctatus | 70 |
| » coctus | 66 |
| » cœnosus | 75 |
| » comptus | 65 |
| » *confusus* | 53 |
| » consobrinus | 75 |
| » consors | 64 |
| » cordicollis | 72 |
| » cordipennis | 79 |
| » costicollis | 69 |
| » costipennis | 95 |
| » crassus | 88 |
| » crenatus | 53 |
| » crenicollis | 82 |
| » curtus | 100 |
| » *cylindricus* | 59 |
| » Deboulayi | 89 |
| » decipiens | 57 |
| » depressus | 77 |
| » Desjardinsi | 58 |
| » desquamatus | 69 |
| » divaricatus | 96 |
| » dubius | 102 |
| » elliensis | 59 |
| » ellipticus | 75 |
| » erinaceus | 74 |
| » eximius | 52 |
| » falsarius | 60 |
| » fatuus | 91 |

| | Pages. |
|---|---|
| LACON ferrugineus | 87 |
| » fex | 64 |
| » fibrinus | 62 |
| » flavescens | 66 |
| » flavipes | 58 |
| » fœdus | 57 |
| » formosanus | 71 |
| » fuliginosus | 69 |
| » furunculosus | 75 |
| » Gayndahensis | 209 |
| » geminatus | 89 |
| » glirinus | 81 |
| » Goudoti | 53 |
| » gracilis | 83 |
| » granulatus | 209 |
| » grisescens | 52 |
| « guttatus | 94 |
| » hædulus | 64 |
| » hispidulus | 61 |
| » hottentota | 58 |
| » humilis | 90 |
| » inops | 67 |
| » insignitus | 98 |
| » insularis | 74 |
| » irroratus | 53 |
| » interpunctatus | 58 |
| » judex | 62 |
| » labiosus | 86 |
| » lacrymosus | 96 |
| » lapideus | 82 |
| » laticollis | 88 |
| » latus | 58 |
| » laxus | 85 |
| » leprosus | 53 |
| » leucaspis | 63 |
| » Lezeleuci | 101 |
| » litigiosus | 73 |
| » lupinosus | 67 |
| » lutosus | 61 |
| » macroderus | 79 |
| » maculatus | 209 |
| » maculosus | 53 |
| » *Maillardi* | 58 |
| » mamillatus | 89 |
| » marginatus | 91 |
| » marmoratus | 94 |
| » minor | 56 |
| » minusculus | 68 |

Pages.

LACON modestus . . . . . 63
» molestus. . . . . 59
» mucoreus . . . . . 100
» multiforis . . . . . 62
» murinus . . . . . 72
» muscerda . . . . . 57
» musculus . . . . . 77
» mustelinus . . . . . 69
» muticus . . . . . 68
» mysticus. . . . . 55
» nanus. . . . . 56
» nebulosus . . . . . 84
» nepalensis . . . . . 72
» nigrita . . . . . 58
» nodicollis . . . . . 52
» nodifer . . . . . *ib.*
» obesus . . . . . 84
» occidentalis. . . . . 56
» octavus . . . . . 95
» ornatus . . . . . 69
» ovalis. . . . . 68
» pænulatus . . . . . 59
» palliditarsus . . . . . 55
» parallelicollis . . . . . 59
» parallelus . . . . . 90
» parcus . . . . . 59
» pictipennis . . . . . 93
» pictiventris . . . . . 57
» pleureticus . . . . . 93
» porcinus. . . . . 58
» porosus . . . . . 53
» porriginosus . . . . . 98
» prætermissus . . . . . 76
» princeps. . . . . 89
» punctipennis . . . . . 99
» rectangularis. . . . . 100
» scaber . . . . . 58
» scarrosus . . . . . 100
» Schwaneri . . . . . 73
» scrofa. . . . . 77
» scutellatus . . . . . 72
» sculptus . . . . . 95
» sericans . . . . . 75
» serrula . . . . . 82
» serricollis . . . . . 81
» setiger . . . . . 61
» sinensis . . . . . 82
» sinuatus . . . . . 52

Pages.

LACON socius. . . . . 87
» sordidus . . . . . 55
» soricinus. . . . . 57
» sparsus . . . . . 85
» spurcus . . . . . 82
» suillus . . . . . 101
» taciturnus . . . . . 60
» tactus. . . . . 69
» torrefactus . . . . . 65
» tostus. . . . . 67
» transversus . . . . . 61
» trifasciatus . . . . . 85
» tripartitus . . . . . 54
» tristis. . . . . 86
» truncatus . . . . . 59
» Truquii . . . . . 101
» turgescens . . . . . 84
» tumens . . . . . *ib.*
» *tumidicollis* . . . . . 53
» turbidus . . . . . 52
» tuspanensis. . . . . 101
» ursulus . . . . . 89
» variabilis . . . . . 91
» variolus . . . . . 92
» vestitus . . . . . 53
» Victoriæ . . . . . 97
» Wallacei . . . . . 80
LEPTOPHYLLUS . . . . . 206
» Strachani . . . *ib.*
LYCOREUS. . . . . 115
» cyclops . . . . . 116
» dux . . . . . 115
» Goudoti . . . . . *ib.*
» madagascariensis . . *ib.*
» regalis. . . . . *ib.*
» triocellatus . . . . *ib.*
*MEGALORHIPIS* . . . . . 206
MERISTHUS . . . . . 102
» apicalis. . . . . 103
» cristatus . . . . . 104
» insignitus. . . . . 103
» lepidotus . . . . . *ib.*
» minusculus . . . . . 104
» pistrinarius . . . . . 103
» quadripunctatus. . . *ib.*
» scobinula . . . . . 104
» setarius . . . . . 105
» texanus. . . . . *ib.*

Pages.

MYRMODES . . . . . 107
» akidiformis . . . . *ib.*
OGNEUS . . . . . 41
» limbatus . . . . . *ib.*
OISTUS. . . . . 189
» cacicus . . . . . *ib.*
» sphenosomus . . . . *ib.*
OPTALEUS. . . . . 42
» argentatus . . . . *ib.*
» cribratus . . . . . *ib.*
» fasciatus . . . . . *ib.*
» limbatus . . . . . *ib.*
» paleolatus. . . . . *ib.*

OXYNOPTÉRITES . . . . . 205

OXYNOPTERUS . . . . . *ib.*
» Audouini. . . . 206
» mucronatus . . . 205
PECTOCERA . . . . . 207
» Cantori . . . . . *ib.*
» Fortunei . . . . . *ib.*
» Mellyi . . . . . *ib.*
» Messi . . . . . *ib.*
PERICUS , . . . . . 117
» nitidus . . . . . *ib.*
» rubicundus . . . . . *ib.*
SCAPHODERUS . . . . . 14
» Riehli . . . . . *ib.*
SEMIOTUS . . . . . 170
» acutus . . . . . 180
» affinis . . . . . 178
» angusticollis . . . . *ib.*
» auripilis. . . . . 184
» approximatus . . . . 174
» bilineatus . . . . . 175
» bispinus. . . . . 180
» brevicollis . . . . . 186
» Buckleyi . . . . . 183
» Candezei . . . . . 178
» capucinus . . . . . 188
» caracasanus . . . . 176
» chontalenus . . . . 177
» conicicollis. . . . . 188
» convexicollis . . . . 178
» cristatus . . . . . 182
» cuspidatus . . . . . 173

Pages.

SEMIOTUS decoratus . . . . . 174
» diptychus . . . . . 188
» distinctus . . . . . 185
» elegantulus. . . . . 182
» fascicularis. . . . . 175
» Fryi . . . . . *ib.*
» fulvicollis . . . . . 174
» furcatus. . . . . *ib.*
» fusiformis . . . . . 185
» Germari. . . . . 179
» glabricollis. . . . . 183
» Illigeri . . . . . 179
» illustris . . . . . 177
» imperialis . . . . . 173
» insignis. . . . . 176
» intermedius . . . . 178
» Jansoni . . . . . 174
» juvenilis. . . . . 187
» Lafertei . . . . . 177
» lignens . . . . . 185
» limbaticollis . . . . 189
» Linnei . . . . . 182
» longus . . . . . 173
» luteipennis. . . . . 186
» morio. . . . . 189
» multifidus . . . . . 181
» nigriceps . . . . . 175
» nigricollis . . . . . 188
» punctatostriatus . . . 184
» punctatus . . . . . 179
» quadricollis . . . . 187
» Reaumûri . . . . . 183
» regalis . . . . . 179
» sanguinicollis . . . . 173
» Schaumi. . . . . 185
» scitulus . . . . . 186
» seladonius . . . . . 185
» Sommeri. . . . . 179
» *speciosus* . . . . . 173
» stramineus. . . . . 188
» striatus . . . . . 185
» superbus. . . . . 179
» suturalis. . . . . 173
» tæniatus. . . . . 177
» trilineatus . . . . . 182
» virescens . . . . . 185
» virgatus. . . . . 179
» zonatus . . . . . 176

| | Pages. |
|---|---|
| TETRIGUS | 155 |
| » ater | 156 |
| » cyprius | *ib.* |
| » flabellatus | 157 |
| » Lewisi | *ib.* |
| » parallelus | 156 |
| » Parryi | 158 |
| » pexus | 157 |
| TILOTARSUS | 107 |
| » aculeatus | 109 |
| » albisparsus | 108 |
| TILOTARSUS *Boieldieui* | 108 |
| » cinctipes | *ib.* |
| » cuspidatus | *ib.* |
| » fulvisparsus | 109 |
| » hastatus | *ib.* |
| » mucoreus | 108 |
| » nubilus | *ib.* |
| » rugatus | *ib.* |
| » simplex | 110 |
| » soleatus | 108 |
| » tuberculatus | 109 |

# CALCUL

DES

# PROBABILITÉS

DE

A. MEYER,

PUBLIÉ SUR LES MANUSCRITS DE L'AUTEUR.

PAR

F. FOLIE.

# PRÉFACE.

Pendant sa dernière maladie, A. Meyer nous avait chargé de la révision des épreuves de son ouvrage sur la *Théorie analytique des probabilités à posteriori*.

C'est grâce à cette circonstance, sans doute, que Mme veuve Meyer voulut bien nous confier le manuscrit du cours que son mari avait donné à l'Université de Liége, de 1849 à 1857, sur le calcul des probabilités.

Nous espérions que la Société royale des Sciences de Liége, qui avait déjà publié dans ses *Mémoires* d'importants travaux de Meyer, prêterait également son concours à la publication de cette œuvre posthume, la plus considérable peut-être de son auteur. Outre la plupart des anciens collègues de Meyer dans la Faculté des sciences, cette Société comptait en effet dans son sein plusieurs de ses anciens élèves; et tous, collègues et disciples, avaient appris à connaître et à aimer ce savant d'une érudition si vaste, cet homme si bon, ce maître si dévoué. Aussi la publication de son *Calcul des probabilités* n'eût-elle subi aucun retard si les ressources de la Société avaient été suf-

fisantes. Mais ce n'est que dans ces derniers temps que sa situation financière lui a permis de voter l'impression de l'ouvrage.

Quoique les notes de Meyer fussent à peu près complètes, comme elles ne renfermaient parfois presque pas de texte dans les parties relatives au développement des formules, il fallait les revêtir d'un peu plus de forme pour les livrer au public. Nous avons entrepris avec plaisir ce travail, dans lequel nous avons été obligeamment aidé par un ancien élève de Meyer, notre ami M. L. Perard, professeur à l'Université de Liége; et nous avons l'un et l'autre respecté entièrement les idées et, autant que possible, le style serré de notre maître. Nous n'y avons rien mis du nôtre, sauf le redressement de quelques *lapsus* dans les calculs et l'addition de quelques éclaircissements peu importants.

Une partie manquante du manuscrit a pu être remplacée, grâce à l'obligeance d'un de nos anciens condisciples aux cours de Meyer, notre ami M. A. Devivier, professeur à l'Université de Louvain, qui a bien voulu nous communiquer ses notes, dont nous avons pu apprécier toute l'exactitude.

Le manuscrit était divisé en leçons, les unes brèves, les autres longues. Nous avons cru plus convenable, à cause de la nature didactique de l'ouvrage, de partager celui-ci en chapitres et en paragraphes numérotés, afin de faciliter les recherches au lecteur et de pouvoir le renvoyer aux numéros dont la connaissance est nécessaire à l'intelligence du texte.

Quelques parties nous ont paru devoir être détachées du corps de l'œuvre et rejetées à la fin, comme étant des développements donnés à certains points spéciaux, et ne rentrant pas dans la division méthodique de l'ouvrage.

Il en est ainsi de deux théories des erreurs, l'une d'après Laplace, l'autre d'après Bienaymé, que Meyer a ajoutées à celle qui figure dans son Traité; d'une extension du théorème de Bernouilli aux factorielles, qui lui est due, et qui révèle ses qualités comme analyste; enfin de quelques notes destinées à éclaircir des formules dont il fait usage.

Cet ouvrage de Meyer est un résumé très-complet des plus importants travaux de Bernouilli, Moivre, Laplace, Poisson, Gauss, Encke, Bienaymé, etc., sur le calcul des probabilités; et l'on peut hardiment affirmer, pensons-nous, qu'il n'existe aucun traité aussi vaste sur la matière, si l'on excepte la Théorie analytique des probabilités.

Nous croyons devoir signaler tout spécialement à l'attention du lecteur les généralisations de quelques problèmes renfermant de belles applications de l'analyse supérieure et en particulier du calcul aux différences finies; la démonstration du théorème de Bernouilli et sa généralisation; la marche des calculs dans le développement des formules de Laplace, si difficiles à lire dans l'original; enfin des applications très-nombreuses du calcul des probabilités à la population et aux assurances.

Le théorème et le problème de Poisson figurant dans le manuscrit, nous n'avons pas pensé qu'il fallût les supprimer, malgré les doutes que notre maître avait émis au sujet de l'exactitude des approximations du géomètre français : l'expression de ces doutes suffira pour mettre le lecteur sur ses gardes.

L'importance de ce Traité et l'utilité qu'on en pourra retirer dans les applications nous ont engagé à le compléter par un extrait des Tables récentes de mortalité dues au regretté Ad. Quetelet, l'une des plus hautes autorités dans la matière. Cet illustre savant a bien voulu nous y autoriser; nous lui en avons exprimé toute notre gratitude, et

ne pouvons malheureusement plus aujourd'hui que rendre un légitime hommage à sa mémoire.

Bien certainement l'œuvre de Meyer sera accueillie avec le plus vif intérêt par les savants, et sa publication réjouira le cœur des nombreux élèves et des anciens amis de notre excellent maître; mais avec quel pieux recueillement surtout elle sera reçue par une famille dont il était adoré!

Celle-ci nous a chargé de témoigner toute sa reconnaissance à la Société royale des Sciences de Liége, et spécialement à ceux des anciens élèves de Meyer qui ont bien voulu nous aider dans l'accomplissement de notre tâche.

Liége, septembre 1874.

F. Folie.

# INTRODUCTION (*).

1. Tout événement arrive par suite de deux sortes de circonstances; les unes, connues ou inconnues, sont *nécessaires* à sa production, tandis que les autres, toujours inconnues, n'y contribuent qu'accidentellement.

Les circonstances de la première espèce se nomment causes ou chances; les autres constituent ce que l'on nomme hasard.

Exemple. Si l'événement consiste dans l'extraction d'une boule blanche d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires, les causes ou les chances de la sortie d'une boule blanche sont : le nombre total des boules, et celui des boules blanches; tandis que l'arrangement des boules dans l'urne et l'action de saisir une des boules sont la part du hasard.

(*) Le but de l'auteur, dans cette Introduction, est de définir les notions fondamentales dont l'étude fait l'objet du calcul des probabilités. Il lui arrivera donc fréquemment, pour éclaircir les notions qu'il a définies, d'énoncer des principes dont la démonstration se trouvera dans le corps même de l'ouvrage.

Cet ouvrage étant un traité essentiellement didactique, nous avons pensé qu'il ne serait peut-être pas inutile de faire cette remarque pour les commençants. F. F.

2. A tout événement on peut opposer son contraire, de manière que l'existence de l'un exclut celle de l'autre; alors les chances favorables à l'un sont contraires à l'autre. On nomme chances totales l'ensemble des chances favorables et contraires à un événement.

Si une urne renferme, sur douze boules, quatre boules blanches, il y aura quatre chances favorables et huit chances contraires à la sortie d'une boule blanche, et en tout douze chances.

3. S'il s'agit de plusieurs événements dont l'un doit arriver nécessairement, l'ensemble des autres doit être considéré comme un événement contraire au premier.

4. L'arrivée d'un événement est *certaine,* quand aucune chance ne lui est contraire; elle est incertaine quand plusieurs chances lui sont défavorables. Dans ce dernier cas, l'événement est plus ou moins probable, selon qu'il réunit plus ou moins de chances favorables. Donc, quand le nombre total des chances reste le même, *les probabilités de deux événements sont proportionnelles aux nombres de leurs chances favorables.*

Supposons, par exemple, que deux urnes contiennent chacune douze boules; que la première renferme huit blanches sur quatre noires, et la seconde trois blanches sur neuf noires; il sera plus probable d'extraire une blanche de la première urne que d'en extraire une de la seconde, et les probabilités de la sortie d'une blanche des deux urnes seront dans le rapport de 8 à 3.

5. Comme dans le cas de la certitude toutes les chances sont favorables, il sera facile de trouver la mesure de la probabilité d'un événement.

Soient en effet $u$ la probabilité d'un événement certain, P la probabilité du même événement, quand sur un nombre total

$a + b = m$ chances, il n'en aurait que $a$ qui lui soient favorables, on aura la proportion

$$P : u :: a : m$$

d'où

$$\frac{P}{u} = \frac{a}{m}.$$

Soit $p$ la valeur de ce rapport, $p$ sera la mesure de la probabilité P, $u$ étant pris pour unité, on a donc

$$p = \frac{a}{m}.$$

Donc *la mesure de la probabilité d'un événement est une fraction qui a pour numérateur le nombre des chances favorables à son arrivée, et pour dénominateur le nombre total des chances, tant favorables que contraires.*

Il suit de là qu'en nommant Q la probabilité contraire, on aura

$$Q : u = b : m,$$

ou

$$\frac{Q}{u} = \frac{b}{m}.$$

Soit

$$q = \frac{Q}{u},$$

on aura

$$q = \frac{b}{m}$$

et, par suite,

$$p + q = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m} = 1.$$

D'où il suit que la somme des mesures de deux probabilités contraires est toujours égale à l'unité, et que la somme des probabilités contraires est égale à la certitude, car on a :

$$\frac{P}{u} + \frac{Q}{u} = 1, \text{ d'où } P + Q = u.$$

On a aussi

$$p : q = a : b = a : m - a.$$

6. Soit $k$ le bénéfice attaché à l'arrivée d'un événement certain, $x$ et $y$ les bénéfices que l'on peut attendre, quand les probabilités de l'arrivée de cet événement seront respectivement égales à $p$ et à $q$ ; il est clair qu'on aura les proportions :

$$1 : p = k : x$$

et

$$1 : q = k : y ;$$

d'où

$$x = kp, \quad y = kq.$$

Supposons maintenant que l'arrivée d'un événement, dont la probabilité est $p$, procure à une personne A le bénéfice $k$, et que sa non-arrivée, ou l'arrivée de l'événement contraire, dont la probabilité est $q$, procure le même bénéfice $k$ à une personne B.

C'est le cas qui se présente quand deux joueurs font ensemble un fonds commun qui doit devenir la propriété du gagnant.

En conservant toutes les notations précédentes, on aura de même, dans ce cas :

$$x = kp, \, y = kq,$$

d'où :

$$p : q = x : y = a : m - a.$$

Mais si l'on parie $g$ écus pour l'arrivée, et $g'$ pour la non-arrivée de l'événement qui doit procurer les bénéfices $x$ et $y$, on devra faire $g = x$, $g' = y$, car les paris doivent être égaux aux bénéfices que l'on attend, on a donc :

$$p : q = g : g' = a : m - a.$$

Il suit de là que si la probabilité d'un événement est exprimée par

$$p = \frac{a}{m},$$

on peut parier $a$ contre $m - a$ que l'événement aura lieu.

7. Comme on a

$$x = kp, \quad y = kq, \quad x + y = k(p + q) = k,$$

il s'ensuit que le droit d'un joueur à la mise totale $k$, quand il a une probabilité $p$ de la gagner, est $kp$, et il peut vendre ce droit pour la somme $kp$ avant que le sort ait décidé sur l'arrivée de l'événement qui doit le faire gagner ou perdre.

Le produit d'une somme $k$ à espérer par la probabilité $p$ de la gagner, se nomme *espérance mathématique.*

Désignons-la par $s$. Si l'arrivée d'un événement dont la probabilité est $p$ procure le bénéfice $k$, l'espérance mathématique correspondante sera donc

$$s = kp;$$

d'où

$$p = \frac{s}{k}.$$

L'espérance mathématique du joueur adverse, à qui la non-arrivée de l'événement procure le bénéfice $k$, ou la crainte, pour le premier, de perdre la somme $k$, sera exprimée par le produit

$$(1 - p)\, k = qk.$$

L'avantage ou le désavantage dans un jeu s'obtient en retranchant la mise de l'espérance mathématique.

Exemple. Un joueur A, ayant quatre chances sur six de gagner, dépose cinq francs; et B, qui n'a que deux chances sur six de gagner, dépose trois francs; la mise totale sera huit francs.

Donc espérance de

$$\mathrm{A} = 8 \cdot \frac{4}{6} = 5\frac{1}{3},$$

espérance de

$$\mathrm{B} = 8 \cdot \frac{5}{6} = 2\frac{2}{3},$$

avantage de

$$\mathrm{A} = 5\frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{3},$$

désavantage de

$$\mathrm{B} = 2\frac{2}{3} - 5 = -\frac{1}{3}.$$

Remarque. On peut encore dire que l'avantage d'un joueur s'obtient en retranchant de son espérance de gagner, le risque de perdre.

L'espérance pour A, de gagner 3, est $3 \times \frac{4}{6} = 2$.

La mise de A est 5, la probabilité de la perdre est $\frac{2}{6}$, il risque donc $5 \times \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$, pour gagner 2. Donc son avantage est $2 - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

8. Les chances favorables et contraires à un événement peuvent être connues, soit directement, soit par des données qui permettent de les calculer. Dans ce cas, on pourra toujours obtenir, par des règles que nous enseignerons, la probabilité correspondante de l'événement. La probabilité ainsi calculée se nomme probabilité *à priori*.

Mais si les chances d'un événement nous sont inconnues, la probabilité correspondante ne peut s'obtenir qu'approximativement, à l'aide d'observations ou d'essais répétés un grand nombre de fois. La probabilité ainsi déterminée se nomme probabilité *à posteriori*.

Ce procédé repose sur le principe que *les chances les plus nombreuses finiront toujours par se produire le plus fréquemment dans un grand nombre d'épreuves.*

Si, par exemple, d'une urne contenant $m$ boules, dont $a$ blanches et $b$ noires, on extrait une boule successivement un grand nombre de fois, en remettant chaque fois dans l'urne la boule qu'on en a extraite; si $a'$ et $b'$ désignent respectivement les nombres des boules blanches et des noires sorties après un grand nombre $\mu$ de tirages, alors les rapports $\frac{a'}{a'+b'}$, $\frac{b'}{a'+b'}$ différeront d'autant moins des probabilités $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$ du tirage d'une boule blanche et d'une noire à chaque coup, que $\mu$ sera plus grand.

Les probabilités sont en général de trois sortes :

1° *Possibilité objective.* La possibilité est objective quand, par la nature même des événements, on voit qu'ils sont possibles dans un rapport donné. Par exemple, au jeu de pile et croix, il est évident que pile et croix sont également possibles;

2° *Possibilité subjective.* La possibilité est subjective quand elle se trouve la considération des motifs qui peuvent nous déterminer à nous prononcer sur l'existence de l'événement. Par exemple : quand on n'a aucune raison de croire qu'un joueur A est plus habile qu'un joueur B, on en conclut que la probabilité pour A de gagner une partie est $\frac{1}{2}$. Ce moyen ne donne que la possibilité relative à l'état de nos connaissances, et non la possibilité réelle de l'événement;

3° *Possibilité à posteriori.* La possibilité *à posteriori* est celle que l'on trouve en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui doit amener l'événement, et en examinant combien de fois il est arrivé; ce moyen fera connaître la probabilité des événements, à peu près.

Parmi les circonstances qui concourent à la production d'un événement, il y en a de variables à chaque instant, et dont la connaissance nous échappe, telles que le mouvement que la main imprime aux dés; c'est la réunion de ces circonstances que nous nommons hasard.

Il en est d'autres qui sont constantes, telle que l'habileté des joueurs, le nombre des faces égales d'un dé, etc. Celles-ci forment les possibilités objectives des événements, et la connaissance plus ou moins étendue que nous en avons détermine leurs possibilités subjectives. Seules, elles ne suffisent pas pour les produire, il faut qu'elles soient jointes aux circonstances variables; elles ne font ainsi qu'augmenter la probabilité des événements, sans déterminer nécessairement leur existence.

9. Mise en équation :

1° Lorsque la possibilité des événements simples est connue, la probabilité des événements composés peut souvent se déterminer par la seule *théorie des combinaisons;*

2° Mais la méthode la plus générale consiste à observer la loi de variation que cette probabilité éprouve par la multiplicité des événements simples, et à la faire dépendre d'une équation aux différences totales ou partielles; l'intégration de cette équation donne l'expression analytique de la probabilité cherchée.

Souvent cette expression devient impossible à cause du grand nombre de ses termes et de leurs facteurs; alors il faut recourir aux méthodes d'approximation pour obtenir des valeurs approchées;

3° Dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus intéressants, les possibilités des événements simples sont inconnues; alors il faut chercher, dans les événements passés, quelques indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur l'avenir.

Dans plusieurs problèmes les nombres des chances sont infinis. Cela arriverait, par exemple, si, en projetant une pièce de monnaie sur une surface, on voulait évaluer dans combien de cas le centre de la pièce tomberait sur l'un des points d'une portion désignée de cette surface. Dans cette question, le nombre des cas favorables serait déterminé par le segment désigné, et le nombre de tous les cas possibles par la surface donnée.

10. On dit que deux événements sont indépendants l'un de l'autre, lorsque l'arrivée de l'un n'influe pas sur celle de l'autre.

Si l'on a, par exemple, deux paquets de treize cartes de même couleur chacun, la sortie d'un as du premier paquet est indépendante de la sortie d'un as du second.

Deux événements sont dépendants quand l'arrivée de l'un

influe sur celle de l'autre : tel serait, par exemple, le cas de la sortie du sept d'un paquet de treize cartes d'une même couleur, après en avoir extrait un as. Car alors des treize chances primitives il n'en resterait plus que douze. La probabilité de l'extraction d'un as étant $\frac{1}{13}$, celle de l'extraction d'un sept serait, au contraire, $\frac{1}{12}$. Si l'on remettait la carte extraite dans le paquet, la probabilité d'en extraire un sept au second coup redeviendrait $\frac{1}{13}$, et les deux événements seraient indépendants.

Le mot cause, dans la théorie des probabilités, désigne l'ensemble des circonstances qui donnent à un événement une probabilité déterminée. Si, par exemple, la probabilité mathématique de la naissance d'un garçon, dans un certain pays, restait numériquement la même, on dirait que la cause, ou les causes de la naissance d'un garçon sont constantes. La cause, ainsi entendue, n'est donc pas ce qui produit un effet ou un événement, mais c'est la chose qui donne à un événement la probabilité qui lui est propre. Ce sont les chances en soi de l'événement.

Lorsque la cause est incertaine, sa probabilité sera plus ou moins grande, selon qu'elle donnera à l'événement plus ou moins de chances favorables, en la supposant certaine. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, *les probabilités des causes, ou des hypothèses, sont proportionnelles aux chances favorables qu'elles donneraient à l'événement observé si elles étaient certaines.*

Soient, par exemple, trois urnes A, B, C, contenant chacune trois boules, savoir : A, une blanche et deux noires; B, deux blanches et une noire; C, trois blanches. Si l'événement attendu est la sortie d'une boule blanche, sans qu'on sache de quelle urne elle a été extraite, la cause de cet événement sera incertaine, et pourra consister dans l'une des trois hypothèses suivantes :

1° Elle est sortie de l'urne A;

2° » » l'urne B;

3° Elle est sortie de l'urne C.

Dans le premier cas, la probabilité de la cause serait proportionnelle à 1, dans le deuxième à 2, et dans le troisième à 3, c'est-à-dire que les probabilités des trois causes ou hypothèses seraient proportionnelles aux chances qu'aurait l'événement, si l'on était certain que la boule sortie est extraite de l'urne A, ou de l'urne B, ou de l'urne C.

11. On nomme *probabilité relative* la probabilité qui se rapporte à un groupe d'événements choisis parmi les événements attendus, en considérant comme nulles les arrivées des autres événements.

On nomme *probabilité absolue* la probabilité de chaque événement lorsqu'on ne fait abstraction d'aucun.

Si, dans un jeu de piquet, on ne veut considérer que les cartes rouges, en regardant comme nulles les sorties des autres couleurs, la probabilité de la sortie d'une rouge sera une probabilité relative.

12. La probabilité de $n$ événements simultanés et indépendants

$$E_1, E_2 .., E_n,$$

est la même que la probabilité de $n$ événements successifs $E_1$, $E_2 .., E_n$; car le temps de leur succession ne peut pas influer sur leur probabilité; on peut donc supposer que ce temps est nul.

Exemple. La probabilité de faire une somme $s$ de points, en projetant sur un tapis $n$ dés identiques, est la même que celle de faire cette même somme en projetant $n$ fois successivement sur le tapis l'un de ces dés.

# CALCUL DES PROBABILITÉS.

## CHAPITRE I.

### RÈGLES FONDAMENTALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

#### PROBABILITÉ TOTALE.

13. Première règle. *La probabilité d'un événement, qui peut arriver de plusieurs manières différentes, et indépendantes entre elles, est égale à la somme des probabilités propres à chacune de ces manières.*

Démonstration. Soient

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}, \quad p_2 = \frac{\alpha_2}{\mu} \ldots\ldots p_m = \frac{\alpha_m}{\mu}$$

les probabilités propres aux événements

$$E_1, \quad E_2 \ldots\ldots E_m;$$

P la probabilité totale de l'arrivée de l'un quelconque de ces événements. Le nombre des chances favorables sera

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_m,$$

et $\mu$ sera le nombre total de ces chances; donc

$$P = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \ldots \frac{\alpha_m}{\mu} = p_1 + p_2 + \ldots + p_m.$$

Exemple. On a $\mu$ cartes dont $a_1$ sont marquées 1, $a_2$ sont marquées 2; ..... $a_m$ sont marquées $m$, etc. Quelle est la probabilité P d'en tirer une marquée 1 ou 2 ou 3 ... ou $m$? On a

$$P=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{\mu}=\frac{a_1}{\mu}+\frac{a_2}{\mu}+\ldots+\frac{a_m}{\mu}=p_1+p_2+\ldots+p_m.$$

Corollaire I. Soient $p_1$, $p_2$ .... $p_m$ les probabilités des événements $E_1$, $E_2$ ... $E_m$; si l'un de ces événements doit nécessairement arriver, la probabilité P que cela aura lieu sera 1 ou la certitude; donc

$$P=p_1+p_2+\ldots+p_m=1.$$

Corollaire II. Soient $p$ la probabilité d'un événement E, $q$ celle de son contraire F; comme l'un de ces événements a lieu nécessairement, on a

$$p+q=1, \quad q=1-p.$$

Remarque. On nomme *probabilité relative*, la probabilité qui se rapporte à un groupe d'événements, choisi parmi les événements attendus, en considérant comme nulles les arrivées des événements qui ne font pas partie de ce groupe.

On nomme *probabilité absolue*, la probabilité de chaque événement, lorsqu'on ne fait abstraction d'aucun.

Exemple. Si, dans un jeu de piquet, on ne veut considérer que les cartes rouges, en faisant abstraction des autres, la probabilité qui se rapporte au tirage d'une rouge désignée sera une probabilité relative.

14. Deuxième règle. *La probabilité relative d'un événement est égale à sa probabilité absolue, divisée par la somme des probabilités des événements parmi lesquels il doit être pris.*

Démonstration. Soit P la probabilité relative de l'événement $E_1$, pris dans le groupe $E_1E_2E_3$ des événements $E_1E_2E_3E_4E_5$; soient

$$p_1=\frac{\alpha_1}{\mu}, \quad p_2=\frac{\alpha_2}{\mu}, \quad p_3=\frac{\alpha_3}{\mu}, \quad p_4=\frac{\alpha_4}{\mu}, \quad p_5=\frac{\alpha_5}{\mu}$$

les probabilités absolues de chaque événement. La probabilité P

est la même que celle que l'on aurait si $E_1E_2E_3$ existaient seuls; donc

$$P = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{\frac{\alpha_1}{\mu}}{\frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \frac{\alpha_3}{\mu}} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Exemple. On a un nombre total $\mu$ de cartes marquées 1, 2, ... $i$ .... $m$; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_m$ sont les nombres de cartes de chaque sorte; on demande :

1° La probabilité relative de tirer une carte marquée $i$, en considérant comme nuls les tirages des cartes portant des numéros plus élevés que $i$;

2° La probabilité de tirer l'une des cartes numérotées de 1 à $i$;

3° La probabilité de tirer l'une quelconque de tirer l'une des cartes numérotées de 1 à $g < i$.

On a :

$$1°\quad P = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i},$$

$$2°\quad P = \frac{p_1 + \ldots\ldots + p_i}{p_1 + \ldots\ldots + p_i} = 1;$$

$$3°\quad P = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_g}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i}.$$

## PROBABILITÉ COMPOSÉE.

15. Troisième règle. *La probabilité d'un événement composé de deux événements consécutifs ou simultanés, est égale au produit des probabilités simples de ces événements.*

Démonstration. Soient $E_1$, $E_2$ deux événements indépendants, consécutifs ou simultanés, ayant respectivement $\alpha_1$ et $\alpha_2$ chances favorables sur $\mu$ et $\nu$ chances totales; il est clair que l'événement composé $F = (E_1E_2)$ aura $\alpha_1 . \alpha_2$ chances favorables sur $\mu\nu$ chances totales; donc

$$P = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\mu\nu} = \frac{\alpha_1}{\mu} \cdot \frac{\alpha_2}{\nu} = p_1p_2.$$

Première remarque. La combinaison des règles deuxième et troisième conduit souvent à la probabilité cherchée, plus facilement que le calcul direct.

Exemple. Soient plusieurs événements $e_1$, $e_2$, ... $e_m$ ayant les probabilités $p_1, p_2 \ldots p_i \ldots p_m$. Soit $\mu$ le nombre total des chances; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_m$ les nombres respectifs des chances favorables, la probabilité de $e_i$ sera $p_i = \frac{\alpha_i}{\mu}$.

C'est là le calcul direct de la probabilité $p_i$; ce calcul n'est pas toujours le plus facile; il est souvent préférable de faire dépendre l'événement $e_i$ du concours de deux autres, savoir :

1° De la sortie de $e_i$ pris dans le groupe $e_1, e_2 \ldots e_i$; la probabilité relative de cette sortie est (n° 14) :

$$P' = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i};$$

2° Du choix que l'on fait de l'un des événements du groupe $e_1 e_2, \ldots e_i$; la probabilité de ce choix est

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_i; \quad \text{on a donc} \quad p_i = P_1 P'.$$

Seconde remarque. Quand l'événement composé doit résulter du concours de plusieurs événements $E_1$, $E_2$ ... successifs, dont chacun dépend de celui qui le précède, on déterminera la probabilité de chacun d'eux, en supposant que ceux qui le précèdent soient arrivés, puis on formera le produit des probabilités ainsi déterminées.

Soient $E_1, E_2, E_3 \ldots E_{n-1}, E_n$ plusieurs événements, dont $E_1$ arrive le premier; $E_2$ le second, etc...., $E_n$ le $n^{ième}$; si $p_1$ est la probabilité de $E_1$, $p_2$ celle de $E_2$ quand $E_1$ est arrivé, etc., $p_n$ celle de $E_n$ quand $E_1, E_2 \ldots E_{n-1}$ sont arrivés, la probabilité P du concours de ces événements sera

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Soit, par exemple, une urne renfermant $a$ boules blanches, et $b$ boules noires : la probabilité d'en extraire une blanche au premier coup sera $p_1 = \frac{a}{a+b}$; en supposant qu'une blanche soit sortie au premier tirage, et que la boule extraite n'ait pas été remise

dans l'urne, la probabilité d'extraire une blanche au second coup sera $p_2 = \frac{a-1}{a+b-1}$.

S'il s'agit maintenant de déterminer la probabilité P de l'événement composé qui consiste dans la sortie d'une boule blanche au premier et au second coup, en supposant que la boule extraite ne soit pas remise dans l'urne, on aura $a(a-1)$ chances favorables sur $(a+b)(a+b-1)$ totales; donc

$$P = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} = p_1 p_2.$$

16. Donc *si deux événements simples sont liés entre eux de manière que l'arrivée du premier influe sur la probabilité de l'arrivée du second, on aura la probabilité de l'événement composé en déterminant : 1° la probabilité du premier événement; 2° la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu.*

On peut également démontrer ce principe de cette manière :

Soit $\mu$ le nombre total des chances, dont $a$ sont favorables au premier événement. Si, parmi ces $a$ chances, il y en a $b$ favorables au second événement, la probabilité de celui-ci, le premier ayant lieu, sera évidemment $\frac{b}{\mu}$. Mais la probabilité du premier événement est $\frac{a}{\mu}$; la probabilité du second est $\frac{b}{a}$, car un des cas $a$ devant exister, on ne doit considérer que ces cas.

Or on a

$$\frac{b}{\mu} = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{a}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple I. La probabilité de tirer un as d'un jeu de trente-deux cartes partagé en deux paquets, se compose :

1° De la probabilité $\frac{16}{32}$ de mettre la main sur un paquet;

2° De la probabilité $\frac{4}{16}$ de tirer un as du paquet.

Donc la probabilité composée $= \frac{16}{32} \times \frac{4}{16} = \frac{1}{8}$.

Exemple II. On demande la probabilité d'extraire deux fois de suite une boule blanche d'une urne contenant quatre blanches et six noires, quand on ne remet pas la boule extraite :

1° Probabilité $\frac{4}{10} = \frac{36}{90}$ d'extraire une blanche au premier coup;

2° Probabilité $\frac{3}{9} = \frac{12}{36}$ d'extraire une blanche au second coup.

Donc la probabilité composée $= \frac{36}{90} \times \frac{12}{36} = \frac{2}{15}$.

17. Soient : E, E′ deux événements; (E, E′) l'événement composé résultant de l'arrivée simultanée de ces deux événements simples;

Soient : P la probabilité de (EE′);

» $p$ celle de E;

» $\varpi$ la probabilité que, E ayant eu lieu, E′ doit pareillement exister, on aura (n° 16) :

$$P = p\varpi, \quad \text{d'où} \quad \varpi = \frac{P}{p};$$

toute la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, tirée des événements passés, découle de cette formule.

On aura donc $\varpi$ en déterminant *à priori* la probabilité de (EE′), et en la divisant par la probabilité du premier événement E.

**Exemples divers sur l'usage des règles précédentes.**

Premier exemple. *Déterminer la probabilité que l'as sort au premier ou au second jet d'un dé ordinaire à six faces.*

1) La probabilité de la sortie au premier coup $= \frac{1}{6}$;

2) La probabilité contraire $= \frac{5}{6}$;

3) La probabilité de la sortie au second coup $= \frac{1}{6}$;

4) La probabilité de ne pas sortir au premier, et de sortir au second $= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$;

5) La probabilité de sortir au premier, ou cela n'étant pas, de sortir au second, $P = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

Deuxième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter six ou sept une seule fois en deux coups avec deux dés.*

Le nombre total des chances avec deux dés est $6 \times 6 = 36$.

Le coup sept a six chances; sa probabilité est donc $\frac{6}{36}$.

Le coup six a cinq chances; sa probabilité est donc $\frac{5}{36}$.

1) La probabilité de jeter six ou sept au premier coup est $\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

2) La probabilité contraire est $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) La probabilité du jet six ou sept au second coup est $\frac{11}{36}$.

4) La probabilité de ne pas jeter six ou sept au premier coup, et de les jeter au second est $\frac{25}{36} \cdot \frac{11}{36} = \frac{255}{1296}$.

5) La probabilité cherchée se compose de la probabilité de jeter six ou sept au premier coup, et de la probabilité de les jeter au second coup, savoir : $\frac{11}{36} + \frac{255}{1296} = \frac{671}{1296}$.

Troisième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter un as au moins une fois en trois coups.*

1) La probabilité de jeter un as au moins une fois en deux coups est $\frac{11}{36}$ d'après le premier exemple.

2) La probabilité contraire est $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) La probabilité de jeter un as au troisième coup, quand il n'est pas venu aux deux premiers, est $\frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36}$.

4) La probabilité cherchée est égale à la somme des probabilités 1) et 3) : $\frac{11}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$.

Quatrième exemple. *Déterminer la probabilité de jeter deux as en trois coups.*

Soit P la probabilité cherchée. L'événement peut avoir lieu de deux manières :

1° Un as sort au premier coup, et l'autre à l'un des deux coups suivants ; soit $p$ la probabilité de cet événement composé.

2° Aucun as ne sort au premier coup, les deux sortent aux coups suivants; soit $p_2$ la probabilité de cet événement composé, on aura :

$$P = p_1 + p_2.$$

*Déterminons* $p_1$ ;

1) La probabilité de jeter un as au premier coup est $\frac{1}{6}$.

2) La probabilité d'en jeter un à l'un des deux coups suivants est $\frac{11}{36}$ (3e ex.)

3) La probabilité de jeter un as au premier coup, et un à l'un des deux coups suivants est $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216}$.

*Déterminons* $p_2$ ;

1) La probabilité de ne pas jeter un as au premier coup est $\frac{5}{6}$.

2) La probabilité de jeter deux as aux deux coups suivants est $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

3) La probabilité de ne pas jeter un as au premier coup, et de le jeter aux deux coups suivants, ou $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{216}$. Donc

$$P = \frac{5}{216} + \frac{11}{216} = \frac{16}{216}.$$

Cinquième exemple. *Soit* p *la probabilité simple d'un événement,* q *la probabilité contraire, déterminer la probabilité que l'événement arrive* l *fois en* n *coups.*

Soit $P_{n,l}$ la probabilité cherchée. L'événement peut avoir lieu de deux manières :

1° Il arrive au premier coup, et aux coups suivants il arrive $l-1$ fois ;

2° Il n'arrive pas au premier coup, mais $l$ fois aux coups suivants.

*Première manière :* 1) La probabilité que l'événement arrivera au premier coup est $p$.

2) La probabilité que l'événement arrive $l-1$ fois aux coups suivants est $P_{n-1,\,l-1}$.

3) La probabilité que l'événement arrivera une fois au premier coup, et $l-1$ fois aux coups suivants est $p.P_{n-1,\,l-1}$.

*Seconde manière :* 1) La probabilité que l'événement n'arrive pas au premier coup est $q$.

2) La probabilité que l'événement arrivera $l$ fois aux coups suivants est $P_{n-1,\,l}$.

3) La probabilité que l'événement n'arrivera pas au premier coup, mais $l$ fois aux coups suivants est $q.P_{n-1,\,l}$. Donc

$$P_{n,l} = pP_{n-1,\,l-1} + qP_{n-1,\,l}.$$

On déterminera de la même manière les termes du second membre, et ainsi de suite.

Sixième exemple. A *et* B *jouent ensemble; ils ont la même probabilité de gagner un coup;* A *n'a qu'un point à faire pour gagner la partie;* B *en a deux; quelles sont leurs probabilités respectives de gagner la partie ?*

La partie sera achevée en deux coups au plus; car si A fait son point au premier coup, la partie cesse; si A manque le pre-

mier coup, B fait un des siens; si au second coup A fait son point, la partie cesse, sinon B fait son second point, et la partie cesse.

Donc A ne doit gagner qu'une fois en deux coups : la probabilité qu'il a de gagner au premier coup est $\frac{1}{2}$; la probabilité qu'il ne gagne pas au premier, et qu'il gagne au second, est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ : la probabilité qu'il a de gagner est donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B doit gagner deux coups consécutifs; la probabilité pour B de gagner un coup est $\frac{1}{2}$, et celle de gagner deux coups consécutifs est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Septième exemple. *Une urne contient* $\mu = \alpha_1 + \alpha_2$ *boules,* $\alpha_1$ *marquées* 1, *et* $\alpha_2$ *marquées* 2. *On demande la probabilité qu'en extrayant successivement deux boules, ce seront :* 1° *deux boules marquées* 1 ; 2° *une boule marquée* 1 *au premier tirage, et une marquée* 2 *au second. On ne remet pas dans l'urne la boule extraite.*

Soit $p_1$ la probabilité de la sortie d'une boule 1, au premier tirage, on a $p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}$.

Soit $p'_1$ la probabilité de la sortie d'une boule 1 au second tirage, on a :

$$p'_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{\mu - 1}.$$

Donc 1° la probabilité $P_1$ de la sortie d'une boule 1 dans chacun des deux tirages sera :

$$P_1 = \frac{\alpha_1 (\alpha_1 - 1)}{\mu (\mu - 1)}.$$

La probabilité d'extraire une boule 2 au second tirage est

$$p'_2 = \frac{\alpha_2}{\mu - 1};$$

donc 2° la probabilité $P_2$ d'extraire une boule 1 au premier tirage, et une boule 2 au second tirage est

$$P_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu (\mu - 1)}.$$

Huitième exemple. *Une urne contient* a *boules blanches et* b *boules noires, en tout* c *boules; quelle est la probabilité* P *d'en extraire, en* m + n *tirages*, m *blanches et* n *noires dans un ordre déterminé, sans remettre dans l'urne la boule extraite?*

Cette probabilité sera (n° 15) :

$$P = \frac{a(a-1)\dots(a-m+1).b(b-1)\dots(b-n+1)}{c(c-1)\dots(c-m-n+1)}$$

Neuvième exemple. *Soient* $A_1$, $A_2$, $A_3$, *etc., des urnes : la première contient* $m_1$ *boules, dont* $\alpha_1$ *sont blanches; la seconde contient* $m_2$ *boules, dont* $\alpha_2$ *sont blanches, etc... Soient* $p_1$, $p_2$, $p_3$.... *les probabilités que la main se portera sur* $A_1$, $A_2$, $A_3$ ....; *quelle est la probabilité* P *d'extraire une blanche en mettant la main au hasard dans l'une de ces urnes?*

Solution. Soient $p'$, $p''$, $p'''$.... la probabilité qu'une blanche sera extraite de l'une des urnes respectives $A_1$, $A_2$, $A_3$....; on aura :

$$P = p' + p'' + p''' + \dots$$

La probabilité de mettre la main sur $A_1$ est $p_1$ ; celle d'en tirer une blanche est

$$\varpi_1 = \frac{\alpha_1}{m_1},$$

d'où

$$p' = p_1\varpi_1.$$

On aurait de même

$$p'' = p_2\varpi_2, \text{ etc.},$$

donc

$$P = p_1\varpi_1 + p_2\varpi_2 + p_3\varpi_3 + \text{etc.}$$

Corollaire. Si $m$ est le nombre des urnes, et si l'on a :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = \frac{1}{m},$$

il s'ensuivra :

$$P = \frac{1}{m}\{\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \dots\}.$$

18. Remarque. La probabilité P de l'événement composé

$(E_1E_2 \dots E_m)$, les probabilités respectives des événements simples étant $p_1, p_2 \dots p_m$, est (n° 15) $P = p_1 . p_2 \dots p_m$. D'où résulte

$$P < p_1; \quad P < p_1p_2; \text{ etc.},$$

donc la probabilité d'un événement composé diminue avec le nombre des événements simples.

Corollaire I. Si $p_1 = p_2 = \dots = p$, on a :

$$P = p^m.$$

Corollaire II. Soient $p$ la probabilité de E, $q$ celle de son contraire F, d'où $p + q = 1$. La probabilité que E arrivera $m$ fois dans un ordre donné, en $m + n$ tirages, sera

$$P = p^m . q^n.$$

Corollaire III. Les mêmes choses étant posées, la probabilité P que E arrive au moins une fois sur $n$ épreuves sera

$$P = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n \quad \dots\dots \text{(a)}.$$

En effet $Q = q^n$ étant la probabilité que F arrive $n$ fois, on a évidemment

$$P + Q = 1, \quad \text{donc} \quad P = 1 - Q.$$

De l'équation (a) on tire

$$n = \frac{\log(1 - P)}{\log(1 - p)},$$

$n$ est le nombre d'épreuves nécessaire pour que l'arrivée de E, au moins une fois, ait une probabilité donnée.

Exemple. Combien faut-il d'épreuves pour qu'on puisse parier un contre un, que E arrive au moins une fois?

On a

$$P = \frac{1}{2},$$

donc

$$n = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log(1 - p)}.$$

Corollaire IV. Soient $p_1$ et $q_1$ les probabilités des événements contraires $A_1$ et $B_1$; $p_2$ et $q_2$, $p_3$ et $q_3$, etc., les probabilités des événements contraires $A_2$ et $B_2$; $A_3$ et $B_3$, etc., de sorte que $p_1 + q_1 = 1$; $p_2 + q_2 = 1$, etc.

La probabilité que $A_1$ ou $B_1$ arrive avec l'un quelconque des autres $A_2$ et $B_2$, $A_3$ et $B_3$, etc., sera

$$P = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) \cdots = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

En effet, considérons d'abord deux couples d'événements $A_1$, $B_1$ et $A_2$, $B_2$, nous aurons les événements composés

$A_1A_2$ dont la probabilité est $p_1p_2$,
$A_1B_2$ » » $p_1q_2$,
$B_2A_2$ » » $q_1p_2$,
$B_1B_2$ » » $q_1q_2$,

et la probabilité de l'arrivée de l'un quelconque de ces événements composés sera

$$P = p_1p_2 + p_1q_2 + q_1p_2 + q_1q_2 = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) = 1.$$

De même pour un nombre quelconque de couples $A_1$, $B_1$; $A_2$, $B_2$; $A_3$, $B_3$, etc., on aura :

$$P = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) \cdots = 1.$$

Remarque. Chaque terme $p_1p_2q_3$ .... du produit (a) est la probabilité d'une combinaison telle que $A_1A_2B_3$ ....

Dixième exemple. *Une loterie se compose de* k *numéros; on en tire* l *à chaque tirage. Quelle est la probabilité* P *que* n *de ces numéros sortiront?*

Soit $f$ le nombre des cas favorables; soit $t$ le nombre total des cas, on a, en désignant par ${}^lC_n$ ou ${}^kC_n$ le nombre des combinaisons de $l$ ou $k$ événements pris $n$ à $n$ :

$$f = {}^lC_n = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

$$t = {}^kC_n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1.2\ldots.n},$$

d'où $$P = \frac{f}{t} = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}.$$

Onzième exemple. *On a certain nombre pair* 2i *de paquets contenant chacun* r *cartes*; *savoir* :

r *cartes marquées* $a_1, b_1, c_1 \ldots$ 1)
r » » $a_2, b_2, c_2 \ldots$ 2)
. . . .. . . . . . . . . . . . . .
r » » $a_{2i}, b_{2i}, c_{2i} \ldots$ 2*i*)

*Après avoir mêlé ces cartes, on en fait deux paquets égaux,* M *et* N, *de* ir *cartes chacun. On retourne l'une des cartes du paquet* M, *et l'on demande la probabilité qu'un nombre* n *de cartes de l'une des collections* 1 . 2 ..... i (*par exemple, de la collection* i) *sera dans le paquet* M, *ou dans le paquet* N.

Solution. Soient $g$ la probabilité que la carte retournée est l'une des $n$ cartes désignées;

$g'$ la probabilité contraire ou $g' = 1 - g$;

$\varpi$ la probabilité que les $n$ cartes sont dans le paquet M, quand la carte retournée est une des $n$;

$\varpi'$ la probabilité que les $n$ cartes sont dans ce même paquet M, quand la carte retournée n'est pas une des $n$;

P la probabilité que le premier paquet contient les $n$ cartes, savoir $P = g\varpi + g'\varpi' \ldots$ (1);

$\varpi_1$ la probabilité que, la carte retournée n'étant pas une des $n$, le paquet N renferme les $n$;

P′ la probabilité que le second paquet contient les $n$ cartes, savoir $P' = g'\varpi_1 \ldots$ (2).

En effet, la carte retournée étant prise dans le paquet M, si elle n'est pas une des $n$, n'influe pas sur la probabilité que le paquet N renferme les $n$; donc celle-ci ne se compose que de $g'\varpi_1$.

Il faut déterminer $g$, $g'$, $\varpi$, $\varpi'$, et $\varpi_1$.

Déterminons d'abord $g$ et $g'$.

Comme les $n$ cartes sont prises parmi $r$ cartes, on a

$$g = \frac{n}{r} \quad \text{et} \quad g' = 1 - \frac{n}{r} = \frac{r-n}{r}.$$

Ensuite pour déterminer $\varpi$ et $\varpi'$, observons : 1° que si la carte retournée est une des $n$ cartes, il faut que les $ir - 1$ cartes restantes contiennent $n - 1$ des cartes désignées : cela peut se faire d'autant de manières que $ir - 1$ cartes peuvent se combiner $n - 1$ à $n - 1$ ; donc le nombre des cas favorables est :

$$(ir-1)\,C_{n-1} = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-1-(n-1)+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)} = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)}.$$

Le nombre des combinaisons de $2ir - 1$ cartes $n - 1$ à $n - 1$ ou de tous les cas possibles est :

$$(2ir-1)\,C_{n-1} = \frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)}$$

Donc nous aurons :

$$\varpi = \frac{(ir-1)\,C_{n-1}}{(2ir-1)\,C_{n-1}}.$$

2° Si la carte retournée n'est pas l'une des $n$, il faut que les $ir - 1$ restantes renferment les $n$ cartes. Le nombre des cas favorables est

$$(ir-1)\,C_n = \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots\ldots(ir-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)} \cdot \frac{ir-n}{n}.$$

Le nombre de tous les cas sera :

$$(2ir-1)\,C_n = \frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)} \cdot \frac{2ir-n}{n}.$$

Donc

$$\varpi' = \frac{(ir-1)\,C_n}{(2ir-1)\,C_n} = \varpi \cdot \frac{ir-n}{2ir-n}.$$

Enfin déterminons $\varpi_1$ : si les $n$ cartes sont parmi les $ir$ cartes du paquet N, le nombre des cas favorables sera

$$ir\,C_n = \frac{ir}{n} \cdot \frac{(ir-1)(ir-2)\ldots(ir-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n-1)}.$$

Le nombre total des cas sera

$$(2ir-1)\,C_n = \frac{2ir-n}{n}\cdot\frac{(2ir-1)(2ir-2)\ldots\ldots(2ir-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$\varpi_1 = \frac{ir\,C_n}{(2ir-1)\,C_n} = \varpi\,\frac{ir}{2ir-n}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de P et de P′ on trouve

$$P = \frac{\varpi}{r}\left\{n + \frac{(r-n)(ir-n)}{2ir-n}\right\} = \varpi\,\frac{in+ir-n}{2ir-n},$$

$$P' = \frac{r-n}{r}\,\frac{ir}{2ir-n}\,\varpi = \varpi\cdot\frac{ir-in}{2ir-n}.$$

Douzième exemple. *Trouver, au jeu de piquet, la probabilité pour celui qui fait les cartes de lever un as au moins dans le talon, qui est de trois cartes, quand il n'a aucun as en main.*

Soit $P = \frac{N}{D}$ cette probabilité.

1° Chercher D. Comme on a douze cartes en main, il en reste $32 - 12 = 20$, parmi lesquelles se trouvent les quatre as : trois de ces vingt cartes composent le talon, donc le nombre D, qui est le nombre de toutes les manières possibles dont le talon peut être composé, sera celui des combinaisons de vingt cartes prises trois à trois, c'est-à-dire : $\frac{20\,.\,19\,.\,18}{1\,.\,2\,.\,3} = 1140$.

2° Chercher N. Le nombre N se compose de la somme de trois termes, savoir :

$a_1$, nombre des cas dans lesquels un as peut se rencontrer avec deux autres cartes;

$a_2$, nombre des cas dans lesquels deux as peuvent se rencontrer avec une autre carte;

$a_3$, nombre des cas dans lesquels trois as composent le talon.

Ainsi

$$N = a_1 + a_2 + a_3.$$

Il y a quatre as dans trente-deux cartes; par conséquent il y a $32 - 4 = 28$ autres cartes, desquelles celui qui fait les cartes

en a en main douze, qui ne renferment pas d'as; il en reste donc seize.

1° Le nombre des chances de lever un as est 4.

Le nombre des chances de lever deux autres cartes est $\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$.

Donc $$a_1 = 4 \times 120 = 480.$$

2° Le nombre des chances de lever deux as est $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Le nombre des chances de lever une autre carte est 16.

Donc $$a_2 = 6 \times 16 = 96.$$

3° Le nombre des chances de lever trois as est $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$.

Donc $$a_3 = 4.$$

Ainsi $$N = 480 + 96 + 4 = 580.$$

Enfin, en divisant N par D on trouvera :

$$P = \frac{580}{1140} = \frac{29}{57}.$$

La probabilité contraire sera

$$Q = 1 - \frac{29}{57} = \frac{28}{57}.$$

On peut donc parier 29 contre 28 que le joueur trouve un as au moins dans le talon.

Remarque. *Trouver de même la probabilité pour celui qui a la main, de lever un as au moins dans les trois cartes du talon, quand il n'a aucun as en main.*

On trouvera en procédant d'une manière analogue :

$$P = \frac{232}{323} \quad \text{et} \quad Q = \frac{91}{323}.$$

Treizième exemple. *Trouver la probabilité pour celui qui a la main de lever un as et un roi dans les cinq cartes du talon, quand il n'a ni as ni roi en main.*

Les combinaisons suivantes peuvent avoir lieu au talon :

N° 1 1 as, 1 roi, 3 autres cartes,
N° 2 1 as, 2 rois, 2 » »
N° 3 1 as, 3 rois, 1 » »
N° 4 1 as, 4 rois, 0 » »
N° 5 2 as, 1 roi, 2 » »
N° 6 2 as, 2 rois, 1 » »
N° 7 2 as, 3 rois, 0 » »
N° 8 3 as, 1 roi, 1 » »
N° 9 3 as, 2 rois, 0 » »
N° 10 4 as, 1 roi, 0 » »

Parmi ces dix cas les couples suivants donnent les mêmes chances :

N° 2 avec N° 5,
N° 3 avec N° 8,
N° 4 avec N° 10,
N° 7 avec N° 9.

Il reste donc seulement six cas distincts, savoir :

N° 1 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{12.11.10}{1.2.3} = 3520$ chances,

N$^{os}$ 2 et 5 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{12.11}{1.2} = 1584$ » chacun,

N$^{os}$ 3 et 8 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{12}{1} = 192$ » chacun,

N$^{os}$ 4 et 10 avec $\frac{4}{1} \cdot \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 4$ » chacun,

N° 6 avec $\frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{12}{1} = 432$ »

N$^{os}$ 7 et 9 avec $\frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} = 24$ » chacun.

Donc

$$N = 5520 + 2 + 1584 + 2 + 192 + 2 + 4 + 432 + 2 + 24 = 9144,$$

$$D = \frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5} = 15504,$$

$$P = \frac{N}{D} = \frac{9144}{15504} = \frac{381}{646}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{265}{646}.$$

Quatorzième exemple. *Trouver la probabilité de faire cartes blanches.*

$$P = \frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9}{52\ 51\ 50\ 29\ 28\ 27\ 26\ 25\ 24\ 23\ 22\ 21}$$

$$= \frac{525}{578956} = \frac{1}{1792} \text{ (à peu près)}, \quad \text{d'où}$$

$$Q = \frac{1791}{1792}.$$

---

## CHAPITRE II.

### PROBABILITÉS DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES.

19. Dans ce chapitre nous exposerons successivement les théories des probabilités relatives aux puissances et aux factorielles des polynomes et des binomes; puis celles qui sont relatives aux produits de binomes et de polynomes quelconques; ensuite quelques applications remarquables de ces théories.

#### § I. — PUISSANCES DES POLYNOMES ET DU BINOME.

Soient

$$a_1, a_2 \ldots a_l;\ b_1, b_2 \ldots b_m;\ c_1, c_2 \ldots c_n \ldots$$

des événements ayant les probabilités

$$p_1, p_2 \ldots p_l;\ q_1, q_2 \ldots q_m;\ r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$$

La probabilité P qu'ils ont lieu ensemble dans un seul ordre est (n° 15)

$$P = p_1 p_2 \ldots p_l \cdot q_1 q_2 \ldots q_m \cdot r_1 r_2 \ldots r_n.$$

Mais si $a_1$ se répète $l$ fois, $b_1$, $m$ fois et $c_1$, $n$ fois, on a

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_l \quad b_1 = b_2 \ldots = b_m \quad c_1 = c_2 \ldots = c_n \text{ etc.}$$
$$p_1 = p_2 = \quad = p_l \quad q_1 = q_2 \ldots = q_m \quad r_1 = r_2 \ldots = r_n \text{ etc.,}$$

d'où

$$\mathrm{P} = p_1^l q_1^m r_1^n.$$

Si l'événement composé dont il s'agit doit arriver dans un ordre quelconque,

$$\mathrm{P} = p_1^l q_1^m r_1^n + p_1^l q_1^m r_1^n + \ldots = k p_1^l q_1^m r_1^n.$$

$k$ désignant de combien de manières différentes on peut déterminer un ordre.

#### 1. Puissance du polynome.

20. Si l'un des événements A, B, C... doit arriver nécessairement à chaque épreuve, et si leurs probabilités respectives sont $p, q, r \ldots$, la probabilité que l'un quelconque d'entre eux arrivera à l'une des épreuves sera :

$$\mathrm{P} = p + q + r + \ldots = 1.$$

La probabilité qu'ils se produisent $\mu$ fois de suite, n'importe dans quel ordre, sera :

$$\mathrm{P} = (p + q + r + \ldots)^\mu = \sum \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!} p^l q^m r^n \ldots = 1. \quad (1)$$

$$\mu = l + m + n + \ldots \quad (2)$$

Le terme général

$$\varpi = \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!\ldots} p^l q^m r^n \ldots \quad (3)$$

exprime la probabilité que sur $\mu$ épreuves on produira, dans un ordre quelconque, A, $l$ fois, B, $m$ fois, C, $n$ fois, etc., car on a ici $k = \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!} \ldots$, égal au nombre des permutations de $\mu$ lettres, dans lesquelles il entre $l$ lettres A, $m$ lettres B, $n$ lettres C ....

#### 2. Puissance du binome.

S'il n'y a que deux événements A et B, alors $\mathrm{P} = p + q = 1$, exprime la probabilité que A ou B se produira en une seule

épreuve; la probabilité qu'ils se produiront $\mu$ fois de suite, n'importe dans quel ordre, sera :

$$P = (p + q)^{\mu} = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!} p^m q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$\mu = m + n.$$

Le terme général

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\, n!} p^m q^n = \frac{\mu\,(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1)}{1 \,.\, 2 \,.\ldots. n} p^{\mu - n} q^n$$

exprime la probabilité qu'en $\mu$ épreuves A arrive $m$ fois, et B, $n$ fois, dans un ordre quelconque; car $k = \frac{\mu!}{m!\, n!}$ exprime le nombre des permutations de $\mu$ lettres dans lesquelles $m$ sont égales à A, et $n$ égales à B.

### 3. Polynome des factorielles.

21. Une urne renferme en tout $s$ boules, dont $a$ sont marquées $\alpha$, $b$ sont marquées $\beta$, $c$ sont marquées $\gamma$, etc...

On fait $\mu$ tirages sans remettre dans l'urne la boule extraite; on demande la probabilité $\varpi$ qu'en $\mu$ tirages il sortira $m$ boules $\alpha$, $n$ boules $\beta$, $l$ boules $\gamma$, etc., n'importe dans quel ordre; et la probabilité P qu'en $\mu$ tirages il sortira des boules $\alpha$, $\beta$, $\gamma$..., n'importe l'ordre et le nombre.

Nous commencerons par supposer qu'on extraie d'abord les $m$ boules $\alpha$, puis les $n$ boules $\beta$, et enfin les $l$ boules $\gamma$.

Soient $p_1$ la probabilité de tirer une boule $\alpha$ au 1$^{er}$ tirage;

» $p_2$ » » » $\alpha$ au 2$^{d}$ tirage;

⋮

» $p_m$ » » » $\alpha$ au $m^{e}$ tirage;

» $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ les probabilités respectives de tirer une boule $\beta$ au 1$^{er}$, au 2$^{d}$, ... au $n^{e}$ tirage;

Soient $r_1, r_2 \ldots r_l$ les probabilités respectives de tirer une boule $\gamma$ au 1$^{er}$, au 2$^{d}$, au .... $l^{e}$ tirage.

En supposant que les boules sortent dans l'ordre indiqué, on aura les probabilités simples

$$p_1 = \frac{a}{s} \quad p_2 = \frac{a - 1}{s - 1} \quad \ldots\ldots p_m = \frac{a - m + 1}{s - m + 1},$$

$$q_1 = \frac{b}{s-m} \quad q_2 = \frac{b-1}{s-m-1} \cdots \quad q_n = \frac{b-n+1}{s-m-n+1},$$

. . . . . .

$$r_1 = \frac{c}{s-m-n}, \; r_2 = \frac{c-1}{s-m-n-1} \cdots r_n = \frac{c-l+1}{s-m-n-l+1},$$

Comme $\mu = m + n + l + \cdots$, la probabilité $p$ du concours de ces tirages dans un seul ordre sera :

$$p = p_1 p_2 \cdots p_m q_1 q_2 \cdots q_n \cdot r_1 \cdot r_2 \cdots r_l \cdots =$$

$$\frac{a(a-1)\cdots(a-m+1)\cdot b(b-1)\cdots(b-n+1)\cdot c(c-1)\cdots(c-l+1)}{s(s-1)\cdots\cdots(s-\mu+1)} =$$

$$\frac{a^{m-1} b^{n-1} c^{l-1}}{s^{\mu-1}}$$

donc

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!} \cdot \frac{a^{m-1} b^{n-1} c^{l-1}}{s^{\mu-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sera la probabilité des tirages qui amènent $m$ boules $\alpha$, $n$ boules $\beta$, $l$ boules $\gamma$, etc., n'importe dans quel ordre.

En donnant à $m, n, l \ldots$ toutes les valeurs, à partir de zéro, compatibles avec $\mu = m + n + l \ldots$ la somme de toutes ees valeurs exprime la probabilité P, donc

$$\mathrm{P} = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!} \cdot \frac{a^{m-1} b^{n-1} c^{l-1}}{s^{\mu-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On peut encore obtenir la valeur de P de la manière suivante : Soient

$$\varpi_1 = \frac{a + b + c + \cdots}{s}$$

$$\varpi_2 = \frac{a + b + c + \cdots - 1}{s-1}$$

$$\varpi_\mu = \frac{a + b + c + \cdots - \mu + 1}{s - \mu + 1}$$

les probabilités simples qu'à chacun des tirages consécutifs il ne

sortira qu'une boule de l'une des marques $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. la probabilité de leur concours sera

$$P = \varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \ldots \varpi_\mu = \frac{[a + b + c + \ldots]^{\mu/-1}}{s^{\mu/-1}} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Donc en comparant (2) et (3), on obtient

$$\frac{[a + b + c \ldots]^{\mu/-1}}{s^{\mu/-1}} = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!\, l!} \cdot \frac{a^{m/-1} b^{n/-1} c^{l/-1}}{s^{\mu/-1}} \quad . \quad . \quad (4).$$

#### 4. Binome des factorielles.

22. Lorsqu'il n'y a que deux sortes de boules aux marques $\alpha$ et $\beta$, la formule (4) devient

$$\frac{(a + b)^{\mu/-1}}{s^{\mu/-1}} = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!} \frac{a^{m/-1} \cdot b^{n/-1}}{s^{\mu/-1}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Remarque I. Si la boule extraite est remise dans l'urne, les factorielles $a^{m/-1}$, etc. se changent en puissances, et l'on a

$$\frac{(a + b + c + \ldots)^\mu}{s^\mu} = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!\, l!} \frac{a^m b^n c^l \ldots}{s^m s^n s^l} .$$

Soit

$$\frac{a}{s} = p, \quad \frac{b}{s} = q, \quad \frac{c}{s} = r, \text{ etc.}$$

il vient

$$(p + q + r + \ldots)^\mu = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!\, l!} p^m q^n r^l \ldots .$$

Remarque II. La formule (5) développée est

$$\frac{(a + b)^{\mu/-1}}{s^{\mu/-1}} = \frac{1}{s^{\mu/-1}} \left\{ a^{\mu/-1} + \mu\, a^{\mu-1/-1} b + \frac{\mu\,(\mu - 1)}{1 \cdot 2} a^{\mu/-2} b^{2/-1} + \ldots . \right.$$

$$\left. + \frac{\mu!}{k!\, \mu - k!} a^{k/-1} b^{\mu-k/-1} + \ldots \mu a b^{\mu-1/-1} + b^{\mu/-1} \right\} = 1 .$$

La probabilité R de tirer au moins $k$ boules marquées $\alpha$ est

$$R = \frac{1}{s^{\mu/-1}} \left\{ a^{\mu/-1} + \mu a^{\mu-1/-1} b + \ldots + \frac{\mu!}{k!\, \mu - k!} a^{k/-1} b^{\mu-k/-1} \right\} .$$

La probabilité Q d'amener au moins une boule $\alpha$ est

$$Q = 1 - \frac{b^{\mu_1 - 1}}{s^{\mu_1 - 1}}.$$

#### 5. Produit de facteurs binomes.

23. Si dans $\mu = m + n$ épreuves, $p_1$ et $q_1$ sont les probabilités des événements contraires A et B à la première épreuve; $p_2$ et $q_2$ leurs probabilités à la seconde; .... $p_\mu$ et $q_\mu$ leurs probabilités à la $\mu^{me}$ épreuve; quelle est la probabilité P que A et B arriveront, dans un ordre quelconque, le premier $m$ fois et le second $n$ fois?

$p_1 + q_1$, $p_2 + q_2$, ..... $p_\mu + q_\mu$ sont les probabilités que A ou B arriveront respectivement à la 1re, 2me, .... $\mu^{me}$ épreuve; la probabilité qu'ils se produiront suivant une combinaison quelconque en $\mu$ épreuves, sera par suite :

$$\varpi = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) .... (p_\mu + q_\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Donc la probabilité demandée P sera la somme de tous les termes de $\varpi$ dans lesquels entreront $m$ des facteurs $p_1 ... q_\mu$ avec $n$ des facteurs $q_1 .... q_\mu$. Ces termes seront homogènes en $p$ et $q$, et contiendront $m$ dimensions en $p$, et $n$ dimensions $q$ : ainsi, en remplaçant les lettres

$$p_1, \quad p_2 \quad ..... p_\mu \qquad q_1, \quad q_2 \quad .... q_\mu$$

par

$$p_1 u, p_2 u \quad .... \quad p_\mu u \qquad q_1 v, q_2 v \quad ... \quad q_\mu v,$$

on aura :

$$(p_1 u + q_1 v)(p_2 u + q_2 v) .... (p_\mu u + q_\mu v) = \Sigma \, H \, u^k v^l$$

Soit M le coefficient du terme de cette somme qui répond à $k = m$, $l = n$, on aura $P = M$.

#### 6. Produit de facteurs polynomes.

24. On a un dé à $q$ faces numérotées 1, 2 .... $q$. Chaque face a une probabilité particulière qui change d'une épreuve à la

suivante; chaque fois que l'on jette le dé, on note le numéro sorti. Après $\mu$ jets consécutifs on additionne les numéros inscrits, et l'on demande la probabilité P que la somme soit $m$.

Désignons par $p_1^{(1)}\, p_1^{(2)} \ldots\ldots\, p_1^{(q)}$ les probabilités des faces $1 . 2 \ldots q$ à la première épreuve ; par $p_2^{(1)}\, p_2^{(2)} \ldots p_2^{(q)}$ leurs probabilités à la seconde épreuve; et enfin par $p_\mu^{(1)}\, p_\mu^{(2)} \ldots p_\mu^{(q)}$ leurs probabilités à la $\mu^{\text{me}}$ épreuve.

$$\varpi_1 = p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots + p_1^{(q)}$$

représente la probabilité que l'une des faces $1 \ldots q$ sortira au premier jet ;

$$\varpi_2 = p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + \cdots p_2^{(q)}$$

la même probabilité relative au second jet, etc.

Enfin

$$\varpi_\mu = p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} + \cdots + p_\mu^{(q)}$$

celle relative au $\mu^{\text{me}}$ jet.

Donc

$$\varpi = \varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_\mu = \left\{p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots p_1^{(q)}\right\} \left\{p_2^{(1)} + \cdots p_2^{(q)}\right\} \cdots \left\{p_\mu^{(1)} + \cdots p_\mu^{(q)}\right\}$$

probabilité de l'arrivée simultanée de tous les événements, renfermera les probabilités relatives à toutes les sommes possibles produites par $\mu$ jets.

Donc la probabilité cherchée P est la somme des termes de $\varpi$ dans lesquels la somme des indices supérieurs est $m$. Pour faire ressortir cette somme, remplaçons le produit $\varpi$, par le suivant :

$$\varpi = \left\{p_1^{(1)} t + p_1^{(2)} t^2 + \cdots p_1^{(q)} t^q\right\} \left\{p_2^{(1)} t + \cdots p_2^{(q)} t^q\right\} \cdots \left\{p_\mu^{(1)} t + \cdots p_\mu^{(q)} t^q\right\}$$
$$= \Sigma\, \mathrm{U}_i t^i.$$

On aura

$$\mathrm{P} = \mathrm{U}_m.$$

Remarque. En décomposant $m$ de toutes les manières possibles en $\mu$ chiffres, en ayant égard aux arrangements, on obtient $\mathrm{U}_m$. En effet soient

$$m = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots + \lambda_1$$
$$m = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots + \lambda_2$$
etc.

On aura :

$$P = U_m = p_1^{(\alpha_1)} p_2^{(\beta_1)} p_3^{(\gamma_1)} \ldots p_\mu^{(\lambda_1)} + p_1^{(\alpha_2)} p_2^{(\beta_2)} \ldots p_\mu^{(\lambda_2)} + \ldots$$

## § 2. APPLICATIONS DIVERSES DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS.

25. LEMME. Chercher le coefficient K de $\varpi^p$ dans le développement de

$$\left\{\varpi + \varpi^2 + \ldots + \varpi^q\right\}^n = \varpi^n \left\{1 + \varpi + \ldots \varpi^{q-1}\right\}^n.$$

Posons $p = n + \alpha$, et cherchons le coefficient de $\varpi^\alpha$ dans le développement de

$$\left.\begin{aligned}(1 + \varpi + \ldots + \varpi^{q-1})^n &= \frac{(1-\varpi^q)^n}{(1-\varpi)^n} = (1-\varpi^q)^n (1-\varpi)^{-n} \\ &= \left[1 - n\varpi^q + \frac{n^{2|-1}}{2!}\varpi^{2q} - \frac{n^{3|-1}}{3!}\varpi^{3q} + \ldots\right] \\ &\times \left[1 + n\varpi + \frac{(n+1)^{2|-1}}{2!}\varpi^2 + \frac{(n+2)^{3|-1}}{3!}\varpi^3 + \ldots\right]\end{aligned}\right\} (a).$$

Or évidemment

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \alpha, \\ q + \alpha - q &= \alpha, \\ 2q + \alpha - 2q &= \alpha, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Les premier, second, etc., termes du premier facteur, devront donc être multipliés par les termes en $\varpi^\alpha$, $\varpi^{\alpha-q}$ $\varpi^{\alpha-2q}$.... du second facteur; or ces derniers sont

$$\begin{aligned} &(n + \alpha - 1)\, C_\alpha\, \varpi^\alpha, \\ &(n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q}\, \varpi^{\alpha-q}, \\ &(n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q}\, \varpi^{\alpha-2q}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

donc, le terme en $\varpi^\alpha$ sera

$$\left\{\begin{aligned}&(n + \alpha - 1)\, C_\alpha - n\, C_1 . (n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q} \\ &\quad + n\, C_2 . (n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q} + \ldots\end{aligned}\right\} \varpi^\alpha$$

et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned}K = &(n + \alpha - 1)\, C_\alpha - n\, C_1 . (n + \alpha - q - 1)\, C_{\alpha-q} \\ &+ n\, C_2 . (n + \alpha - 2q - 1)\, C_{\alpha-2q} + \ldots\end{aligned}\right\} (I).$$

**Simplification de K.**

Comme on a

$$(\alpha - \mu q) + (n - 1) = n + \alpha - \mu q - 1$$

on aura :

$$(n + \alpha - \mu q - 1)\,C_{\alpha-\mu q} = (n + \alpha - \mu q - 1)\,C_{n-1} = (p - \mu q - 1)\,C_{n-1}.$$

Posons successivement dans cette formule

$$\mu = 0, 1, 2, 3.....$$

nous trouverons :

$$(n + \alpha - 1)\,C_{\alpha} = (p - 1)\,C_{n-1},$$
$$(n + \alpha - q - 1)\,C_{\alpha-q} = (p - q - 1)\,C_{n-1}.$$
$$(n + \alpha - 2q - 1)\,C_{\alpha-2q} = (p - 2q - 1)\,C_{n-1}, \text{ etc.}$$

Alors

$$K = (p-1)C_{n-1} - nC_1.(p-q-1)C_{n-1} + nC_2.(p-2q-1)C_{n-1} - \text{etc.}$$

$$= \frac{(p-1)(p-2)...(p-n+1)}{1.2.....(n-1)} - n\frac{(p-q-1)(p-q-2)...(p-q-n+1)}{1.2....(n-1)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(p-2q-1)(p-2q-2)...(p-2q-n+1)}{1.2....(n-1)} - \text{etc.},$$

$$= \frac{(p-1)^{n-1/-1}}{n-1!} - n\frac{(p-q-1)^{n-1/-1}}{n-1!} + \frac{n^{2/-1}}{2!}\frac{(p-2q-1)^{n-1/-1}}{n-1!} - \text{etc.}$$

**Problème de Moivre.**

26. *Une urne contient* q *boules numérotées* 1. 2.... q; *on en tire une, on inscrit son numéro, puis on la remet; on fait de cette sorte* n *tirages, on additionne les numéros inscrits, et l'on demande quelle est la probabilité* Π, *que la somme de ces numéros est égale à* p.

Solution. Premier cas. *Les probabilités simples sont inégales.*

Les probabilités de la sortie des boules

$$1, 2, ..... q$$

sont respectivement

$$\varpi_1, \varpi_2 ..... \varpi_q.$$

Soient $a_1$ le nombre de sorties de la boule 1;

$a_2$ » » » 2;

$\vdots$ . . . . . .

$a_q$ » » » $q$.

On aura

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = n \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + qa_q = p \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Soient en outre

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \ldots &= n \\ \alpha_2 + \beta_2 + \ldots &= n \\ \alpha_3 + \beta_3 + \ldots &= n \\ &\text{etc.,} \end{aligned}\right\} (3) \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\beta_1 + \ldots &= p \\ \alpha_2 + 2\beta_2 + \ldots &= p \\ \alpha_3 + 2\beta_3 + \ldots &= p \\ &\text{etc.,} \end{aligned}\right\} (4),$$

tous les systèmes possibles qui satisfont à (1) et (2); on a :

$$(\varpi_1 + \varpi_2 + \ldots + \varpi_q)^n = \sum \frac{n!}{Q_1!\, Q_2! \ldots Q_q!}\, \varpi_1^{Q_1}\, \varpi_2^{Q_2} \ldots \varpi_q^{Q_q} \quad . \quad . \quad (5)$$

La probabilité $\Pi$ sera la somme des termes de (5) dans lesquels $Q_1, Q_2$ ..... satisfont à (1) et (2). Ainsi

$$\Pi = N_1 \varpi_1^{\alpha_1} \varpi_2^{\beta_1} \ldots + N_2 \varpi_1^{\alpha_2} \varpi_2^{\beta_2} + \ldots + N_i \varpi_1^{\alpha_i} \varpi_2^{\beta_i} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Second cas. *Les probabilités simples sont égales :*

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \text{etc.} = \frac{1}{q}$$

d'où :

$$\Pi = N_1 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_1+\beta_1+\ldots} + N_2 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_2+\beta_2+\ldots} + \ldots + N_i \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_i+\beta_i+\ldots}$$

$$= (N_1 + N_2 + \ldots N_i) \frac{1}{q^n} = \frac{K}{q^n}.$$

L'équation (5) montre que $N_1$, $N_2$ .... $N_i$ ne dépendent pas de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$; soient donc :

$$\varpi_1 = \varpi$$

$$\varpi_2 = \varpi^2, \text{ etc.}$$

Alors

$$\Pi = N_1\varpi^{\alpha_1+2\beta_1+\cdots} + N_2\varpi^{\alpha_2+2\beta_2+\cdots} + N_3\varpi^{\alpha_3+2\beta_3+\cdots} + \cdots + N_i\varpi^{\alpha_i+2\beta_i+\cdots}$$
$$= (N_1 + N_2 + \cdots N^i)\varpi^p = K\varpi^p$$

Le premier membre de (5) devient

$$(\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q)^n = \Sigma H\varpi^h;$$

donc $K = H$ pour $h = p$; c'est-à-dire que K est le coefficient de $\varpi^p$ dans le développement de $(\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q)^n$; par suite :

$$K = (p-1)C_{n-1} - nC_1(p-q-1)C_{n-1} + nC_1(p-2q-1)C_{n-1} - \text{etc.}$$
$$= (p-1)^{n-1/-1} - n(p-q-1)^{n-1/-1} + \frac{n^{2/-1}}{2!}(p-2q-1)^{n-1/-1} - \text{etc.}$$

et nous obtiendrons la probabilité cherchée $\Pi$ en substituant cette valeur de K dans l'expression

$$\Pi = \frac{1}{q^n} K.$$

Corollaire. Cette même formule résout également le problème suivant :

*Quelle est la probabilité d'amener le coup* p *en jetant sur un tapis* n *dés à* q *faces numérotées* 1, 2, ... q?

27. *Cas de la formule de Moivre où* $q = \infty$.

Nous avons trouvé au n° précédent :

$$\Pi = \frac{1}{q^n}\left\{\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} - n.\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-q-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(p-2q-1)(p-2q-2)\ldots(p-2q-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} - \text{etc.}\right\}.$$

En multipliant et divisant par $q^{n-1}$, il vient :

$$\Pi = \frac{1}{q}\left\{\frac{\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)} - n.\frac{\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-1-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-1-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-2-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(\frac{p}{q}-2-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1.2\ldots(n-1)} - \ldots\right\}.$$

Posons $q = \infty$, $p = \infty$, $\frac{p}{q} = s$, $\frac{1}{q} = ds$, nous aurons

$$\Pi = ds \left\{ \frac{(s-ds)(s-2ds)....(s-(n-1)ds)}{1.2....(n-1)} - n \frac{(s-1-ds)(s-1-2ds)...\left\{s-1-(n-1)ds\right\}}{1.2.....(n-1)} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(s-2-ds)(s-2-2ds)...\left\{s-2-(n-1)ds\right\}}{1.2....(n-1)} \right\}$$

d'où, en supprimant les termes en $ds$ à côté des termes finis :

$$\Pi = ds \left\{ \frac{s^{n-1}}{1.2..n-1} - n \frac{(s-1)^{n-1}}{1.2...(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(s-2)^{n-1}}{1.2...(n-1)} - \text{etc.} \right\}.$$

En intégrant entre les limites $\frac{a}{q}$ et $\frac{b}{q}$ de $s$, nous aurons la probabilité P que $p$ est compris entre $a$ et $b$ :

$$P = \frac{1}{1.2...n} \left\{ \left[ \left(\frac{b}{q}\right)^n - n\left(\frac{b}{q}-1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{b}{q}-2\right)^n .... \right] \right.$$
$$\left. - \left[ \left(\frac{a}{q}\right)^n - n\left(\frac{a}{q}-1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{a}{q}-2\right)^n - .. \right] \right\}.$$

Exemple. En supposant que pour chaque orbite toutes les inclinaisons depuis 0 jusqu'à 100 grades soient également possibles, déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons des 10 orbites planétaires, sans y comprendre l'écliptique, sera comprise entre les limites 0 et $91^g4187$, ce dernier nombre étant, en 1801, la somme des inclinaisons des orbites planétaires à celle de la terre.

L'angle droit 100 grades étant divisé en un nombre infiniment grand $q$ de parties égales, on aura $\frac{p}{q} = \frac{91,4187}{100}$; $n = 10$, $a = o$, $b = 91^g4187$; d'où

$$P = \frac{1}{1.2...10}\left(\frac{90.4187}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3951200}(0,914187)^{10} = 0.00000011235.$$

28. Problème II. *Un nombre* s *de jeunes gens est inscrit pour le tirage au sort de la milice*; a *seront réformés*, c *forment le contingent : quelqu'un tire le numéro* $\mu > c$ *et* $< c + a$. *Quelle est la probabilité qu'il partira?*

Solution. Si, parmi les $\mu$ premiers numéros, $\mu - c$ au moins sont tirés par des jeunes gens qui seront réformés, celui qui tire le numéro $\mu$ partira.

Ce problème revient donc à extraire en $\mu$ tirages au moins $\mu - c$ boules blanches, parmi $a$ blanches et $s - a$ noires, la boule extraite n'étant pas remise.

Posons $s - a = b$, $\mu - c = k$.

La probabilité de cette extraction sera (n° 22)

$$P = \frac{1}{s^{\mu-1}}\left\{a^{\mu-1} + \mu a^{\mu-1-1}b + \ldots\ldots + \frac{\mu!}{k!\,\mu-k!}\,a^{k-1}.\,b^{\mu-k-1}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{s^{\mu-1}}\left\{b^{\mu-1} + \mu a b^{\mu-1-1} + \ldots\ldots + \frac{\mu!}{(k-1)!\,(\mu-k+1)!}\,a^{k-1-1}b^{\mu-k+1-1}.\right\}$$

Soit

$$s = 10,\ a = 5,\ c = 5,\ \mu = 7;\ P = \frac{49}{60}.$$

29. Problème III. *Une assemblée délibérante se compose de* s *membres;* a *forment la majorité,* b *la minorité. On fait* $\mu$ *tirages pour composer une commission de* $\mu$ *membres. Quelle est la probabilité que dans ce nombre de tirages il sort au moins* $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ *noms appartenant à la majorité.*

Solution. Ce problème revient à chercher la probabilité d'extraire, en $\mu$ tirages, au moins $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ boules blanches d'une urne qui renferme $s$ boules, dont $a$ blanches et $b$ noires, sans remettre dans l'urne la boule extraite.

Il suffira donc, pour la résoudre, d'appliquer la formule précédente (n° 28), en y faisant $k = \frac{\mu}{2} + 1$.

**Problème de Pascal (*).**

30. *Déterminer la probabilité de deux joueurs* A *et* B, *de gagner le premier* a *points, l'autre* b *points pour finir la partie, dans un jeu où l'un des deux doit gagner un point à chaque*

(*) C'est par ce problème, proposé par le chevalier de Méré à Fermat et à Pascal, et résolu d'abord par ce dernier, qu'a commencé le calcul des probabilités.

*coup*, p *étant la probabilité de* A, q *celle de* B *pour gagner le point.*

Solution. Soient P et Q les probabilités cherchées; P+Q=1.

La partie sera terminée tout au plus en $a + b - 1$ coups; donc le problème revient à chercher la probabilité P qu'en $\mu = a + b - 1$ épreuves, A, ayant la probabilité $p$ de gagner à chaque coup, gagne au moins $a$ fois; on aura donc (n° 20) :

$$P = p^b + \mu p^{b-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} p^{b-2} q^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(a+1)}{1\cdot 2\cdots b-1} p^a q^{b-1}.$$

31. Problème V. *Une urne contient* m *boules; on en tire un certain nombre; chercher la probabilité que ce nombre sera pair ou impair.*

Les nombres de combinaisons paires sont

$$\frac{m^{2l-1}}{2!}, \quad \frac{m^{4l-1}}{4!}, \quad \text{etc....}$$

Les nombres de combinaisons impaires sont

$$m, \quad \frac{m^{3l-1}}{3!}, \quad \text{etc...}$$

Le nombre total des combinaisons est :

$$1 + m + \frac{m^{2l-1}}{2!} + \frac{m^{3l-1}}{3!} + \cdots - 1 = (1+1)^m - 1 = 2^m - 1.$$

Soient P et Q les probabilités cherchées; on a :

$$P + Q = 1, \quad P = \frac{1}{2^m - 1}\left\{\frac{m^{2l-1}}{2!} + \frac{m^{4l-1}}{4!} + \cdots\right\},$$

et

$$Q = \frac{1}{2^m - 1}\left(m + \frac{m^{3l-1}}{3!} + \cdots\right).$$

Or

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m^{2l-1}}{2!} + \frac{m^{3l-1}}{3!} + \text{etc.}$$

$$(1-1)^m = 1 - m + \frac{m^{2l-1}}{2!} - \frac{m^{3l-1}}{3!} + \text{etc.}$$

Ajoutons et retranchons ces deux identités :

$$2^m = 2\left\{1 + \frac{m^{2l-1}}{2!} + \frac{m^{4l-1}}{4!} + \ldots\right\}$$

$$= 2\left(m + \frac{m^{3l-1}}{3!} + \ldots\right)$$

donc

1° $$P = \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{2^{m-1}}{2^m-1}.$$

Or

$$2^{m-1} > 2^{m-1} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(2^m-1);$$

nous aurons donc

$$\frac{2^{m-1}}{2^m-1} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} < \frac{1}{2};$$

par suite $Q > P$.

2° $$Q = \frac{2^{m-1}}{2^m-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^m-1)}, \quad P = \frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^m-1)},$$

plus $m$ est grand, plus $\frac{1}{2(2^m-1)}$ est petit; donc si $m$ est très-grand, P et Q diffèrent peu de $\frac{1}{2}$.

Au contraire plus $m$ est petit, plus $\frac{1}{2(2^m-1)}$ approche de $\frac{1}{2}$; alors Q approche de 1, et P de 0.

Enfin si $m = 1$, $Q = 1$, $P = 0$.

52. Problème VI. — *Une urne contient* m *boules blanches et* m *noires : quelle est la probabilité* P *qu'en tirant un nombre pair de boules, il y aura autant de noires que de blanches?*

Solution. Le nombre des cas où l'on tire 1, 2, 3 .... boules de chaque couleur est

$$m, \frac{m^{3l-1}}{2!}, \quad \frac{m^{3l-1}}{3!}, \text{ etc.}$$

Donc le nombre des cas où l'on tirera 1 blanche et 1 noire,

» » » 2 » 2 »

» » » 3 » 3 »

. . . . . etc.

est respectivement

$$(m)^2, \quad \left(\frac{m^{2/-1}}{2!}\right)^2, \quad \left(\frac{m^{3|-1}}{3!}\right)\cdots$$

donc le nombre total de cas où l'on tirera un nombre égal de blanches et de noires est

$$(m)^2 + \left(\frac{m^{2/-1}}{2!}\right)^2 + \left(\frac{m^{3|-1}}{3!}\right)^2 + \cdots = \frac{(2m)^{m|-1}}{m!} - 1.$$

Comme on en tire chaque fois un nombre pair, $2^{2m-1} - 1$ est le nombre de tous les cas possibles; donc

$$P = \frac{\dfrac{(2m)^{m|-1}}{m!} - 1}{2^{2m-1} - 1}.$$

Si $m$ est très-grand

$$P = \frac{\dfrac{(2m)^{m|-1}}{m!}}{2^{2m-1}} = \frac{2}{\sqrt{m\,\pi}} \text{ à peu près.}$$

En effet

$$\frac{(2m)^{m|-1}}{m!} = \frac{2m\,(2m-1)\ldots(m+1).\,m\,(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots(m-1)\,m.\,1.2\ldots\ldots(m-1)\,m}.$$

Or, on sait que, si $m$ est très-grand, on a à peu près (*) :

$$1.2\ldots.m = m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m};$$

d'où ;

$$(1.2\ldots.m)^2 = m^{2m}e^{-2m}.2\pi m$$

$$1.2\ldots.2m = (2m)^{2m}.e^{-2m}\sqrt{4\pi m}$$

$$\frac{(2m)^{m|-1}}{m!} = \frac{(2m)^{2m}.e^{-2m}.\sqrt{4\pi m}}{m^{2m}.e^{-2m}.\sqrt{2\pi m}.\sqrt{2\pi m}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Donc

$$P = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}.2^{2m-1}} = \frac{2.2^{2m}}{\sqrt{\pi m}.2^{2m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi m}}.$$

(*) Voir la note I, à la fin de l'ouvrage.

33. Problème VII. *Une loterie est composée de* n *numéros; il en sort* r *à chaque tirage : trouver la probabilité* π *que tous seront sortis en* i *tirages.*

Solution. Désignons par

$Z_{n,q}$ le nombre des cas où, après $i$ tirages tous les numéros $1, 2 \ldots q$ parmi $n$ numéros seront sortis,

$Z_{n,q-1}$ le nombre des cas où, après $i$ tirages les numéros $1, 2 \ldots q-1$ parmi $n$ numéros seront sortis,

$Z_{n-1,q-1}$ le nombre des cas où, après $i$ tirages les numéros $1, 2 \ldots q-1$ parmi $n-1$ numéros seront sortis.

$Z_{n,q-1}$ se compose de deux parties, savoir :

1° Des combinaisons où les numéros $1, 2 \ldots q-1$ se rencontrent avec $q$;

2° Des combinaisons où $q$ n'entre pas.

Or si l'on enlève le numéro $q$, les $n-1$ numéros restants pourront se combiner avec les numéros $1, 2 \ldots q-1$, et former les combinaisons de ces derniers où $q$ n'entre pas.

Donc :

$$Z_{n,q-1} = Z_{n,q} + Z_{n-1,q-1}$$

ou

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Le nombre des cas possibles dans un tirage est exprimé par

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} = \frac{n^{r|-1}}{r!}.$$

Donc celui de tous les cas dans $i$ tirages est

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\right\}^i \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Soit P la probabilité que dans $i$ tirages les numéros $1, 2 \ldots q$ parmi les $n$ soient sortis :

$$P = \frac{Z_{n,q}}{\left\{\frac{n^{r|-1}}{r!}\right\}^i} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

De la suite :

$$Z_{1,\,q-1},\ Z_{2,\,q-1},\ Z_{3,\,q-1} \ldots\ldots\ Z_{n,\,q-1},$$

on tire :

$$Z_{2,\,q-1} - Z_{1,\,q-1} = \Delta Z_{1,\,q-1}$$
$$Z_{3,\,q-1} - Z_{2,\,q-1} = \Delta Z_{2,\,q-1}$$
$$Z_{4,\,q-1} - Z_{3,\,q-1} = \Delta Z_{3,\,q-1}$$
$$\text{etc.}$$

$$Z_{n,\,q-1} - Z_{n-1,\,q-1} = \Delta Z_{n-1,\,q-1} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Dans cette formule (4) faisons :

$$1^{\circ}\ q-1 = 1,\ 2,\ 3 \text{ etc., et } n = n;$$

il vient :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n,\,2} &= \Delta Z_{n-1,\,1} \\ Z_{n,\,3} &= \Delta Z_{n-1,\,2} \\ Z_{n,\,4} &= \Delta Z_{n-1,\,3} \\ Z_{n,\,5} &= \Delta Z_{n-1,\,4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$
$$\text{etc.}$$

$$2^{\circ}\ q-1 = 1,\ 2,\ 3 \text{ etc., et } n = n-1;$$

on a :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n-1,\,2} &= \Delta Z_{n-2,\,1} \\ Z_{n-1,\,3} &= \Delta Z_{n-2,\,2} \\ Z_{n-1,\,4} &= \Delta Z_{n-2,\,3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$
$$\text{etc.}$$

d'où

$$\Delta Z_{n-1,\,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1}$$
$$\Delta Z_{n-1,\,3} = \Delta^2 Z_{n-2,\,2}$$
$$\Delta Z_{n-1,\,4} = \Delta^2 Z_{n-2,\,3}$$
$$\text{etc.}$$

$$3^{\circ}\ q-1 = 1,\ 2,\ 3 \text{ etc., et } n = n-2;$$

on a :

$$\left.\begin{aligned} Z_{n-2,\,2} &= \Delta Z_{n-3,\,1} \\ Z_{n-3,\,2} &= \Delta Z_{n-3,\,2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$
$$\text{etc.}$$

d'où

$$\Delta^2 Z_{n-2,\,2} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1}$$
$$\Delta^2 Z_{n-2,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,2}$$
etc.

4° $q - 1 = 1, 2, 3$ etc.; et $n = n - 3$ :

$$Z_{n-3,\,2} = \Delta\, Z_{n-4,\,1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

etc.

d'où

$$\Delta^3 Z_{n-3,\,2} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1}$$

A cause des relations 6, 7, 8, les équations (5) deviennent

$$Z_{n,\,2} = \Delta Z_{n-1,\,1}$$
$$Z_{n,\,3} = \Delta Z_{n-1,\,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1}$$
$$Z_{n,\,4} = \Delta Z_{n-1,\,3} = \Delta^2 Z_{n-2,\,2} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1}$$
$$Z_{n,\,5} = \Delta Z_{n-1,\,4} = \Delta^2 Z_{n-2,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,2} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1}$$
etc. etc.

donc

$$Z_{n,\,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,\,1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Le nombre de tous les cas possibles où dans $i$ tirages les numéros 1, 2, ... $q$, sortent parmi les $n$, est

$$\left[\frac{n^{r/-1}}{r!}\right]^i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Le nombre de tous les cas possibles où dans $i$ tirages le numéro 1 ne sortira pas est égal à celui de tous les cas possibles où les numéros 1, 2, .... $q$, parmi $n - 1$ numéros, sortent, c'est-à-dire à

$$\left[\frac{(n-1)^{r/-1}}{r!}\right]^i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Le nombre $Z_{n,\,1}$ de tous les cas où le numéro 1 sera sorti en $i$ tirages est égal au nombre ($\alpha$) de tous les cas relatifs aux numéros 1, 2 ... $q$, moins le nombre ($\beta$) de tous les cas où le numéro 1 ne sort pas; donc

$$Z_{n,\,1} = \left\{\frac{n^{r/-1}}{r!}\right\}^i - \left\{\frac{(n-1)^{r/-1}}{r!}\right\}^i = \frac{\Delta\left[(n-1)^{r/-1}\right]^i}{(1.2\ldots r)^i} \quad \ldots \quad (10)$$

Changeons dans cette dernière formule $n$ en $n-q+1$, elle devient :

$$Z_{n-q+1,1} = \frac{\Delta\left[(n-q)^{r/-1}\right]^i}{(1.2\ldots r)^i}.$$

Donc par la formule (9),

$$Z_{n,q} = \Delta^{q-1}\,\frac{\Delta\left[(n-q)^{r/-1}\right]^i}{(1.2\ldots r)^i} = \frac{\Delta^q\left[(n-q)^{r/-1}\right]^i}{(1.2\ldots r)^i}. \quad . \quad (11).$$

Substituant dans (3), il vient

$$P = \frac{\Delta^q\left[(n-q)^{r/-1}\right]^i}{\left[n^{r/-1}\right]^i} \text{ ou } \frac{\Delta^q\left[s^{r/-1}\right]^i}{(n^{r/-1})^i}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

en posant $n-q=s$.

Maintenant considérons la suite

$$\left[s^{r/-1}\right]^i = \left[(n-q)^{r/-1}\right]^i = u$$
$$\left[(s+1)^{r/-1}\right]^i = \left[(n-q+1)^{r/-1}\right]^i = u_1$$
$$\left[(s+2)^{r/-1}\right]^i = \left[(n-q+2)^{r/-1}\right]^i = u_2$$
etc. etc.
$$\left[(s+q-1)^{r/-1}\right]^i = \left[(n-1)^{r/-1}\right]^i = u_{q-1}$$
$$\left[(s+q)^{r/-1}\right]^i = \left[n^{r/-1}\right]^i = u_q\,;$$

on a :

$$\Delta^q u = qu_q - qu_{q-1} + \frac{q^{2/-1}}{2!}u_{q-2} - \text{etc} \mp qu_1 \pm u.$$

Donc

$$\Delta^q\left[s^{r/-1}\right]^i = \left[n^{r/-1}\right] - q\left[(n-1)^{r/-1}\right]^i + \frac{q^{2/-1}}{2!}\left[(n-2)^{r/-1}\right]^i - \text{etc.}$$
$$\mp q\left[(n-q+1)^{r/-1}\right]^i \pm \left[(n-q)^{r/-1}\right]^i$$

En substituant dans (a), on aura :

$$P = 1 - \frac{q}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i + \frac{q^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2/-1}}{n^{2/-1}}\right]^i - \frac{q^{3/-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3/-1}}{n^{3/-1}}\right]^i + \text{etc.}$$

Posons $q = n$, nous aurons enfin :

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2/-1}}{n^{2/-1}}\right]^i$$
$$- \frac{n^{3/-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3/-1}}{n^{3/-1}}\right]^i + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Exemple $n = 90$, $r = 5$, $i = 100$, on a $\Pi = 0{,}7410 > \frac{7}{10}$ et plus grand que $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{10}$.

34. Problème VIII. *Une loterie est composée de* n *numéros, dont un sort à chaque tirage. Trouver la probabilité* $\Pi$ *qu'en* i *tirages tous seront sortis.*

Solution. La probabilité P que les numéros 1, 2, 3... $q$ parmi les $n$ numéros seront sortis en $i$ tirages, en en tirant $r$ à la fois, est (n° 33)

$$P = \frac{\Delta^q\left[(n-q)(n-q\,1)\ldots.(n-q-r+1)\right]^i}{\left[n(n-1\ldots\ldots(n-r+1)\right]}$$

Pour $r = 1$, on a $n - q - r + 1 = n - q$, et $n - r + 1 = n$; donc

$$P = \frac{\Delta^q (n-q)^i}{n^i}.$$

Maintenant, soient

$$(n-q)^i = u$$
$$(n-q+1)^i = u_1$$
$$(n-q+2)^i = u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^i = u_{q-1}$$
$$n^i = u_q,$$

la formule

$$\Delta^q u = u_q - q u_{q-1} + \frac{q^{q/-1}}{2!}\, u_{q-2} - \text{etc} \mp q u_1 \pm u$$

donne

$$\Delta^q (n-q)^i = n^i - q(n-1)^i + \frac{q^{2/-1}}{2!}(n-2)^i - \frac{q^{3/-1}}{3!}(n-3)^i + \text{etc.},$$

de sorte que

$$P = 1 - q\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{q^{2/-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \text{etc.}$$

Posons $q = n$, nous aurons

$$\Pi = 1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Remarque. Posons :

$$\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n = 1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i} - \text{etc.} \quad (2)$$

Dans le second membre de la formule (1), le terme qui en a $m$ avant lui, est $\left(\frac{n-m}{n}\right)^i$, et dans la formule (2), le terme de même est $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$. Passant aux logarithmes, on a

$$l.\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = i\,l.\left(1 - \frac{m}{n}\right) = -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\frac{m^2 i}{n^2} - \ldots$$

$$l.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi} = mi\,l.\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\frac{mi}{n^2} - \ldots$$

De sorte que si l'on peut négliger les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$, on peut écrire

$$\Pi = \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

35. Problème IX. *Le nombre* n *étant très-grand, quel est le nombre de tirages* i, *après lequel la probabilité que les* n *numéros seront sortis, est égale à* $\frac{1}{k}$ ?

Solution. La formule (*a*) donne

$$\frac{1}{k} = \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$$

d'où

$$i = \frac{l.\left[1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right]}{l.(n-1) - l.(n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Pour effectuer le calcul de la formule (*b*), soit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z, \quad \frac{1}{k} = (1-z)^n, \quad \sqrt[n]{k} = \frac{1}{1-z}.$$

On aura

$$\frac{1}{n}\,l.k = l.\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\,l.(1-z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots.$$

Si nous faisons

$$y = \frac{1}{n}\,l.k,$$

d'où

$$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots.$$

et que nous développions $z$ suivant les puissances de $y$ :

$$z = Ay + By^2 + \ldots.$$

nous aurons, pour déterminer les coefficients, l'équation identique :

$$y = (Ay + By^2 + \ldots) + \frac{1}{2}(Ay + By^2 + \ldots)^2 + \ldots.$$

ou

$$y = Ay + (B + \frac{1}{2}A^2)\,y^2 + \ldots..$$

d'où

$$A = 1,$$

$$B + \frac{1}{2}A^2 = o, \quad B = -\frac{1}{2}$$

et par suite :

$$z = y - \frac{1}{2}y^2 + \ldots. = \frac{1}{n}l.k - \frac{1}{2}\frac{(l.k)^2}{n^2} + \ldots = \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right).$$

Or,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z = 1 - \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right),$$

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{l.k}{n}\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right)$$

$$l.\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = l.(l.k) - l.n + l.\left(1 - \frac{l.k}{2n}\right)$$

$$= l.(l.k) - l.n - \frac{l.k}{2n} - \frac{(l.k)^2}{4n^2} - \ldots$$

$$= l.(l.k) - l.n - \frac{l.k}{2n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Or on sait que

$$l.\left(\frac{n-1}{n}\right) = l.(n-1) - l.n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \text{etc} \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

L'équation $(b)$ devient, par la substitution des valeurs $(\alpha)$ et $(\beta)$ :

$$i = \frac{l.n - l.(l.k) + \frac{1}{2n} l.k}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{n\left[l.n - l.(l.k)\right] + \frac{1}{2} l.k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{\left[n\, l.n - l.(l.k)\right]\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) l.k}{1 - \frac{1}{4n^2}}$$

56. Problème X. *Une loterie est composée d'un très-grand nombre* n *de numéros; il en sort cinq à chaque tirage. Quelle est la probabilité que tous seront sortis après* i *tirages?*

Solution. Dans la formule

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-r}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right]^i - \text{etc.}$$

qui exprime la probabilité que $n$ numéros sont sortis en $i$ tirages, à raison de $r$ numéros à chaque tirage, faisons $r = 5$, il vient :

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left[\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right]^i - \text{etc.}$$

Mais on a :

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2/-1}}{2!}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \text{etc.}$$

On peut donc poser approximativement

$$\Pi = \left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$$

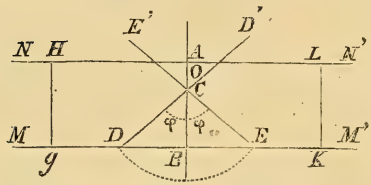
et si

$$\Pi = \frac{1}{2}, \qquad i = \frac{\log\left\{\frac{\sqrt[n]{2}}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)}\right\}}{\log\left(\frac{n}{n-5}\right)}$$

pour

$$n = 90, \qquad i = 85{,}204.$$

37. Problème XI. *Un plan est divisé en parties égales par des parallèles* NN′, MM′..... *distantes entre elles d'une longueur constante* a. *On projette sur ce plan un cylindre très-mince d'une longueur* 2r *égale au moins à* a. *Chercher la probabilité* P, *que ce cylindre rencontre deux parallèles consécutives quelconques.*




Solution. Soient,

$$\begin{aligned} &AB = a, \quad BC = y, \quad AC = a - y \\ &CD = CD' = r \\ &CE = CE' = r \\ &BO = r \\ &DCB = BCE = \varphi, \qquad DCE = 2\varphi. \end{aligned}$$

Quand le centre du cylindre est en C, si on le fait tourner autour de ce point, la moitié DC rencontre MM′ dans l'intérieur de l'angle DCE, et il en est de même de l'autre moitié CD′. Donc $4\varphi$ est le nombre des cas où le cylindre rencontre la droite MM′, quand le centre est au point C. Donc $\int_0^r 4\varphi dy$ est le nombre des cas où le cylindre rencontre MM′, en faisant glisser le centre du cylindre sur AB, de B en O; or $y = r\cos\varphi$, d'où :

$$\begin{aligned} \int 4\varphi\, dy &= 4\varphi y - 4\int y d\varphi = 4\varphi y - 4\int r\cos\varphi d\varphi \\ &= 4\varphi y - 4r\sin\varphi + \text{const} \\ \int_0^r 4\varphi dy &= \left[4\varphi y - 4r\sin\varphi\right]_r - \left[4\varphi y - 4r\sin\varphi\right]_0. \end{aligned}$$

Les limites de $y$ $(r, 0)$, correspondent aux limites de $\varphi \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, attendu que $y = r \cos \varphi$; donc

$$\int_0^r 4\frac{r}{r} dr = [4.0.r - 4r \sin 0] - \left[4.\frac{\pi}{2}.0 - 4r \sin \frac{\pi}{2}\right] = 4r.$$

Faisons

$$AC = a - y = y' :$$

le nombre des cas où le cylindre rencontre MN′ est

$$\int_0^r 4\frac{r}{r} dy' = 4r$$

et le nombre des cas où le cylindre rencontre MM′, ou NN′ sera

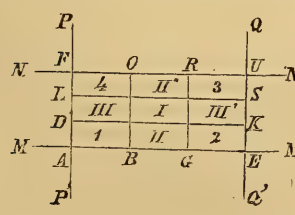
$$4r + 4r = 8r.$$

Le nombre de tous les arcs décrits par le cylindre pendant que son centre parcourt $AB = a$, et qu'il fait un tour entier dans chacune de ses positions, est $2\pi . a$, donc la probabilité cherchée

$$P = \frac{8r}{2\pi a} = \frac{4r}{a\pi}.$$

Remarque. Soit $GK = HL = h$, si le centre du cylindre se trouve dans l'intérieur du rectangle GKLH, le nombre des cas où il rencontre MM′ ou NN′ sera $h.8r$..... $(a)$.

38. Problème XII. *Un plan est divisé en parties égales par un premier système de parallèles* MM′, NN′... *placées à la distance constante* a; *puis par un second système de parallèles* PP′, QQ′.... *perpendiculaires aux premières, et à égale distance* b *les unes des autres. Un cylindre d'une longueur* 2r *au plus égale à* b *ou à* a, *étant projeté sur ce plan, trouver la probabilité* P *que ce cylindre rencontre le contour de l'un quelconque des rectangles* AEUF, *dans lesquels le plan est divisé par les deux systèmes de parallèles.*



Solution. Soient

$$AF = a \quad > \text{ou} = 2r$$
$$AE = b \quad > \text{ou} = 2r$$
$$AB = AD = r$$
$$EG = EK = r$$
$$FL = FO = r$$
$$UR = US = r$$
$$BG = OR = b - 2r$$
$$DL = KS = a - 2r.$$

Le centre du cylindre, en tombant dans l'intérieur du rectangle AEUF, devra se trouver dans l'un des rectangles I, II, II′, III, III′ ou dans l'un des quatre carrés 1, 2, 3, 4.

1° S'il tombe dans I, il ne rencontre aucune des droites, ni du système MM′, NN′.... ni du système PP′, QQ′....

2° S'il tombe dans II ou II′, alors le nombre des cas où il rencontre l'un et l'autre systèmes de parallèles, sera par la formule (*a*), n° 37 :

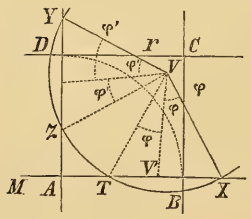
$$8r\,(b - 2r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

3° S'il tombe dans III ou III′, le nombre des cas où il rencontre les deux systèmes sera, par la même formule

$$8r\,(a - 2r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

4° Il nous reste à examiner ce qui se passe dans les quatre carrés 1, 2, 3, 4.

Du point A, avec un rayon égal à $r$, décrivons un quart de cercle. Si le centre du cylindre est dans ce quadrant, il rencontre en tournant dans toutes ses positions les MN et les PQ à la fois; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu est




$$2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi^2 r^2}{2}.$$

Si le centre du cylindre est en V($xy$), en dehors du quadrant, il ne pourra rencontrer, en tournant, qu'une des droites MM′,

PP'. Pour chercher le nombre des cas où cela arrive, décrivons de V comme centre avec le rayon $r$, l'arc de cercle YZTX. Soient $TVX = 2\varphi$, $YVZ = 2\varphi'$ ; le cylindre ne rencontre la droite MM' que quand il est dans $2\varphi$, et la droite PP' que quand il est dans $2\varphi'$.

Donc si le centre du cylindre est en V, le nombre des cas où l'une de ses moitiés rencontre MM', PP' sera $2(\varphi + \varphi')$; donc le nombre des cas où l'une et l'autre moitié rencontrent ces droites est $4(\varphi + \varphi')$.

Désignant par $dxdy$ l'élément de surface de la partie du rectangle située hors du quadrant, le nombre des cas relatifs à toutes les positions de V est

$$4\iint(\varphi + \varphi')\,dxdy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Pour déterminer les limites de cette intégrale, nous avons

$$AW = x = r\cos\varphi', \quad dx = -r\sin\varphi' d\varphi'$$
$$VW = y = r\cos\varphi, \quad dy = -r\sin\varphi d\varphi.$$

L'intégrale $(\alpha)$ devient

$$4r^2\iint(\varphi + \varphi')\sin\varphi\sin\varphi' d\varphi d\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Pour tout point V situé hors du quadrant, on a

$$x > \text{ou} = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Pour B et D, on a :

$$y = 0, \quad x = r$$
$$y = r, \quad x = 0.$$

Les limites de $y$ $(0, r)$ correspondent aux limites de $\varphi$ $\left(0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$.

Pour déterminer celles de $\varphi'$, on part de

$$x \geqq \sqrt{r^2 - y^2},$$

donc

$$r\cos\varphi' \geqq \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi} \geqq r\sin\varphi \geqq r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

et

$$\varphi' \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Ainsi les limites de $\varphi'$ sont 0 et $\frac{\pi}{2} - \varphi$.
Donc le nombre des cas cherchés est

$$4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi' d\varphi'.$$

Intégrant par rapport à $\varphi'$, on a d'abord :

$$\begin{aligned}\int (\varphi + \varphi') \sin\varphi' d\varphi' &= \varphi \int \sin\varphi' d\varphi' + \int \varphi' \sin\varphi' d\varphi' \\ &= -\varphi\cos\varphi' - \varphi'\cos\varphi' + \int \cos\varphi' d\varphi' \\ &= -\varphi\cos\varphi' - \varphi'\cos\varphi' + \sin\varphi' + c \\ &= -(\varphi + \varphi')\cos\varphi' + \sin\varphi' + c\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi' d\varphi' = -\frac{\pi}{2}\sin\varphi + \cos\varphi + \varphi.$$

Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi' d\varphi' = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\sin\varphi d\varphi.$$

Or, en intégrant par parties :

1° $$\int \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\pi.$$

2° $$\int \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

3° $$\int \varphi . \sin\varphi d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \int \cos\varphi d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin \varphi d\varphi = 1.$$

Donc

$$4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi+\varphi') \sin \varphi' d\varphi' = 4r^2 \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{r^2}{2} (12 - \pi^2).$$

En ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on obtient le nombre des cas relatifs au carré 1, qui sera donc $6r^2$; et quadruplant, on a le nombre des cas relatifs aux quatre carrés 1, 2, 3, 4, qui sera $24r^2$ (3).

Le nombre total des cas (1), (2), (3) :

$$8r(b-2r) + 8r(a-2r) + 24r^2 = 8(b+a)r - 8r^2 = 8r(a+b-r)$$

exprime tous les cas où le cylindre rencontre le système de parallèles MM', NN', PP', QQ'.

Mais le nombre total des combinaisons possibles est égal au produit de $2\pi$ par l'aire AEUF ou $2\pi ab$, donc la probabilité que le cylindre rencontre les divisions du plan est

$$P = \frac{8r(a+b-r)}{2\pi ab} = \frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}.$$

39. Problème XIII. *Si dans un tas de* x *pièces, on en prend un nombre au hasard, déterminer la probabilité que ce nombre est pair ou impair.*

Solution. Soient :

$C_x$ la somme des cas dans lesquels le nombre est pair.

$C'_x$ la somme des cas dans lesquels le nombre est impair.

$P_x$ la probabilité que le nombre est pair.

$P'_x$ la probabilité que le nombre est impair.

On a :

$$P_x = \frac{C_x}{C_x + C'_x}, \qquad P'_x = \frac{C'_x}{C_x + C'_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*Détermination de* $C_x$ *et* $C'_x$. $x$ étant le nombre de pièces, si l'on prend une pièce de plus, $C_{x+1}$ sera le nombre des cas dans lesquels $x+1$ est pair, $C'_{x+1}$ le nombre des cas où $x+1$ est impair.

Dans le premier cas :

$C_{x+1}$ se compose 1° du nombre précédent de cas pairs,

2° du nombre précédent de cas impairs,

car chacun de ces cas combiné avec la nouvelle pièce donne un cas pair.

Donc

$$C_{x+1} = C_x + C'_x; \quad \text{d'où} \quad \Delta C_x = C'_x \quad \text{et} \quad \Delta^2 C_x = \Delta C'_x. \quad . \quad . \quad (2)$$

Dans le second cas, $C'_{x+1}$ se compose :

1° du nombre précédent de cas impairs;

2° du nombre précédent de cas pairs;

3° de l'unité, puisque la nouvelle pièce peut être prise seule.

Donc

$$C'_{x+1} = C'_x + C_x + 1,$$

ou

$$\Delta C'_x = C_x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

donc, à cause de la formule (2)

$$\Delta^2 C_x = C_x + 1.$$

Or

$$\Delta^2 C_x = \Delta C_{x+1} - \Delta C_x = C_{x+2} - C_{x+1} - (C_{x+1} - C_x);$$

on aura par suite :

$$C_{x+2} - 2C_{x+1} + C_x = C_x + 1$$

$$C_{x+2} = 2C_{x+1} + 1$$

ou bien, en changeant $x + 1$ en $x$ :

$$C_{x+1} = 2C_x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Intégrons la formule (4) qui peut s'écrire :

$$C_{x+1} - C_x = C_x + 1 \quad \text{ou} \quad \Delta C_x = C_x + 1.$$

Soit

$$C_x + 1 = y$$

d'où

$$\Delta C_x = \Delta y;$$

et par suite :

$$\Delta y = y.$$

Posons

$$y = a^x$$

d'où

$$\Delta y = a^{x+1} - a^x = a^x (a - 1);$$

et substituons, nous aurons :

$$a^x (a - 1) = a^x; \quad \text{ou} \quad a^x (a - 2) = 0;$$

d'où

$$a = 2$$

et

$$y = A2^x,$$

A étant une constante à déterminer.

Donc :

$$C_x = A2^x - 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Or, pour

$$x = 1, \quad \text{on a} \quad C_x = 0,$$

donc

$$0 = 2A - 1; \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{2},$$

et

$$C_x = 2^{x-1} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mais on a

$$\begin{aligned} C'_x = \Delta C_x, \quad \text{donc} \quad C'_x &= [2^{\overline{x+1}-1} - 1] - [2^{x-1} - 1] \\ &= 2^x - 2^{x-1} \\ &= 2^{x-1} (2 - 1) \\ &= 2^{x-1}. \end{aligned}$$

La somme de tous les cas sera

$$C_x + C'_x = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1.$$

Donc enfin

$$P_x = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}, \quad P'_x = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1};$$

il en résulte

$$P'_x > P_x.$$

40. Problème XIV. *On projette une pièce au jeu de pile et croix; on demande la probabilité qu'en* x *coups, on amènera les faces de la pièce dans l'ordre pile, croix; pile, croix; pile, croix; etc.*

Solution. Soit $C_x$ le nombre des cas favorables ;

$t_x$ le nombre total des cas ;

$P_x$ la probabilité cherchée $= \frac{C_x}{t_x}$.

*Déterminons* $t_x$. Le nombre de tous les cas au coup $x$ s'obtient en combinant le nombre des cas au coup $x-1$, avec chaque face. On a donc :

$$t_x = 2t_{x-1}.$$

Pour intégrer faisons $x = 1, 2, 3 \ldots x$, et multiplions, nous aurons :

$$t_x = t_0 \cdot 2^x.$$

Pour $x = 1$, on a $t_x = 2$, donc

$$2 = 2t_0, \quad \text{d'où} \quad t_0 = 1 ;$$

et

$$t_x = 2^x.$$

*Déterminons* $C_x$. Le nombre des cas dans lesquels la combinaison pile croix, pile croix..... n'est point arrivée au coup $x-2$, est

$$t_{x-2} - C_{x-2} = 2^{x-2} - C_{x-2}.$$

Chacun de ces cas donne un cas où elle arrive précisément au $x^{me}$ coup ; donc le nombre des cas où elle arrive au $x^{me}$ coup est $2^{x-2} - C_{x-2}$.

Mais $C_x$ est le nombre des cas favorables au coup $(x-1)^{me}$, multiplié par 2 et augmenté du nombre des cas où elle arrive au $x^{me}$ coup ; ainsi :

$$C_x = 2C_{x-1} + 2^{x-2} - C_{x-2}$$

Donc

$$P_x = \frac{2C_{x-1}}{2^x} + \frac{2^{x-2}}{2^x} - \frac{C_{x-2}}{2^x}$$

$$= \frac{C_{x-1}}{2^{x-1}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{C_{x-2}}{2^{x-2}} = P_{x-1} - \frac{1}{4}P_{x-2} + \frac{1}{4}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour intégrer (1), posons :

$$P_{x-1} = P_x + \Delta P_x,$$

et de même

$$P_{x-2} = P_{x-1} + \Delta P_{x-1} = P_x + \Delta P_x + \Delta P_x + \Delta^2 P_x,$$

ou

$$P_{x-2} = P_x + 2\Delta P_x + \Delta^2 P_x.$$

Substituant dans l'expression (1) de $P_x$, on obtiendra, après réduction,

$$\Delta^2 P_x - 2\Delta P_x + P_x - 1 = 0.$$

Si l'on fait

$$P_x - 1 = y;$$

d'où

$$P_x = 1 + y,$$

et

$$\Delta P_x = \Delta y$$
$$\Delta^2 P_x = \Delta^2 y,$$

l'équation précédente deviendra :

$$\Delta^2 y - 2\Delta y + y = 0.$$

Posons

$$y = a^x;$$

d'où :

$$\Delta y = a^x \left(\frac{1}{a} - 1\right)$$

$$\Delta^2 y = a^x \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2;$$

et substituons, il viendra :

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a} - 1\right) + 1 = 0,$$

ce qui donne pour $a$ les deux valeurs :

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{2};$$

d'où

$$y = Ca_1^x + C_2 x a_2^x = C\left(\frac{1}{2}\right)^x + C'x\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1},$$

en faisant

$$C_2 = 2C'.$$

*Déterminons* C et C'.

Pour

$$x = 1, \quad P_x \text{ ou } 1 + y = 0; \quad \text{d'où :} \quad 0 = 1 + \frac{C}{2} + C'$$

$$x = 2, \qquad P_x = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4} = 1 + \frac{C}{4} + C',$$

d'où

$$C = -1, \quad C' = -\frac{1}{2};$$

et par suite :

$$y = P_x - 1 = -\frac{1 + x}{2^x};$$

d'où enfin :

$$P_x = 1 - \frac{1 + x}{2^x}.$$

41. Problème XV. *Quatre joueurs* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ *jouent de cette manière :*

1° $A_1$ *joue avec* $A_2$ : *s'il gagne, l'enjeu est à lui ;*

*S'il ne perd ni ne gagne, il continue de jouer avec* $A_2$ *jusqu'à ce que l'un des deux gagne ;*

*S'il perd, alors*

2° $A_2$ *joue avec* $A_3$, *et si* $A_2$ *gagne, l'enjeu est à lui ;*

*S'il ne perd ni ne gagne, il continue à jouer avec* $A_3$ *jusqu'à ce que l'un des deux gagne ;*

*S'il perd, alors*

3° $A_3$ *joue avec* $A_4$ : *et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un des joueurs ait vaincu celui qui le suit.*

*La probabilité pour l'un quelconque des joueurs de gagner contre l'autre est* $\frac{1}{3}$ ; *celle de ne gagner ni perdre est aussi* $\frac{1}{3}$ ; *déterminer la probabilité que l'un de ces joueurs gagne la partie au* $x^{me}$ *coup.*

Solution. Soient $\overset{4}{P}_x$ la probabilité que $A_4$ gagne la partie après $x$ coups,

$\overset{3}{P}_x$ la probabilité que $A_3$ gagne la partie après $x$ coups, etc.

On aura :

$$\overset{4}{P}_x = \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En effet, l'événement dont $\overset{4}{P}_x$ est la probabilité peut avoir lieu de deux manières :

1° Quand $A_4$ gagne la partie après $x-1$ coups, et qu'il la gagne encore au $x^{me}$ coup; cet événement composé a pour probabilité $\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}$.

2° Quand $A_3$ a gagné la partie après $x-1$ coups, et que $A_4$ gagne au $x^{me}$ coup, cet événement composé a pour probabilité $\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}$.

L'équation (1) peut être appliquée successivement à tous les joueurs, on a donc le système d'équations rentrantes

$$\overset{4}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}. \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

$$\overset{3}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

$$\overset{2}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

$$\overset{1}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}. \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Déterminons $\overset{4}{P}_x$; on a :

$$\overset{4}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1};$$

changeons $x$ en $x-1$, et multiplions par $-\frac{1}{3}$, il vient :

$$-\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} = -\frac{1}{3^2}\overset{3}{P}_{x-2}.$$

Ajoutons, et nous aurons, par suite de (2') :

$$\overset{4}{P}_x - \frac{2}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} = \frac{1}{3^2}\left[\overset{3}{P}_{x-1} - \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-2}\right] = \frac{1}{3^2}\overset{2}{P}_{x-2}.$$

Opérons encore de la même façon, nous aurons à cause de (3')

$$\overset{4}{P}_x - \frac{3}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{3}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} - \frac{1}{3^3}\overset{4}{P}_{x-3} = \frac{1}{3^3}\left[\overset{2}{P}_{x-2} - \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-3}\right] = \frac{1}{3^4}\overset{1}{P}_{x-3}.$$

Enfin, par suite de (4'), au moyen des mêmes transformations :

$$\overset{4}{P}_x - \frac{4}{5}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{6}{5^2}\overset{4}{P}_{x-2} - \frac{4}{5^3}\overset{4}{P}_{x-3} + \frac{1}{5^4}\overset{4}{P}_{x-4} = \frac{1}{5^4}\left[\overset{1}{P}_{x-3} - \frac{1}{5}\overset{1}{P}_{x-4}\right] = \frac{1}{5^5}\overset{4}{P}_{x-4}.$$

Cette équation étant linéaire, nous pourrons poser $\overset{4}{P}_x = a^x$; d'où, en changeant $x$ en $x-1$, $x-2$, etc. :

$$\overset{4}{P}_{x-1} = a^{x-1} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a};\ \overset{4}{P}_{x-2} = a^{x-2} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a^2},\ \text{etc.};$$

et par la substitution de ces valeurs, nous aurons :

$$a^x\left\{1 - \frac{4}{5a} + \frac{6}{5^2a^2} - \frac{4}{5^3a^3} + \frac{1}{5^4a^4}\right\} = a^x \cdot \frac{1}{5^5a^4},$$

ou, en supprimant le facteur $a^x$ :

$$\left(1 - \frac{1}{5a}\right)^4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5a}\right)^4;$$

d'où

$$(5a-1)^4 = \frac{1}{5},$$

et

$$\left(5\sqrt[4]{5a} - \sqrt[4]{5}\right)^4 - 1 = 0.$$

Soit

$$5\sqrt[4]{5}.a - \sqrt[4]{5} = \alpha;$$

nous aurons $\alpha^4 = 1$ et

$$5a - 1 = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{5}};$$

d'où

$$5a = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt[4]{5}}\right);$$

donc $\alpha^4 - 1 = 0$, donnant les valeurs

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = \sqrt{-1},\ \alpha^4 = -\sqrt{-1},$$

$a$ aura les quatre valeurs correspondantes : $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$; et par suite :

$$\overset{4}{P}_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + C_3 a_3^x + C_4 a_4^x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les imaginaires se remplaceront par

$$\alpha_3 = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_4 = \cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{2}.$$

On aura des équations toutes semblables pour

$$\overset{3}{P}_x,\ \overset{2}{P}_x,\ \overset{1}{P}_x.$$

2° Déterminons les constantes de l'équation (1).

Pour cela remarquons que

Après $x = 1, 2, 3, 4$ coups les probabilités de gagner pour $A_1$ sont :

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^3},\ \frac{1}{4^4}.$$

Après $x = 2, 3, 4, 5$ coups les probabilités de gagner pour $A_2$ sont :

$$\frac{1}{3^2},\ \frac{2}{3^3},\ \frac{3}{3^4},\ \frac{4}{3^5}.$$

Après $x = 3, 4, 5, 6$ coups de probabilités de gagner pour $A_3$ sont :

$$\frac{1}{3^3},\ \frac{3}{3^4},\ \frac{6}{3^5},\ \frac{10}{3^6}.$$

Après $x = 4, 5, 6, 7$ coups les probabilités de gagner pour $A_4$ sont :

$$\frac{1}{3^4},\ \frac{4}{3^5},\ \frac{10}{3^6},\ \frac{15}{3^7}.$$

Ces dernières quantités serviront à déterminer les constantes de l'équation (2) ; en les substituant dans cette équation, on aura les quatre équations linéaires :

$$\frac{1}{3^4} = C_1 a_1^4 + C_2 a_2^4 + C_3 a_3^4 + C_4 a_4^4.$$

$$\frac{4}{5^5} = C_1\alpha_1^5 + C_2\alpha_2^5 + C_3\alpha_3^5 + C_4\alpha_4^5.$$

$$\frac{10}{5^6} = C_1\alpha_1^6 + C_2\alpha_2^6 + C_3\alpha_3^6 + C_4\alpha_4^6.$$

$$\frac{15}{15^7} = C_1\alpha_1^7 + C_2\alpha_2^7 + C_3\alpha_3^7 + C_4\alpha_4^7.$$

42. Problème XVI. *Deux joueurs* A *et* B, *dont les adresses respectives sont entre elles comme* p *est à* q, *jouent ensemble, de manière que sur un nombre* x *de coups, il en manque* y *à* A, *et* x-y *à* B *pour gagner la partie. Déterminer les probabilités qu'ont les joueurs de gagner la partie.*

Solution. Soit $u_{y,x}$ la probabilité pour B de gagner la partie ou de faire les $x$ points quand déjà il en a fait $y$.

$\frac{p}{p+q} = b$ est la probabilité pour A de gagner un coup.

$\frac{q}{p+q} = a$ est la probabilité pour B de gagner un coup.

B peut gagner la partie au moment du coup actuel,

1° s'il gagne ce coup, auquel cas il ne lui reste que $x - 1$ points à faire ensuite; la probabilité de gagner le coup est $\alpha$; celle de faire $x - 1$ points est $u_{y,x-1}$; la probabilité de gagner la partie en gagnant le coup actuel est donc $au_{y,x-1}$.

Mais B peut gagner la partie au moment du coup actuel,

2° en perdant ce coup, pourvu qu'il gagne indépendamment de ce coup : pour cela, il faut que, quand il n'a que $y - 1$ points, il n'en ait plus que $x - 1$ à faire; car alors, quand il aura ses $y$ points, il aura gagné la partie.

La probabilité de perdre un coup est $b$; celle de gagner malgré cette perte est $u_{y-1,x-1}$.

On aura donc

$$u_{y,x} = b \times u_{y-1,x-1} + a \times u_{y,x-1}.$$

Remarque. 1° quand $y = 0$, on a $u_{0,x} = 0$.

Car quand B n'a gagné aucun coup, sa probabilité de gagner la partie est égale à zéro.

On a aussi $u_{0,x-1} = 0$.

2° Quand $y = 1$, on a par (1)

$$u_{1,x} = au_{1,x-1} + bu_{0,x-1}$$

ou

$$u_{1,x} = au_{1,x-1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

3° Si $x = y$, B gagne nécessairement.

Donc

$$u_{y,y} = 1.$$

4° Si $x = y - 1$, on a pareillement

$$u_{y,y-1} = 1$$

car (1) donne

$$u_{y,y} = au_{y,y-1} + bu_{y-1,y-1} = au_{y,y-1} + b,$$

mais $1 = a + b$, donc $u_{y,y-1} = 1$.

5° Si $x = y - 2$, on a par (1)

$$u_{y,y-1} = au_{y,y-2} + bu_{y-2,y-2} = au_{y,y-2} + b = 1,$$

donc

$$u_{y,y-2} = 1, \text{ etc.}$$

6° Si $x = 1$, on a $u_{y,1} = 1$, car on a par (1)

$$u_{y,1} = au_{y,0} + bu_{y-1,0} = a + b = 1,$$

puisqu'on a évidemment $u_{y,0} = 1$, $u_{y-1,0} = 1$.

Nous avons trouvé pour l'intégrale de l'équation (1)

$$u_{y,x} = \left(\frac{q}{p+q}\right)^{x-1} \left\{1 + \frac{p}{q}(x-1) + \frac{p^2}{q^2}\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} + \cdots \right.$$
$$\left. \frac{p^{y-1}}{q^{y-1}}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1.2\ldots\quad\quad y-1}\right\}.$$

43. Problème XVII. A *et* B *ont chacun* k *pièces,*
*la probabilité que* A *gagnera son coup* $\frac{a}{a+b+c}$,
*la probabilité que* B *gagnera son coup* $\frac{b}{a+b+c}$,
*la probabilité que personne ne gagnera* $\frac{c}{a+b+c}$.

*La partie sera terminée, quand l'un des joueurs aura gagné* k *pièces; quelle est la probabilité que* A *gagnera* x *pièces, et celle qu'il gagnera la partie?*

Première solution. Soit $y_x$ la probabilité pour A de gagner $x$ pièces; elle se compose de :

La probabilité pour A de gagner ce coup, multipliée par celle pour A de gagner la partie après ce coup;

Plus la probabilité pour A de ne pas gagner ce coup parce que B le gagne, multipliée par la probabilité pour A de gagner malgré cet échec;

Plus la probabilité que personne ne gagne le coup, multipliée par la probabilité pour A de gagner la partie malgré ce coup;

Donc

$$y_x = \frac{a}{a+b+c}y_{x+1} + \frac{b}{a+b+c}y_{x-1} + \frac{c}{a+b+c}y_x;$$

d'où l'on déduit successivement

$$(a+b+c)y_x = ay_{x+1} + by_{x-1} + cy_x;$$

$$(a+b)y_x = ay_{x+1} + by_{x-1};$$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)y_x = y_{x+1} + \frac{b}{a}y_{x-1};$$

ou en posant $\frac{b}{a} = \gamma$ :

$$(1+\gamma)y_x = y_{x+1} + \gamma y_{x-1},$$

ou bien :

$$y_{x+1} = (1+\gamma)y_x - \gamma y_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Intégrons l'équation (1).

Si

$$x = 0, \quad \text{on a} \quad y_0 = 0;$$

$$x = 2k, \quad \text{on a} \quad y_{2k} = 1;$$

faisons

$$x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

nous aurons :

$$y_2 = (1+\gamma)y_1$$
$$y_3 = (1+\gamma)y_2 - \gamma y_1 = (1+\gamma+\gamma^2)y_1$$
$$y_4 = (1+\gamma)y_3 - \gamma y_2 = (1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3)y_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_x = (1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{x-1})y_1 = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma}\cdot y_1.$$

Pour $x = 2k$, on aura :

$$y_{2k} = 1 = \frac{1-\gamma^{2k}}{1-\gamma} y_1; \quad \text{d'où} \quad y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}};$$

et

$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma}\cdot\frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}}$$

pour $x = k$,

$$y_k = \frac{1-\gamma_k}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1}{1+\gamma^k},$$

probabilité pour A de gagner la partie.

La probabilité pour B est égale a :

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^k} = z_k \qquad y_k + z_k = 1.$$

Remarque. Le calcul est le même quand les joueurs n'ont pas un nombre de pièces égal.

Soient $\lambda$ et $\mu$ le nombre de leurs pièces. On aura :

$$y_{\lambda+\mu} = 1 = \frac{1-\gamma\mu+\lambda}{1-\gamma} y,$$
$$y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma\lambda+\mu}$$
$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{\lambda+\mu}} \qquad y_\mu = \frac{1-\gamma^\mu}{1-\gamma^{\lambda+\mu}}$$

probabilité pour A de gagner la partie.

La probabilité de B serait

$$z_\lambda = \frac{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\lambda}{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\lambda+\mu}}$$

Deuxième solution. L'équation (1) étant linéaire, on peut l'intégrer en posant

$$y_x = a^x,$$

donc

$$a^{x+1} = (1+\gamma)\,a^x - \gamma a^{x-1}$$

$$a^2 - (1+\gamma)\,a + \gamma = 0$$

$$a = \frac{1+\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\gamma)^2}{2^2} - \gamma} = \frac{1+\gamma}{2} \pm \frac{1-\gamma}{2}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \gamma$$

$$y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x = C_1 + C_2 \gamma^x$$

pour

$$x = 0, \text{ on a } y_0 = 0,$$

pour

$$x = 2k, \text{ on a } y_{2k} = 1,$$

donc

$$0 = C_1 + C_2$$

$$1 = C_1 + C_2\gamma^{2k}$$

d'où

$$C_2 = -C_1, \qquad C_1 = \frac{1}{1-\gamma^{2k}}$$

$$y_x = C_1(1-\gamma^x) \qquad = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}}.$$

Troisième solution. Par les fonctions génératrices.

Nous avons trouvé

$$y_{x+1} = (1+\gamma)y_x - \gamma y_{x-1};$$

ou en multipliant par $t^x$ :

$$y_{x+1}t^x = (1+\gamma)y_x t^x - \gamma y_{x-1}t^x,$$

ou bien :

$$\frac{1}{t}(y_{x+1}t^{x+1}) = (1+\gamma)y_x t^x - \gamma t(y_{x-1}t^{x-1}).$$

Posons $x = 1, 2, 3, \ldots$; nous trouverons :

$$\frac{1}{t} t^2 y_2 = (1 + \gamma) y_1 t^1 - \gamma t y_0 t^0$$

$$\frac{1}{t} t^3 y_3 = (1 + \gamma) y_2 t^2 - \gamma t y_1 t^1$$

$$\frac{1}{t} t^4 y_4 = (1 + \gamma) y_3 t^3 - \gamma t_2 y t^2.$$

Ajoutant, on obtient :

$$\frac{1}{t} \{ y_2 t^2 + y_3 t^3 + \cdots \} = (1 + \gamma) \{ y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots \}$$

$$- \gamma t \{ y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots \} .$$

Soit $$z = \sum_0^\infty y_x t^x = y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{t} \{ z - y_0 t^0 - y_1 t^1 \} = (1 + \gamma) \{ z - y_0 t^0 \} - \gamma t z,$$

mais $y_0 = 1$ ; de sorte que cette équation se réduit à

$$z - y_1 t = z (1 + \gamma) t - \gamma t^2 z ;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{y_1 t}{1 - (1 + \gamma) t + \gamma t^2}$$

$$= \frac{y_1 t}{(1 - t)(1 - \gamma t)} = y_1 t (1 + t + t^2 \ldots)(1 + \gamma t + \gamma^2 t^2 \ldots)$$

$$= \cdots + y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1}) t^x + \cdots$$

Et comme $y_x$ est le coefficient de $t^x$ dans le développement de $z$, on aura :

$$y_x = y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1})$$

$$= y_1 \frac{1 - \gamma^x}{1 - \gamma}.$$

D'où l'on tire

$$y_{2k} = 1 = y_1 \frac{1 - \gamma^{2k}}{1 - \gamma},$$

et par suite

$$y_x = \frac{1 - \gamma^x}{1 - \gamma^{2k}}.$$

*44.* Problème XVIII. A *et* B *ont m et n jetons; ils jouent; au bout de quelque temps ils en ont* x *et* y; *la probabilité pour* A *de gagner 1 coup est* $\frac{x}{x+y}$, *celle de* B *est* $\frac{y}{x+y}$. *La partie cesse quand l'un des joueurs a gagné tous les jetons de l'autre. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner la partie?*

Première solution. Posons $m + n = x + y = k$.

Soit $u_x$ la probabilité cherchée;

$\frac{x}{k}$ est la probabilité pour A de gagner cette fois;

$u_{x+1}$ » » A de gagner après le coup;

$\frac{k-x}{k}$ » » A de ne pas gagner cette fois;

$u_{x-1}$ » » A de gagner malgré cet échec;

on aura donc :

$$u_x = \frac{x}{k} u_{x+1} + \frac{k-x}{k} u_{x-1}.$$

Multiplions par $kt^x$, il vient :

$$ku_x t^x = xu_{x+1}t^x + ku_{x-1}t^x - xu_{x-1}t^x.$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ et ajoutons :

$$\left.\begin{aligned} k(tu_1 + t^2u_2 + \cdots) &= (u_2 t + 2u_3 t^2 + 3u_4 t^3 + \cdots) \\ &+ kt(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) \\ &- t(u_0 + 2u_1 t + 3u_2 t^2 + \cdots) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Soit

$$z = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \cdots\cdots;$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \cdots\cdots$$

L'égalité (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} k(u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) = &\left[(u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \cdots) - (u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \cdots)\right] \\ &+ kt(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) \\ &- t\left[(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + (u_1 t + 2u_2 t^2 + \cdots)\right] \end{aligned}$$

ou

$$k(z-u_0)=\frac{dz}{dt}-\frac{z-u_0}{t}+ktz-t\left(z+t\frac{dz}{dt}\right);$$

et puisque $u_0=0$, on aura :

$$k.z=\frac{dz}{dt}-\frac{z}{t}+ktz-tz-\frac{t^2dz}{dt};$$

d'où

$$(t-t^3)\frac{dz}{dt}=z(1+t^2+tk-t^2k),$$

et

$$\frac{dz}{z}=\frac{(t+t^2+tk-t^2k)dt}{t(1-t)(1+t)^2}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-t}+\frac{k-1}{1-t}\right)dt.$$

Intégrant :

$$l.z=l.t-l.(1-t)+(k-1)l.(1+t)+l.c$$

d'où

$$z=c\frac{t(1+t)^{k-1}}{1-t}$$

et si l'on fait $k-1=\mu$ :

$$z=c\frac{t}{1-t}(1+t)^{\mu}=c(t+t^2+t^3+\cdots)\left(1+\mu t+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}t^2+\cdots\right).$$

Le terme général sera

$$z=\cdots+c\left\{1+\mu+\frac{\mu^{2|-1}}{2!}+\cdots+\frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}t^x+\cdots.$$

Donc

$$u_x=c\left\{1+\mu+\frac{\mu^{2|-1}}{2!}+\cdots+\frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}.$$

Pour $x=m+n=k=\mu+1$, on a $u_k=1$, donc

$$1=c\left\{1+\mu+\frac{\mu^{2|-1}}{2!}+\cdots+\frac{\mu^{\mu|-1}}{\mu!}\right\}$$
$$=c[1+1]^{\mu}=c\,2^{\mu}.$$

Donc $c = \frac{1}{2^\mu}$, et :

$$u_x = \frac{1}{2^\mu}\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}\right\}.$$

Deuxième solution. Nous avons trouvé :

$$u_x = \frac{x}{k}\,u_{x+1} + \frac{k-x}{k}\,u_{x-1}.$$

D'où

$$ku_x = xu_{x+1} + ku_{x-1} - xu_{x-1}$$
$$k(u_x - u_{x-1}) = x(u_{x+1} - u_{x-1})$$
$$= x(u_{x+1} - u_x) + x(u_x - u_{x-1}).$$

Posons :

$$u_x - u_{x-1} = \psi x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

il viendra

$$k\psi x = x\left[\psi(x+1) + \psi(x)\right]$$
$$(k-x)\,\psi x = x\psi(x+1)$$
$$\psi(x+1) = \frac{k-x}{x}\,\psi(x).$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3\ldots..$; nous aurons

$$\psi(2) = \psi(1).\frac{k-1}{1}$$
$$\psi(3) = \psi(2).\frac{k-2}{2}$$
$$\vdots$$
$$\psi x = \psi(x-1)\,\frac{k-x+1}{x-1};$$

et multipliant ces équations :

$$\psi x = \psi(1).\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-x+1)}{1.2\ldots x-1} = \psi(1).\frac{\mu^{x-1|-1}}{x-1!}.$$

Donc

$$\psi(1) = \psi(1)$$
$$\psi(2) = \psi(1)\,\frac{\mu}{1}$$
$$\psi(3) = \psi(1).\frac{\mu^{2|-1}}{2!},$$
$$\text{etc.}$$

mais la formule (1) donne pour $x = 1, 2, 3 \ldots$.

$$u_1 = u_0 + \psi(1)$$
$$u_2 = u_1 + \psi(2)$$
$$u_x = u_{x-1} + \psi(x)$$

en ajoutant on a :

$$u_x = u_0 + \psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(x)$$
$$= \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(x)$$

ou bien

$$u_x = \psi(1)\left\{1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu^{2/-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{-x1/-1}}{x-1!}\right\}.$$

$\psi(1)$ se détermine comme précédemment $c$.

**Problème des parties pour deux joueurs.**

45. *A un joueur* A, *qui a la probabilité* p *de faire un point, il reste* x *points à faire pour gagner la partie; à* B *qui a la probabilité* q = 1 — p, *de faire un point, il reste* y *points à faire pour gagner. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner l'enjeu?*

Solution. Soit $u_{y,x}$ la probabilité cherchée; on a

$$u_{y,0} = 1, \quad u_{0,x} = 0,$$

car alors $p$ gagne; $x$ et $y$ ne sont jamais nuls à la fois.

La probabilité cherchée est égale à la probabilité $p$ que A possède de gagner cette fois, multipliée par $u_{y,x-1}$ probabilité de gagner ensuite, plus la probabilité $q$ que A perde cette fois, multipliée par $u_{y-1,x}$ probabilité de gagner ensuite; savoir

$$u_{y,x} = pu_{y,x-1} + qu_{y-1,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*Première solution par une double sommation.*

Soit

$$z = \sum_1^\infty \sum_1^\infty u_{y,x} t^y v^x = u_{1,1}tv + u_{1,2}tv^2 + \cdots$$
$$+ u_{2,1}t^2v + u_{2,2}t^2v^2 + \cdots$$

Multiplions l'équation (1) par $t^y v^x$, posons pour

$$y = 1, \quad x = 1, 2, 3 \ldots$$
$$y = 2 \quad x = 1, 2, 3 \ldots.$$

et ajoutons, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} u_{1,1}tv + u_{1,2}tv^2 + \cdots \\ + u_{2,1}t^2v + u_{2,2}t^2v^2 + \cdots \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = p\left\{\begin{array}{l} u_{1,0}tv + u_{1,1}tv^2 + \cdots \\ + u_{2,0}t^2v + u_{2,1}t^2v^2 + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}$$

$$+ q\left\{\begin{array}{l} u_{0,1}tv + u_{0,2}tv^2 + \cdots \\ + u_{1,1}t^2v + u_{1,2}t^3v^2 + \cdots \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}$$

ou

$$z = \sum_1^\infty \sum_1^\infty u_{y,x}t^yv^x = p\left\{v\sum_1^\infty \sum_1^\infty u_{x,y}t^yv^x + v\sum_1^\infty u_{y,0}t^y\right\}$$

$$+ q\left\{t\sum_1^\infty u_{0,y}v^x + t\sum_1^\infty \sum_1^\infty u_{y,x}t^yv^2\right\}$$

ou, puisque $u_{y,0} = 1$, $u_{0,x} = 0$ :

$$z = \frac{pvt}{(1-t)(1-pv-qt)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$z = \frac{pvt}{1-t} \cdot \frac{1}{1-qt} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{pv}{1-qt}}$$

$$z = \frac{pvt}{(1-t)(1-qt)} \cdot \left\{1 + \frac{pv}{1-qt} + \frac{p^2v^2}{(1-qt)^2} + \cdots + \frac{p^{x-1}v^{x-1}}{(1-qt)^{x-1}} + \cdots\right\}$$

$$z = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{p^xt}{(1-t)(1-qt)^x} \cdot v^x + \cdots$$

Le terme en $t^yv^x$, s'obtient en cherchant le terme en $t^y$, du développement de

$$\frac{p^xt}{(1-t)(1-qt)^x},$$

savoir :

$$p^x\left(1 + \frac{x}{1}q + \frac{x^{2/-1}}{2!}q + \cdots + \frac{x^{x+y-2/-1}}{y-1!}q^{y-1}\right)t^y + \cdots$$

donc

$$u_{y,x} = p^x\left\{1 + \frac{x}{1}q + \frac{x^{2/-1}}{2!}q^2 + \cdots + \frac{x^{x+y-2/-1}}{y-1!}q^{y-1}\right\} \cdots \quad (3).$$

Remarque. Cette formule (3) se compose de :

$p^x$, probabilité de faire $x$ points en $x$ coups ;

$p^x \frac{x}{1} q$ » $x$ points en $x+1$ coups ;

. . . . . .

$p^x \frac{x^{2r-1}}{2!} q^2$ » $x$ points en $x+y-1$ coups ;

la somme est la probabilité cherchée.

*Seconde solution par une simple sommation.*

Soit

$$z_x = \sum_1^\infty y u_{y,x} t^y = u_{1,x} t + u_{2,x} t^2 + \cdots$$

Je fais dans (1), $y = 1$, et je multiplie par $t$

$y = 2$, » $t^2$

$y = 3$, » $t^3$

etc.

et j'ajoute :

$$u_{1,x} t + u_{2,x} t^2 + \cdots = p\left[u_{1,x-1} t + u_{2,x-1} t^2 + \cdots\right] + qt\left[u_{1,x} t + u_{2,x} t^2 + \cdots\right]$$

ou

$$z_x = p z_{x-1} + qt z_x ;$$

d'où

$$z_x = \frac{p z_{x-1}}{1 - qt},$$

en faisant $x = 1, 2, 3 \ldots x$, on obtient

$$z_1 = \frac{p z_0}{1 - qt}$$

$$z_2 = \frac{p z_1}{1 - qt} \cdots$$

$$z_x = \frac{p z^{x-1}}{1 - qt} = \frac{p^x}{(1 - qt)^x} z_0 ;$$

mais

$$z_0 = \sum_1^\infty u_{y,0} t^y = \sum_1^\infty t^y = t + t^2 + \cdots = \frac{t}{1 - t}$$

donc

$$z_x = \frac{p_x t}{(1 - qt)^x (1 - t)} ;$$

et par suite $u_{y,x}$ est le coefficient de $t^y$ dans le développement de $z_x$ :

$$z_x = p^x (1 - qt)^{-x} (1 - t)^{-1} =$$

$$p^x(t + t^2 + \cdots + t^{y-1} + t^y)\left(1 + xqt + \frac{x^{2/-1}}{2!} q^2t^2 + \cdots + \frac{x^{x+y-2/-1}}{y-1!} q^{y-1}t^{y-1}\right).$$

Pour réduire la formule précédente en intégrale définie, il y a deux méthodes.

1° Faisons

$$z = pvt \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1 - pv - qt}.$$

Comme on a :

$$\frac{1}{1-t} = \int_0^\infty e^{-(1-t)\theta} d\theta$$

$$\frac{1}{1 - pv - qt} = \int_0^\infty e^{-(1-pv-qt)\omega} d\omega,$$

il en résulte :

$$z = pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)} e^{-\omega(1-pv-qt)} d\theta d\omega$$

$$= pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \cdot e^{p\omega v} \cdot e^{(\theta+q\omega)t} d\theta d\omega$$

$$= pvt \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} d\omega d\theta \left\{1 + p\omega v + \cdots + \frac{p^{x-1}\omega^{x-1}}{1.2...x-1} \cdot v^{x-1} + \cdots\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + (\theta + q\omega)t + \cdots \frac{(\theta + q\omega)^{y-1}}{1.2...y-1} t^{y-1}\right\}$$

$$z = \cdots + v^v t^y \left[\frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega d\theta\right] + \cdots$$

et par suite

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega d\theta.$$

Posons

$$\omega = rt, \quad d\omega = rdt + tdr, \quad \theta = r(1 - t);$$

d'où, $\theta$ étant considéré comme constant par rapport à $\omega$ :

$$0 = -rdt + (1 - t)dr;$$

et par conséquent :

$$d\omega = \left(r + \frac{rt}{1-t}\right) dt = \frac{rdt}{1-t}.$$

Par rapport à $\theta$, $\omega$ est constant; donc $d\omega = 0$, et par suite $dt = 0$; d'où $d\theta = (1-t)\,dr$; et : $d\omega d\theta = rdrdt$.

Comme

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{t}{1-t} : \text{aux limites } \omega \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \text{répondent celles } t \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases};$$

et comme

$$\theta + \omega = r : \text{aux limites } \theta \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \text{répondent celles } r \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}.$$

Nous aurons donc :

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt \int_0^\infty r dr e^{-(r-rt+rt)} r^{x-1} t^{x-1} (r - rt + qrt)^{y-1}$$

$$= \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1 - t + qt^{y-1}) \int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr.$$

Mais

$$1 - t + qt = 1 - t(1-q) = 1 - pt;$$

et

$$\int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr = \Gamma(x+y).$$

Par suite l'expression précédente devient

$$u_{y,x} = \frac{p^x \Gamma(x+y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1-pt)^{y-1}.$$

Soit

$$pt = \zeta; \text{ pour } t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ on a : } \zeta = \begin{cases} p \\ 0 \end{cases};$$

donc :

$$u_{y,x} = \frac{p^x \Gamma(x+y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^p \frac{d\zeta}{p} \cdot \frac{\zeta^{x-1}}{p^{x-1}} (1-\zeta)^{y-1}$$

$$= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^p \zeta^{x-1} (1-\zeta)^{y-1} d\zeta.$$

Si $p = 1$, alors A gagne à chaque coup : et l'on a :

$$1 = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1} d\zeta ;$$

or

$$\int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1} d\zeta = \frac{\Gamma x \Gamma y}{\Gamma(x+y)}$$

donc

$$u_{y,x} = \frac{\int_0^p \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1} d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{x-1}(1-\zeta)^{y-1} d\zeta}.$$

2° On a trouvé

$$z_x = p^x t \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-qt)^x}.$$

Par la formule

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

on a

$$\frac{1}{a^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} dx,$$

donc

$$\frac{1}{1-t} = \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)} d\theta$$

$$\frac{1}{(1-qt)^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)} \omega^{x-1} d\omega ;$$

et par suite l'expression de $z_x$ devient :

$$z_x = \frac{p^x t}{\Gamma(x)} \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)} d\theta \int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)} \omega^{x-1} d\omega$$

$$= \frac{p^x t}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} \left[ 1 + t(q\omega+\theta) + \cdots + \frac{(q\omega+\theta)^{y-1}}{1.2\ldots y-1} t^{y-1} + \cdots \right] d\omega d\theta$$

$$= \cdots + t^y \left[ \frac{px}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} (q\omega+\theta)^{y-1} \omega^{x-1} d\omega d\theta \right] + \cdots$$

donc

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (q\omega+\theta)^{y-1} d\omega d\theta.$$

**Problème général des parties.**

46. Des joueurs A, B,..... R ont respectivement

$m, n, \ldots\ldots r$ points à faire pour gagner l'enjeu;

$\alpha, \beta, \ldots\ldots \gamma$ sont les probabilités qu'ils ont de gagner un coup.

Quelle est la probabilité pour A de gagner la partie?

On a : $\alpha + \beta + \cdots + \gamma = 1$.

Soit $u_{m,n,\ldots r}$ la probabilité demandée.

On aura, en faisant les mêmes raisonnements que dans le problème précédent :

$$u_{0,n,\ldots r} = 1, \quad u_{m,0\ldots r} = 0, \quad u_{m,n,0\ldots r} = 0, \quad u_{m,n\ldots 0} = 0. \quad . \quad (1)$$

$$u_{m,n,\ldots r} = \alpha u_{m-1,n\ldots r} + \beta u_{m,n-1\ldots r} + \cdots\cdots + \gamma u_{m,n,r-1}. \quad . \quad (2)$$

soit

$$z = \sum_1^\infty \sum_1^\infty \ldots \sum_1^\infty u_{m,n,\ldots r}\, t^m v^n \ldots w^r.$$

Dans la formule (2) faisons successivement

$$m = 1, \begin{cases} n = 1, 2.... \\ r = 1, 2.... \end{cases}$$

$$m = 2, \begin{cases} n = 1, 2.... \\ r = 1, 2.... \end{cases}$$

etc.,

après avoir multiplié d'abord par $t^m\, v^n \ldots w^r$, puis ajoutons; nous trouverons comme plus haut, n° 45 :

$$z = \alpha\left[tz + t\sum_1^\infty \ldots \sum_1^\infty v^n \ldots w^r\right] + \beta vz + \cdots + \gamma wz;$$

d'où :

$$z = \frac{\alpha t \sum_1^\infty \ldots \sum_1^\infty v^n \ldots w^r}{1 - \alpha t - \beta v - \cdots - \gamma w} = \frac{\alpha t v \ldots w}{(1-v)\ldots(1-w)(1-\alpha t - \beta v - \ldots \gamma w)}.$$

Pour réduire cette formule en intégrale définie, nous avons

$$\frac{1}{1-v} = \int_0^\infty e^{-(1-v)\omega} d\omega, \ldots \frac{1}{1-w} = \int_0^\infty e^{-(1-w)\rho} d\rho,$$

$$\frac{1}{1 - \alpha t - \cdots - \gamma w} = \int_0^\infty e^{-(1-\alpha t - \ldots - \gamma w)\theta} d\theta.$$

L'expression de $z$ deviendra par là :

$$z = \alpha t v \dots w \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta e^{-\omega(1-v)} \dots e^{-\rho(1-w)} e^{-\theta(1-\alpha t - \dots - \gamma w)}$$

$$= \alpha t v \dots w \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta e^{-(\omega+\dots+\rho+\theta)} e^{\alpha\theta t} \dots e^{(\omega+\beta\theta)v} \dots e^{(\rho+\gamma\theta)w}.$$

Développons les exponentielles :

$$e^{\alpha\theta t} = \dots + \frac{\alpha^{m-1}\theta^{m-1}t^{m-1}}{1.2\dots m-1} + \dots$$

$$e^{(\omega+\beta\theta)v} = \dots + \frac{(w+\beta\theta)^{n-1}v^{n-1}}{1.2\dots n-1}$$

$$e^{(\rho+\gamma\theta)w} = \dots + \frac{(\rho+\gamma\theta)^{r-1}w^{r-1}}{1.2\dots r-1}$$

et substituons; nous aurons :

$$z = \dots + t^m v^n \dots w^r \left[ \frac{\alpha^m}{\Gamma_m \Gamma_n \dots \Gamma_r} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \dots d\rho d\theta . e^{-(\omega+\dots+\rho+\theta)} \theta^{m-1} \right].$$

Si nous changeons

$$\omega \dots \rho \text{ en } \theta\varphi \dots \theta\varpi;$$

et par suite

$$d\omega \dots d\rho \text{ en } \theta d\varphi \dots \theta d\varpi,$$

nous aurons

$$z = \dots + t^m v^n \dots w^r \left[ \frac{\alpha^m}{\Gamma^m \Gamma^n \dots \Gamma^r} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty d\varphi \dots d\varpi d\theta . \theta^{m+n+\dots+r-1} \right.$$

$$\left. + (\varphi+\beta)^{n-1} \dots (\varpi+\gamma)^{r-1} e^{-\theta(1+\varphi+\dots+\varpi)} \right];$$

et comme $u_{m,n\dots r}$ est le coefficient de $t^m v^n \dots w^r$ dans le développement de $z$, sa valeur sera l'expression entre parenthèses.

Pour la simplifier, posons

$$1 + \varphi + \dots + \varpi = \lambda;$$

elle deviendra

$$u_{m,n\dots r} = \frac{\alpha^m}{\Gamma m \Gamma n \dots \Gamma r} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty d\varphi \dots d\varpi (\varphi+\rho)^{n-1} \dots (\varpi+\gamma)^{r-1} \int_0^\infty \theta^{m+\dots+r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta$$

$$= \frac{\alpha^m \Gamma(m+n+\dots+r)}{\Gamma m . \Gamma n \dots \Gamma r} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{d\varphi \dots d\varpi (\beta+\varphi)^{n-1} \dots (\varpi+\gamma)^{r-1}}{\lambda^{m+n+\dots+r}}, \quad (\alpha)$$

à cause de

$$\int_0^\infty \theta^{m+n+\ldots+r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta = \frac{\Gamma(m+n+\ldots+r)}{\lambda^{m+n+\ldots+r}}.$$

Or pour $\beta = 0 \ldots \gamma = 0$, on a $u_{m,\ldots r} = 1$; donc

$$\frac{\Gamma m \Gamma n \ldots \Gamma r}{\Gamma(m+n+\ldots+r)} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{d\varphi \ldots d\varpi \varphi^{n-1} \ldots \varpi^{r-1}}{(1+\varphi+\ldots+\varpi)^{m+n+\ldots+r}}. \quad (\beta)$$

La formule ($\beta$) permettra de calculer la formule ($\alpha$); car on peut développer les binômes $(\beta+\varphi)^{n-1}, \ldots (\varpi+\gamma)^{r-1}$; et le terme général du développement sera de la forme ($\beta$), et pourra se déterminer par cette dernière formule.

47. Problème XX. *Deux joueurs* A et B, *dont les probabilités respectives de gagner un coup sont* $\alpha$ *et* $\beta$, *ont l'un* m *et l'autre* n, *en tout* $m+n=r$ *jetons; à chaque coup le perdant donne un jeton à son adversaire; la partie ne finit que quand l'un des joueurs a perdu tous ses jetons. Quelle est la probabilité pour* A *de gagner au* $s^e$ *coup, en supposant* $m > s$?

Solution. Soit $u_{m,s}$ la probabilité cherchée.

A peut gagner la partie au moment du coup actuel :

1° S'il gagne ce coup, et qu'il gagne la partie au moyen des coups suivants: la probabilité de cet événement composé sera $\alpha u_{m+1,s-1}$;

2° S'il perd ce coup, mais qu'il gagne la partie au moyen des coups suivants, la probabilité de cet événement sera $\beta u_{m-1,s-1}$; par suite, la probabilité est égale à la somme :

$$u_{m,s} = \alpha u_{m+1,s-1} + \beta u_{m-1,s-1}. \quad \ldots \quad (1)$$

Multiplions par $t^s$, faisons $s$ successivement égal à 1, 2, 3, ..., ajoutons, et désignons la somme par $z_m$; il viendra

$$z_m = \sum_1^\infty u_{m,s} t^s = u_{m,1} t + u_{m,2} t^2 + \cdots$$

$$= \alpha [u_{m+1,0} t + u_{m+1,1} t^2 + \cdots] + \beta [u_{m-1,0} t + u_{m-1,1} t^2 + \cdots].$$

Or, en général (sauf le cas où $n=0$), on a

$$u_{m+1,0} = 0, \qquad u_{m-1,0} = 0;$$

donc

$$z_m = \alpha t\,[t u_{m+1,1} + t^2 u_{m+1,2} + \cdots] + \beta t\,[u_{m-1,1} t^1 + u_{m-1,2} t^2 + \cdots]$$

ou bien

$$z_m = \alpha t z_{m+1} + \beta t z_{m-1}.$$

Cette équation étant linéaire, nous pouvons poser

$$z_m = a^m;$$

d'où

$$z_{m+1} = a^{m+1}, \quad z_{m-1} = a^{m-1};$$

ce qui donne, en substituant, et divisant par $a^m$ :

$$1 = \alpha t a + \frac{\beta t}{a};$$

ou

$$a^2 - \frac{1}{\alpha t} a = -\frac{\beta}{\alpha};$$

d'où les deux racines :

$$a_1 = \frac{1}{2\alpha t}\left(1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha t}\left(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2}\right);$$

et, par suite,

$$z_m = \mathrm{A} a_1^m + \mathrm{B} a_2^m.$$

Or, pour $m = 0$, nous avons :

$$z_0 = u_{0,1} t + u_{0,2} t^2 + \cdots = 0;$$

donc

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0.$$

Pour $m = r$, on a $z_r = 1$, donc

$$\mathrm{A} a_1^r + \mathrm{B} a_2^r = 1;$$

Ces deux équations déterminent les valeurs de A et B qui, substituées dans l'expression de $z_m$, donnent

$$z_m = \frac{a_1^m + a_2^m}{a_1^r + a_2^r} = \frac{1}{a_1^n} \frac{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m}{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^r}.$$

Or, comme $a_1 a_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, on aura $\frac{1}{a_1} = \frac{\alpha}{\beta} a_2$; donc :

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m\right]\left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^r + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2r} + \cdots\right]$$

Si l'on développe le rapport $\frac{a_2}{a_1}$ suivant les puissances de $t^2$, on aura

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m = (z\alpha\beta t^2 + \cdots)^m,$$

et comme $m$ est $> s$, ces termes n'auront pas d'influence sur le coefficient de $t^s$ dans le développement de $z_m$; on pourra donc écrire :

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n.$$

Développons maintenant $a_2^n$ par la formule de Lagrange qui donne, pour

$$z = x + \alpha f z :$$

$$Fz = S \frac{\alpha^i}{1.2..i} \frac{d^{i-1}[F'x . fx^i]}{dx^{i-1}}$$

Comme on a

$$a_2 = \beta t + \alpha t a_2^2,$$

on devra faire

$$z = a_2, \quad x = \beta t, \quad \alpha = \alpha t, \quad fr = a_2^2, \quad Fz = a_2^n;$$
$$Fx = (\beta t)^n; \quad F'x = n(\beta t)^{n-1}; \quad fx = (\beta t)^2;$$

et l'on aura

$$a_2^n = S \frac{(\alpha t)^i}{1.2...i} \frac{d^{i-1}\left[n(\beta t)^{2i+n-1}\right]}{d(\beta t)^{i-1}}$$
$$= S \frac{(\alpha t)^i}{1.2...i} n(n+2i-1)...(n+i+1)\beta t^{n+i}$$
$$= S t^{n+2i} \frac{\alpha^i \beta^i \beta^n}{1.2...i} n(n+2i-1)...(n+i+1);$$

et, par suite, l'expression de $z_m$ deviendra

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} S t^{n+2i} \frac{\alpha^i \beta^i \beta^n}{1.2..i} n(n+2i-1)...(n+i+1).$$

Enfin, si nous posons $s = n + 2i$, nous aurons

$$u_{m,0} = \frac{\alpha^{n+i}\beta^i}{1 \cdot 2 \ldots i} n(n + 2i - 1) \ldots (n + i + 1).$$

48. Problème XXI. *Une urne contient* r *boules marquées* 1; r *boules marquées* 2, *etc.*, r *boules marquées* n; *on en tire toutes les boules successivement; trouver la probabilité qu'au moins* 1, *ou* 2, *ou* 3, *etc., ou* i *boules, sortent au rang marqué par leur numéro.*

Solution. Aucune boule ne peut sortir à son rang que dans les $n$ premiers tirages. On peut donc faire abstraction des tirages suivants. Le nombre total des boules est $rn = s$. Comme il faut avoir égard à l'ordre, le nombre total de tous les cas possibles est égal au nombre des arrangements de $s^r$ boules, prises $n$ à $n$, ou

$$T = s(s - 1) - (s - n + 1) = s^{n/-1}.$$

Cherchons :

A. La probabilité $P_1$ qu'une boule au moins sortira au rang marqué par son numéro.

Supposons qu'une boule n° 1 sorte la première; comme cela ne peut arriver qu'autant de fois qu'il y a d'arrangements possibles avec $s - 1$ boules prises $n - 1$ à $n - 1$, on aura

$$(s - 1)(s - 2) \ldots (s - n + 1) = (s - 1)^{n-1/-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule n° 1 sort la première.

Cette supposition s'applique aux $r$ boules, donc $r(s - 1)^{n-1/-1}$ sera le nombre des cas où les $r$ boules n° 1 sortent à leur rang.

Les mêmes résultats s'appliquent aux n$^{os}$ 2, . 3, .. $n$; donc

$$nr(s - 1)^{n-1/-1} = s(s - 1)^{n-1/-1} = s^{n/-1} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

sera le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on en retranche les cas qui sont répétés. Déterminons ces cas.

Considérons le cas où une des boules n° 1 sort la première, et une des boules n° 2 la seconde. Ce cas est compris deux fois

dans $(a)$, car il y est compris une fois dans les cas où un n° 1 sort à son rang; il y est compris une seconde fois dans les cas où un n° 2 sort à son rang. Cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang.

Il faut donc retrancher de $(a)$ le nombre de tous les cas où deux boules sortent à leur rang. Le nombre de combinaisons de deux boules de numéros différents est

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 ;$$

le nombre des arrangements des $s-2$ boules restantes prises $n-2$ à $n-2$ est

$$(s-2)(s-3)\ldots(s-n+1) = (s-2)^{s-2/-1}.$$

Donc, le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2/-1},$$

qu'il faut retrancher de $(a)$.

On a donc

$$s^{n/-1} - \frac{n^{2/-1}}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2/-1} \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on retranche encore de $(a')$ les cas répétés, ou qu'on y ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. Soit $k$ ce nombre. Il est répété trois fois dans le premier terme de $(a')$, car il peut résulter dans ce terme des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang; $k$ est compris aussi trois fois dans le second terme de $(a')$, car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang. Ce second terme étant affecté du signe —, $k$ se détruit, et par conséquent $k$ manque dans $(a')$; il faut donc l'y ajouter.

Déterminons $k$ : Comme le nombre des combinaisons de $n$ numéros 3 à 3 est $\frac{n^{3/-1}}{1.2.3}$, et comme on peut combiner les $r$ boules d'un des numéros de chaque combinaison avec les $r$ boules du second, et avec les $r$ boules du troisième, on aura

$$\frac{n^{3/-1}}{1.2.3} r^3$$

combinaisons, qu'il faut multiplier par

$$(s-3)(s-4)\cdots(s-n+1) = (s-3)^{n-3/-1},$$

qui est le nombre des arrangements des $s-3$ boules restantes prises $n-3$ à $n-3$.

On a donc :

$$k = \frac{n^{3/-1}}{2.3} r^3 (s-3)^{n-3/-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels trois boules sortent à leur rang, nombre qu'il faut ajouter à $(a')$; on aura ainsi :

$$s^{n/-1} - \frac{n^{2/-1}}{2} r^2 (s-2)^{n-2/-1} + \frac{n^{3/-1}}{2.3} r^3 (s-3)^{n-3/-1} \quad . \quad (a'')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang, ou

$$\frac{n^{4/-1}}{2.3.4} r^4 (s-4)^{n-4/-1},$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} F_1 = s^{n/-1} &- \frac{n^{2/-1}}{2} r^2 (s-2)^{n-2/-1} + \frac{n^{3/-1}}{3!} r^3 (s-3)^{n-3/-1} \\ &- \frac{n^{4/-1}}{4!} r^4 (s-4)^{n-4/-1} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule sort à son

rang; la probabilité de la sortie d'une boule à son rang sera donc

$$\left.\begin{aligned} P_1 = \frac{F_1}{T} &= 1 - \frac{n^{2/-1}}{2}\, r^2 \frac{1}{s^{2/-1}} + \frac{n^{3/-1}}{3!}\, r^3 \frac{1}{s^{3/-1}} - \frac{n^{4/-1}}{4!}\, r^4 \frac{1}{s^{4/-1}} + \cdots \\ &= 1 - \frac{n-1}{2}\, r \frac{1}{s-1} + \frac{(n-1)^{2/-1}}{3!}\, r^2 \frac{1}{(s-1)^{2/-1}} \\ &\quad - \frac{(n-1)^{3/-5}}{4!}\, r^3 \frac{1}{(s-1)^{3/-1}} + \cdots \end{aligned}\right\} (B)$$

Cherchons :

B. La probabilité $P_i$ que $i$ boules au moins sortiront au rang marqué par leur numéro.

Le nombre des cas dans lesquels $i$ boules sortent à leur rang est, par ce qui précède :

$$\frac{n^{i/-1}}{i!}\, r^i (s-i)(s-i+1)\ldots(s-n+1) = \frac{n^{i/-1}}{i!}\, r^i (s-i)^{n-i/-1}, \quad . (b)$$

pourvu que l'on retranche de $(b)$ les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $i+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter dans $(b)$, de ce que $i+1$ boules sont prises $i$ à $i$. Ces cas sont donc répétés $i+1$ fois dans $(b)$; par conséquent il faut les retrancher $i$ fois.

Or le nombre des cas dans lesquels $i+1$ boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i)}{1.2..(i+1)}\, r^{i+1} (s-i-1)(s-i-2)\ldots(s-n+1)$$
$$= \frac{n^{i+1/-1}}{(i+1)!}\, r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1/-1}.$$

En multipliant ce nombre par $i$, et retranchant le produit de $(b)$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n^{i/-1}}{i!}\, r^i (s-i)^{n-i/-1} - i \frac{n^{i+1-1}}{(i+1)!}\, r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1/-1} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i}\, r^i (s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\left\{1 - ir\frac{n-i}{i+1}\frac{1}{s-i}\right\} \\ &= \frac{n^{i/-1}}{i!}\, r^i (s-1)^{n-i/-1}\left\{1 - ir\frac{n-i}{i+1}\frac{1}{s-i}\right\}. \end{aligned}\right\} (b')$$

Mais dans cette formule il se trouve encore des cas répétés, savoir : ceux dans lesquels $i+2$ boules sortent à leur rang, car ils résultent, dans le premier terme, des cas où $i+2$ boules, sortant à leur rang, sont prises $i$ à $i$; et, dans le second, des cas où ces $i+2$ boules, sortant à leur rang, sont prises $i+1$ à $i+1$, cas qu'on doit de plus multiplier par $i$, comme on l'a fait au second terme. Ils sont donc compris dans $(b')$

$$\frac{(i+2)(i+1)}{2} - i(i+2) = k \text{ fois.}$$

Ainsi il faudra multiplier par $1-k$ le nombre des cas dans lesquels $i+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+2)$$
$$= \frac{n^{i+2/-1}}{(i+2)!} r^{i+2}(s-i-2)^{n-i+1/-1}.$$

Le produit demandé est donc

$$\left\{1 - \frac{(i+2)(i+1)}{2} + i(i+2)\right\} \frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2..(i+2)} r^{i+1}(s-i-2)\ldots(s-n+1)$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+1)\frac{i(i+1)}{2}.$$

En l'ajoutant à $(b')$, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i} r^i(s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\left\{1 - ir\frac{n+i}{i+1}\frac{1}{s-i}\right\} \\
&+ \frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1.2..(i+2)} r^{i+2}(s-i-2)(s-i-3)\ldots(s-n+1)\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2..i} r^i(s-i)(s-i-1)\ldots(s-n+1)\times \\
&\times\left\{1 - \frac{i}{i+1}\frac{(n-i)r}{s-i} + \frac{i}{i+1}\cdot\frac{(n-1)(n-i+1)r^2}{2(s-i)(s-i-1)}\right\} \\
&= \frac{n^{i/-1}}{i!} r^i(s-i)^{n-i-1}\left\{1 - \frac{i}{i+1}\frac{(n-i)r}{s-i} + \frac{i}{i+2}\frac{(n-i)^{2/-1}}{2} r^2\frac{1}{(s-1)^{2/-1}}\right\}
\end{aligned}\right\} (b'')$$

Pour obtenir le nombre de tous les cas où $i$ boules sortent à leur rang, il faudra encore retrancher de $(b'')$ tous les cas qui sont répétés; on obtiendra ainsi :

$$F_i = \frac{n^{i'-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i'-1} \left\{ 1 - \frac{i}{i+1} \frac{n-i}{s-i} r + \right.$$
$$\left. + \frac{i}{i+2} \frac{(n-i)^{2-1}}{2} r^2 \frac{1}{(s-i)^{2'-1}} - \frac{i}{i+3} \frac{(n-1)^{3'-1}}{3!} r^3 \frac{3}{(s-i)^{3'-1}} + \cdots \right\}.$$

La probabilité que $i$ boules sortent à leur rang sera donc

$$P_i = \frac{F_i}{T} = \frac{(n-1)^{i-i'-1}}{i!} r^{i-1} \frac{1}{(s-1)^{i-1'-1}} \left\{ 1 - \frac{i}{i+1} \frac{n-i}{s-i} \right.$$
$$\left. + \frac{i}{i+2} \frac{(n-i)^{2'-1}}{2} r^2 - \frac{i}{i+3} \frac{(n-i)^{3'-1}}{3!} r^3 \frac{1}{(s-1)^{3'-1}} + \cdots \right\}$$

La probabilité Q qu'aucune boule ne sort à son rang sera

$$Q = 1 - P_1 = \frac{n-1}{2} r \frac{1}{s-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} r^2 \frac{1}{(s-1)(n-2)}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \cdots$$

Divisons et multiplions par $1, 2, \ldots rn$; ajoutons et retranchons

$$\frac{1.2..rn}{1.2..rn} - \frac{nr\,1.2..(rn-1)}{1.2..rn};$$

nous aurons, en nous rappelant que $s = rn$ :

$$Q = \frac{1.2..rn - n\,1.2..(rn-1)\,r + \frac{n(n-1)}{1.2} 1.2..(rn-2) r^2 - \cdots}{1.2.rn}$$
$$= \frac{\int_0^\infty x^{m-n} (x-r)^n e^{-x} dx}{\int_0^\infty x^{rn} e^{-x} dx} = \frac{N}{D}.$$

Cette dernière forme vaut mieux quand $rn$ est très-grand.

49. Remarque. La valeur de $x$ qui répond au maximum de $x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}$ est

$$x_m = \frac{rn+r}{2} + \sqrt{\frac{r^2(n-1)^2+4rn}{2}}.$$

Au moyen de la formule

$$\int y\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}} \text{ (*)},$$

on trouvera en conséquence :

$$N = \frac{\sqrt{2\pi}\,x_m^{rn+2}\left(1-\frac{r}{x_m}\right)e^{-x_m}}{\sqrt{nx_m^2+n(r-1)(x_m-r)^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}};$$

$$D = \sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-rn},$$

d'où

$$Q = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{2}{rn^2}}}$$

Comme $rn$ est supposé très-grand, on peut négliger $\frac{2}{rn}$ et $\frac{1}{rn^2}$, et l'on aura

$$Q = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

(*) Voir la note II à la fin du volume.

## CHAPITRE III.

### THÉORÈME DE BERNOUILLI.

50. *Si l'on connaît les probabilités simples et constantes,* p *et* q, *de deux événements contraires* A *et* B, *la probabilité que, dans un très-grand nombre* $\mu = m + n$ *d'épreuves,* A *arrivera au nombre inconnu* m *de fois compris entre*

$$\mu p \pm \gamma\sqrt{2pq\mu}$$

*sera donné par*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\varpi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\varpi\mu pq}};$$

*ou bien* P *sera la probabilité que l'écart* $\frac{m}{\mu} - p$ *est compris entre*

$$\pm\gamma\sqrt{2pq}.$$

Démonstration. Le terme général du binôme

$$(p+q)^{\mu} = S\frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n = 1$$

qui exprime la probabilité qu'en $\mu = m + n$ épreuves, A arrive $m$ fois, B, $n$ fois, est :

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}p^m q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si nous remplaçons les factorielles qui entrent dans cette formule par leurs expressions tirées de la formule suivante, qui est valable pour une très-grande valeur de $x$ (*) :

$$x! = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

(*) Voir la note I à la fin du volume.

nous trouverons :

$$T_n = \left(\frac{\mu p}{m}\right)^m \left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}}$$
$$= \left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Cherchons les valeurs de $m$ et de $n$ qui rendent $T_n$ maximum.

Si nous changeons successivement $n$ en $n-1$ et en $n+1$, la formule (1) devient :

$$T_{n-1} = \frac{\mu!}{m+1!\,n-1!} p^{m+1} q^{n-1} = T_n \frac{n}{m+1} \frac{p}{q}$$
$$T_{n+1} = \frac{\mu!}{m-1!\,n+1!} p^{m-1} q^{n+1} = T_n \frac{m}{n+1} \frac{q}{p}.$$

Pour que $T_n$ soit un maximum, il faut que

$$T_n > T_{n-1} \quad \text{et} \quad T_n > T_{n+1};$$

ou que

$$1 > \frac{n}{m+1} \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad 1 > \frac{m}{n+1} \frac{q}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1° *Éliminons* n *et* q.

En remplaçant $n$ par $\mu - m$ et $q$ par $1-p$, les formules (2) deviennent

$$1 > \frac{\mu - m}{m+1} \frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad 1 > \frac{m}{\mu - m + 1} \frac{1-p}{p},$$

ou bien, par des transformations fort simples :

$$m > p(\mu+1) - 1 \qquad m < p(\mu+1)$$
$$\frac{m}{\mu+1} > p - \frac{1}{\mu+1} \qquad \frac{m}{\mu+1} < p$$
$$\frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} > p - \frac{1}{\mu-1} \qquad \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} < p$$
$$\frac{m}{\mu} > p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{\mu+1} \qquad \frac{m}{\mu} < p + \frac{m}{\mu(\mu+1)}.$$

Il en résulte que

$$\frac{m}{\mu} = p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \delta,$$

$\delta$ étant $< \frac{1}{\mu+1}$; et, par suite, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$ :

$$\frac{m}{\mu} = p \quad \text{ou} \quad m = \mu p.$$

2° *Éliminons* m *et* p.

Des transformations analogues à celles des formules (2) nous conduiront à

$$\frac{n}{\mu} < q + \frac{n}{\mu(\mu+1)}; \qquad \frac{n}{\mu} > q + \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \frac{\mu}{\mu+1};$$

d'où il résulte que

$$\frac{n}{\mu} = q + \frac{n}{\mu(\mu-1)} + \delta',$$

$\delta'$ étant $< \frac{1}{\mu+1}$; ou, en négligeant le terme de l'ordre $\frac{1}{\mu}$ :

$$\frac{n}{\mu} = q \quad \text{ou} \quad n = \mu q.$$

51. Appelons G la valeur maximum de $T_n$; nous l'obtiendrons en faisant, dans l'expression $T_n$,

$$\frac{\mu p}{m} = 1, \qquad \frac{\mu q}{n} = 1,$$

ce qui donne :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

par suite

$$T_n = G\left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

et de même

$$T^{n-l} = G\left(\frac{\mu p}{m}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{m}}\right)^{m+l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu q}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{n}}\right)^{n-l+\frac{1}{2}}.$$

Désignons par $G_{n-l}$ la valeur que prend $T_{n-l}$ pour $m = \mu p$, $n = \mu q$, nous aurons

$$G_{n-l} = G\left(1 + \frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}}.$$

Développons les puissances qui entrent dans le second membre :

$$\left(1 + \frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)1.\left(1+\frac{l}{m}\right)} = e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{m}-\frac{l^2}{2m^2}+\frac{l^3}{3m^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{\frac{-ml-l^2-\frac{1}{2}l}{m} + \frac{ml^2+l^3+\frac{1}{2}l^2}{2m^2} - \frac{ml^3+l^4+\frac{1}{2}l^3}{3m^3}+\cdots}$$

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)1.\left(1-\frac{l}{n}\right)} = e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{n}-\frac{l^2}{2n^2}-\frac{l^3}{3n^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{-\frac{-nl+l^2-\frac{1}{2}l}{n} - \frac{-nl^2+l^3-\frac{1}{2}l^2}{2n^2} - \frac{-nl^3+l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}.$$

Substituant ces expressions dans celle de $G_{n-l}$, nous aurons :

$$G_{n-l} = Ge^{-\frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

$$= G\left\{1 - \frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}\right\}.$$

Si nous changeons le signe de $l$, nous trouverons l'expression de $G_{n+l}$; et, en ajoutant les deux expressions, nous aurons :

$$G_{n-l} + G_{n+l} = G\left\{2 - \frac{2l^2}{2m} - \frac{2l^2}{2n}\right\}$$

$$= 2G\left\{1 - \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= 2G\left\{1 - \frac{l^2\mu}{2mn}\right\} = 2Ge^{-\frac{\mu l^2}{2mn}} = 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}.$$

Désignons par $\varphi(l)$ l'expression

$$G_{n-l} + G_{n+l} = 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}},$$

et par $g$ la fraction

$$\frac{\mu}{2mn} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\mu pq};$$

il s'ensuivra

$$G = \frac{1}{2}\varphi(0) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

et

$$\varphi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g}.$$

La probabilité P que $m$ est compris entre $\mu p \pm l$ sera :

$$\begin{aligned} P &= G_{n-l} + G_{n-l+1} + \cdots + G_{n-1} + G + G_{n+1} + \cdots + G_{n+l-1} + G_{n+l} \\ &= G_{n+l} + G_{n-l} + \sum_{l=0}^{l=l-1} [G_{n+l} + G_{n-l}] - G \\ &= \varphi(l) + \sum_{0}^{l} \varphi(l) - \frac{1}{2}\varphi(0). \end{aligned}$$

Or on a, en général (*), par la formule sommatoire d'Euler :

$$\sum \varphi(l) = \frac{1}{h}\int \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{B_1 h^2 \varphi'(l)}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1..4}\varphi^{(1)}(l) + \cdots$$

Donc, en faisant $h = 1$, et remarquant que, $g = \frac{\mu}{2mn}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\mu}$, on peut négliger les termes $\varphi'(l)$, $\varphi'''(l)$, etc., puisque

$$\varphi'(l) = -\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} gle^{-l^2 g},$$

on aura :

$$\sum \varphi(l) = \int \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l),$$

et par suite

$$\sum_{0}^{l} \varphi(l) = \int_{0}^{l} \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\varphi(l) - \varphi(0)].$$

(*) Voir pour cette formule, comme pour la précédente, le calcul aux différences. — Lacroix, *Grand Traité*, 2me édit., t. III, pp. 98 et suivantes.

En substituant dans l'expression de P, on trouvera

$$P = \int_0^l \varphi(l)\,dl + \frac{1}{2}\varphi(l)$$

$$= \int_0^l \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g} dl + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g}.$$

Posons $l^2 g = \gamma^2$, d'où

$$l = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \gamma\sqrt{2\mu pq};\quad dl = \frac{d\gamma}{\sqrt{g}},$$

l'expression précédente deviendra

$$P = \int_0^\gamma \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2} \frac{d\gamma}{\sqrt{g}} + \frac{e^{-l^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

probabilité que le nombre $m$ des répétitions de A est compris entre

$$\mu p \pm l = \mu p \pm \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \mu p \pm \gamma\sqrt{2\mu pq};$$

ou que $\frac{m}{\mu}$ est compris entre

$$p \pm \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

52. Première remarque. De ce que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\gamma + \int_\gamma^\infty,$$

d'où

$$\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

il en résulte :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right\} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Pour l'évaluation de $\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}dt$, on peut se servir, soit de la table de Kramp, soit de la série

$$\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1.3}{2^2\gamma^4} - \frac{1.3.5}{2^3\gamma^6} + \cdots\right]$$

qui se trouve en partant de

$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n}} = \int \frac{1}{t^{2n+1}} e^{-t^2} t\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n+2}},$$

et en faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3$, etc., ce qui donne

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{dt}$$
$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^3} - \frac{3}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4}$$
$$\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^4} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^5} - \frac{5}{2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6}, \text{ etc.};$$

d'où, par des substitutions successives :

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{2^2t^4}\right] - \frac{1.3.5}{2^3}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6}, \text{ etc.}$$

En poursuivant, le reste disparaîtra pour $n = \infty$, et l'on pourra écrire

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \cdots\right] + \text{C}^{\text{te}};$$

et par suite, puisque tous les termes disparaissent pour $t = \infty$ :

$$\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left[1 - \frac{1}{2\gamma^3} + \frac{1.3}{2^2\gamma^4} - \cdots\right].$$

Deuxième remarque. 1° Si $\gamma$, et par suite P, restent constants, les limites se resserrent de plus en plus à mesure que $\mu$ augmente;

2° Si les limites restent constantes, il faut que $\gamma$ augmente avec $\mu$, et par suite la probabilité approche de plus en plus de 1, ou de la certitude.

Ainsi donc :

1° Les limites $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$, entre lesquelles est compris le rapport inconnu du nombre des répétitions de A, en $\mu$ coups, au nombre total des coups, restant constantes, la probabilité P que $\frac{m}{\mu}$ tombera entre ces limites converge vers l'unité à mesure que le nombre des coups augmente;

2° La probabilité que ce rapport $\frac{m}{\mu}$ est toujours compris entre les limites $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ restant la même, la répétition indéfinie des coups resserrera de plus en plus ces limites.

Troisième remarque. Pour $P = \frac{1}{2}$, on trouve, par la table de Kramp ou par la série :

$$\gamma = 0{,}4765 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}};$$

car de

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

on tire

$$\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}},$$

ou

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1.2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}} \quad \ldots \quad (1)$$

or la valeur $a = 0{,}4765$ satisfait à

$$a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1.2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

de sorte que la formule (1) peut s'écrire

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1.2} - \cdots = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1.2} - \cdots - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}}.$$

Comme $\gamma$ différera très-peu de $a$, nous pourrons négliger les puissances supérieures et poser approximativement $e^{-\gamma^2} = 1$; nous aurons ainsi

$$\gamma = a - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}} = 0{,}4765 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}},$$

c'est-à-dire qu'il y aura une probabilité $P = \frac{1}{2}$ que $\frac{m}{\mu}$ est compris entre

$$p \pm \left[0{,}4765\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} - \frac{1}{2\mu}\right].$$

55. Quatrième remarque. Valeurs de P pour différentes valeurs de $\gamma$ :

$\gamma = 1$, $P = 1 - 0{,}2594460$
$\gamma = 2$, $P = 1 - 0{,}0052387$
$\gamma = 3$, $P = 1 - 0{,}00002207$
$\gamma = 4$, $P = 1 - 0{,}000000014$
$\gamma = 5$, $P = 1 - 0{,}0000000000015$

De sorte que, pour $\gamma \geqq 5$, on peut prendre $P = 1$.

Cinquième remarque. Si deux événements A et B ont la même probabilité $p = q = \frac{1}{2}$, il sera également probable que la différence $m - n$ entre les nombres de fois qu'ils arrivent en $\mu$ épreuves sera plus grande ou plus petite que

$$0{,}6739\sqrt{\mu} - 1.$$

Car P est la probabilité que $\frac{m}{\mu} - p$ est compris entre $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$
ou que $\frac{n}{\mu} - q$ . . . . . ;
ou bien encore la probabilité que la différence

$$\frac{m}{\mu} - p - \left(\frac{n}{\mu} - q\right)$$

est comprise entre

$$\pm 2\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}},$$

ou que :

$$(p-q)\mu - 2\gamma\sqrt{2\mu pq} < m - n < (p-q)\mu + 2\gamma\sqrt{2\mu pq}.$$

Posons

$$P=\frac{1}{2},\quad \text{donc}\quad \gamma=0{,}4765-\frac{1}{\sqrt{2\mu}},\quad \text{et}\quad p=q=\frac{1}{2};$$

cette inégalité deviendra

$$-\left(\frac{0{,}6759}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\mu}\right)<\frac{m-n}{\mu}<\frac{0{,}6759}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\mu};$$

ou

$$-(0{,}6759\sqrt{\mu}-1)<m-n<0{,}6759\sqrt{\mu}-1.$$

Comme nous avons posé $P=\frac{1}{2}$, il est également probable que $m-n$ est plus grand ou plus petit que $0{,}6759\sqrt{\mu}-1$.

### Exemples du théorème de Bernouilli.

54. Premier exemple. *Les chances favorables aux naissances des garçons et des filles étant dans le rapport de 18 à 17, s'il naît 14,000 enfants pendant une année, quelle sera la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363 et ne sera pas moindre que 7037 ?*

(*A*) Marche du calcul : Nous avons trouvé

$$P=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\gamma}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{\mu}\,e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}}$$

pour la probabilité que $m-l<m'<m+l$;
$\gamma$ étant égal à

$$\frac{l\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}};$$

d'où

$$\frac{\gamma}{l}=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}};\quad \lg\frac{\gamma}{l}=\frac{\lg\mu-(\lg m+\lg n+\lg 2)}{2}\quad .\quad .\quad (1)$$

$$\lg\gamma=\lg\frac{\gamma}{l}+\lg l;\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (2)$$

d'où l'on déduit $\gamma=\ldots$

Nous pourrons écrire la valeur de P sous la forme

$$P = 1 + \frac{\gamma}{l} \cdot \frac{e^{-\gamma^2}}{2\frac{\sqrt{\pi}}{2}} - \frac{\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$= 1 + N - M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Calculons

$$N = \frac{\gamma}{l} \cdot \frac{e^{-\gamma^2}}{2\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot$$

Or :

$$\lg e^{\gamma^2} = \gamma^2 \lg e;$$

d'où

$$\lg \lg e^{\gamma^2} = 2 \lg \gamma + \lg \lg e. \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

et de là on tire la valeur de $\gamma^2 \lg e$.

On a alors

$$\lg n = \lg \frac{\gamma}{l} + \lg e^{-\gamma^2} - \lg 2 - \lg \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \lg \frac{\gamma}{l} - \gamma^2 \lg e - \lg 2 - \lg \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \quad \ldots \quad (3)$$

on aura donc

$$N = \cdots; \quad \text{et} \quad 1 + N = \cdots$$

Calculons

$$M = \frac{\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\lg M = \lg \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt - \lg \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \quad \ldots \quad (4)$$

d'où l'on tire

$$M = \cdots$$

Or

$$1 + N = \cdots$$

d'où enfin

$$P = \cdots$$

(*B*). Données. $m$ chances favorables aux naissances des garçons,
$n$ » » » » des filles.

$$m + n = \mu = 14000$$
$$m : n = 18 : 17$$
$$m + n : m = 35 : 18$$
$$14000 : m = 35 : 18$$

d'où
$$m = 7200$$
$$n = 6800.$$

$$m + l = 7565. \quad l = 7565 - m = 165.$$

$\lg m = 3,85733.$ $\lg 2 = 0,30103.$
$\lg n = 3,83251.$ $\lg \sqrt{\pi} = 0,24857.$
$\lg l = 2,21219.$ $\lg \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \bar{1},94754.$
$\lg \mu = 4,14613.$ $\lg e = 0,43429.$
$\lg \lg e = \bar{1},63778.$

(C) Calcul effectif :

*Calcul de* 1 + N.

Formule 1).

| | |
|---|---|
| $\lg m =$ | 3,85733 |
| $\lg n =$ | 3,83251 |
| $\lg 2 =$ | 0,30103 |
| Somme = | 7,99087 |
| $\lg \mu =$ | 4,14613 |
| diff. = | $\bar{4}$,15526 |
| $\frac{1}{2}$ diff. = | $\bar{2}$,07763 $= \lg \frac{\gamma}{l}$ |

Formule 2).

| | |
|---|---|
| $\lg l =$ | 2,21219 |
| Somme = | 0,28982 $= \lg \gamma$; $\gamma = 1,949$ |
| | 2 |

Formule 2').

| | |
|---|---|
| $2 \lg \gamma =$ | 0,57964 |
| $\lg \lg e =$ | $\bar{1}$,63778 |
| Somme = | 0,21742 |
| $\gamma^2 \lg e =$ | 1,64980 |

Formule 3). $-\gamma^2 \lg e = \overline{2},55020$

$\lg \frac{\gamma}{l} = \overline{2},07763$

$- \lg 2 = -0,30103$

$-\lg \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\overline{1},94754$

$\lg N = \overline{4},17926$

$N = 0,00015$

$1 + N = 1,00015$

*Calcul de* M.

Formule 4) pour $\gamma = 1,950$ : $\lg \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt = \overline{3},71252$

donné par la table

diff. 0,001 0,00002

pour $\gamma = 1,949$ : » $= \overline{3},71250$

$\lg \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \overline{1},94754$

$\lg M = \overline{3},76496$

$M = 0,00582$

*Calcul de* P.

Formule (*a*) $1 + N = 1,00015$

$M = 0,00582$

$P = 0,99433$

## THÉORÈME DE POISSON.

### Généralisation du théorème de Bernouilli.

55. *Représentons par* $p_1 \dots p_\mu$ *les probabilités d'un événement* E *à la* $1^{re} \dots \mu^{me}$ *épreuve; par* $q_1 \dots q_\mu$ *les probabilités de l'événement contraire* F *à la* $1^{re} \dots \mu^{me}$ *épreuve. Supposons qu'en* $\mu = m + n$ *épreuves,* E *arrive* m *fois,* F n *fois; soient*

$$p = \frac{p_1 + \dots + p_\mu}{\mu}, \quad q = \frac{q_1 + \dots + q_\mu}{\mu};$$

*je dis : qu'il est à peu près certain que dans ce très-grand nombre $\mu$ d'épreuves on aura approximativement*

$$p = \frac{m}{\mu}, \quad q = \frac{n}{\mu};$$

*que ces égalités seront d'autant plus exactes que $\mu$ sera plus grand; et qu'elles subsistent rigoureusement pour $\mu = \infty$.*

*Démonstration.* La probabilité $U_i$ que E arrive $m$ fois, et F $n$ fois en $\mu$ épreuves est le coefficient de $u^m v^n$ dans l'expression (n° 15)

$$X = (p_1 u + q_1 v) \ldots (p_\mu + q_\mu v) = \Sigma U_i u^m v^n.$$

Posons

$$u = e^{x\sqrt{-1}}, \quad v = e^{-x\sqrt{-1}},$$

ce qui est permis puisque $U_i$ est indépendant de $u$ et de $v$; nous aurons :

$$X = \Sigma U_i e^{(m-n)x\sqrt{-1}} = \Sigma U_i e^{ix\sqrt{-1}},$$

en faisant $m - n = i$.

Développons l'expression de X, et cherchons l'intégrale de $Xe^{-ix\sqrt{-1}}dx$ entre les limites $\pm\pi$; nous aurons :

$$X = U_0 + U_1 e^{x\sqrt{-1}} + \cdots + U_i e^{ix\sqrt{-1}} + U_{i+1} e^{(i+1)x\sqrt{-1}} + \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Xe^{-ix\sqrt{-1}}dx = U_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sqrt{-1}}dx + U_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(i-1)x\sqrt{-1}}dx + \cdots$$

$$+ U_i \int_{-\pi}^{\pi} dx + U_{i+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\sqrt{-1}}dx + \cdots$$

Mais on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm mx\sqrt{-1}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx \pm \sqrt{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx = \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{\pi}$$

$$-\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi} \mp \left\{\left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{\pi} - \left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{-\pi}\right\} = \frac{2}{m}\sin m\pi \mp 0 = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi;$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} Xe^{-ix\sqrt{-1}}dx = 2\pi U_i,$$

d'où

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-ix\sqrt{-1}} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

*Détermination de* (A).

Reprenons l'expression de X :

$$\begin{aligned} X &= (p_1 u + q_1 v)(p_2 u + q_2 v) \dots (p_\mu u + q_\mu v) \\ &= \left(p_1 e^{x\sqrt{-1}} + q_1 e^{-x\sqrt{-1}}\right)\left(p_2 e^{x\sqrt{-1}} + q_2 e^{-x\sqrt{-1}}\right) \dots \\ &\quad \left(p_i e^{x\sqrt{-1}} + q_i e^{-x\sqrt{-1}}\right) \dots \left(p_\mu e^{x\sqrt{-1}} + q_\mu e^{-x\sqrt{-1}}\right) \\ &= \left[(p_1 + q_1)\cos x + \sqrt{-1}\,(p_1 - q_1)\sin x\right] \\ &\quad \left[(p_2 + q_2)\cos x + \sqrt{-1}\,(p_2 - q_2)\sin x\right] \dots \\ &\quad \left[(p_\mu + q_\mu)\cos x + \sqrt{-1}\,(p_\mu - q_\mu)\sin x\right]. \end{aligned}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} (p_i + q_i)\cos x &= \rho_i \cos \varphi_i \\ (p_i - q_i)\sin x &= \rho_i \sin \varphi_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

et rappelons-nous que $p_i + q_i = 1$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= \cos^2 x + (p_i - q_i)^2 \sin^2 x = \cos^2 x + \left[(p_i + q_i)^2 - 4 p_i q_i\right] \sin^2 x \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x - 4 p_i q_i \sin^2 x = 1 - 4 p_i q_i \sin^2 x. \quad . \quad . \quad . \quad (1) \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{p_i - q_i}{p_i + q_i} \operatorname{tg} x = (p_i - q_i) \operatorname{tg} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les formules (1) et (2) déterminent $\rho_i$ et $\varphi_i$.

Ces valeurs substituées dans l'expression X donneront

$$\begin{aligned} X &= \rho_1 (\cos \varphi_1 + \sqrt{-1} \sin \varphi_1) \rho_2 (\cos \varphi_2 + \sqrt{-1} \sin \varphi_2) \dots \\ &\quad \rho_\mu (\cos \varphi_\mu + \sqrt{-1} \sin \varphi_\mu) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_\mu e^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_\mu)\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \dots \dots \rho_\mu &= Y \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_\mu &= y \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

nous aurons

$$X = Y e^{y\sqrt{-1}};$$

et, en substituant cette valeur dans l'expression (A) :

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{y\sqrt{-1}}\, e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{[y-(m-n)x]\sqrt{-1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx.$$

Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} = -\int_{0}^{-\pi} + \int_{0}^{\pi};$$

mais la formule (2) montre que $\varphi_i$ change de signe avec $x$; il en est donc de même de $y = \Sigma\varphi_i$, tandis que Y ne change pas de signe; on peut donc écrire :

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = \int_{0}^{\pi} Y\sin[-y+(m-n)x]\,dx$$
$$+\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = -\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx$$
$$+\int_{0}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx = 0.$$

Par suite

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx.$$

1° *Détermination de* Y.

Nous avons posé

$$Y = \rho_1\rho_2\ldots\rho_\mu = \sqrt{1-4p_1q_1\sin^2x}\sqrt{1-4p_2q_2\sin^2x}\ldots\sqrt{1-4p_\mu q_\mu\sin^2x}.$$

Chaque facteur étant $< 1$, Y lui-même est à plus forte raison $< 1$, et n'a de valeur sensible que si $x$ est très-petit; si donc nous négligeons les termes du quatrième ordre, nous aurons

$$\rho_i = \sqrt{1-4p_iq_i\sin^2x} = \sqrt{1-4p_iq_ix^2} = 1-2p_iq_ix^2$$
$$\text{l. }\rho_i = \text{l. }(1-2p_iq_ix^2) = -2p_iq_ix^2;$$

et par suite :

$$\text{l. Y} = \Sigma \text{l. } \rho_i = -x^2 \Sigma p_i q_i.$$

Posons

$$\Sigma 2 p_i q_i = 2 (p_1 q_1 + p_2' q_2 + \cdots + p_\mu' q_\mu) = \mu k^2; \quad . \quad . \quad (c)$$

nous aurons

$$\text{l. Y} = -x^2 \mu k^2;$$

d'où enfin, en faisant $\mu x^2 = z^2$, $x = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$ :

$$\text{Y} = e^{-k^2 z^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2° *Détermination de* y.

Nous avons posé :

$$y = \Sigma \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\mu ;$$

et

$$\sin \varphi_i = \frac{p_i - q_i}{\rho_i} \sin x = (p_i - q_i) \left( x - \frac{x^3}{6} \right) [1 - 2 p_i q_i x^2]^{-1}$$

$$= (p_i - q_i) \left( x - \frac{x^2}{6} \right) (1 + 2 p_i q_i x^2)$$

$$= (p_i - q_i)\, n + (p_i - q_i) \left( 2 p_i q_i - \frac{1}{6} \right) x^2 = \omega ,$$

d'où

$$\varphi_i = \text{arc sin } \omega = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} = \int (1 - \omega)^{-\frac{1}{2}} d\omega = \int \left( 1 + \frac{\omega^2}{2} \right) d\omega = \omega + \frac{\omega^3}{6}$$

$$= (p_i - q_i)\, x + (p_i - q_i) \left( 2 p_i q_i - \frac{1}{6} \right) x^3 + \frac{1}{6} [(p_i - q_i)\, x + \cdots]^3$$

$$= (p_i - q_i)\, x + \left[ (p_i - q_i) \left( 2 p_i q_i - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{6} (p_i - q_i)^3 \right] x^3 ,$$

ou bien, en remplaçant comme plus haut $(p_i - q_i)^2$ par $1 - 4 p_i q_i$ :

$$\varphi_i = (p_i - q_i)\, x + (p_i - q_i) \left[ 2 p_i q_i - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} (1 - 4 p_i q_i) \right] x^3$$

$$= (p_i - q_i)\, x + \frac{4}{3} p_i q_i (p_i - q_i)\, x^3.$$

Nous aurons par suite :

$$y = \Sigma \varphi_i = x \Sigma (p_i - q_i) + x^3 \Sigma \frac{4}{3} p_i q_i (p_i - q_i).$$

Or

$$\Sigma p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = \mu p,$$
$$\Sigma q_i = q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu = \mu q.$$

Si nous posons en outre

$$\sum \frac{4}{3} p_i q_i (p_i - q_i) = \mu h,$$

nous aurons

$$y = \mu x (p - q) + x^3 \mu h,$$

et, en remplaçant $x$ par $\frac{r}{\sqrt{\mu}}$

$$y = (p - q)\sqrt{\mu} \cdot z + \mu h \frac{x^3}{(\sqrt{\mu})^3}$$
$$= (p - q)\sqrt{\mu} \cdot z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}.$$

Cette valeur de $y$ doit être substituée dans l'expression

$$U_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y \cos\left[y - (m - n)n\right] dx.$$

Si nous remplaçons en outre $x$ par $\frac{z}{\sqrt{\mu}}$, nous trouverons :

$$y - (m - n)x = (p - q)\sqrt{\mu} \cdot z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}} - (m - n)\frac{z}{\sqrt{\mu}}$$
$$= \left[p - q - \left(\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu}\right)\right] z\sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}$$
$$= gz\sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}},$$

en posant :

$$g = p - \frac{m}{\mu} + \frac{n}{\mu} - q = p - \frac{m}{\mu} + \left(p - \frac{m}{\mu}\right) = 2\left(p - \frac{m}{\mu}\right) = 2\left(\frac{n}{\mu} - q\right),$$

d'où

$$m = \mu p - \frac{\mu g}{2}; \quad n = \mu q + \frac{\mu g}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Si nous substituons les valeurs qui précèdent, ainsi que celle de Y donnée par la formule (3) dans l'expression de $U_i$, et si

nous observons qu'à la limite $\frac{\pi}{2}$ de $x$ correspond celle $\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}$ de $z$, nous aurons :

$$U_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2}\cos\left(gz\sqrt{\mu}+\frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}\right)\frac{dz}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2}\cos\left[z\sqrt{\mu}(g+hx^2)\right]dz$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2}\left[\cos(z\sqrt{\mu}g).\cos(z\sqrt{\mu}hx^2)\right.$$

$$\left.-\sin(z\sqrt{\mu}g)\sin(z\sqrt{\mu}hx^2)\right]dz,$$

ou, en négligeant comme plus haut, les puissances de $x$ à partir de la $4^e$ :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2}\left[\cos(z\sqrt{\mu}g)-\sin(z\sqrt{\mu}g)\cdot z\sqrt{\mu}hx^2\right]dz$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2z^2}\left[\cos(gz\sqrt{\mu})-\frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}\sin(gz\sqrt{\mu})\right]dz.$$

On suppose que $p_i$ et $q_i$ ne convergent ni vers zéro ni vers l'unité, de sorte que $k^2 = \frac{2\Sigma p_i q_i}{\mu}$ n'est pas très-petit, quoique $\mu$ soit très-grand.

Si l'on prend $z > \sqrt{\mu}$, $e^{-k^2z^2}$ aura une valeur insensible, et par suite on pourra poser

$$\int_{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}}^{\infty} e^{-k^2z^2}dz = 0.$$

Cela étant, nous pourrons étendre les limites de l'intégrale précédente de 0 à $\infty$, ce qui donnera :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\infty} e^{-k^2z^2}\cos(gz\sqrt{\mu}\,dz - \frac{2h}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\infty} e^{-k^2z^2}.z^3\sin(gz\sqrt{\mu})dz.$$

*Déterminons les valeurs de ces deux intégrales.*

Nous savons que

$$1^\circ \qquad \int_0^\infty e^{-k^2z^2}\cos gz\sqrt{\mu}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}\,e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Dérivant par rapport à $g$, nous aurons :

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2}\cos gz\sqrt{\mu}\,dz = g\,\frac{\sqrt{\mu\pi}}{4k^3}\,e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Dérivant par rapport à $k$ :

$$\int_0^\infty e^{-k^2z^2}z^3\sin gz\sqrt{\mu}\,dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{4}\left(-\frac{3}{k^4}+\frac{\mu g^2}{4}\cdot\frac{2}{k^6}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}};$$

d'où l'on tire :

$$2^\circ \qquad \int_0^\infty e^{-k^2z^2}z^3\sin\left(gz\sqrt{\mu}\right)dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Substituant ces deux expressions dans celle de $U_i$, nous aurons :

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\,e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}} - \frac{2h}{\pi\sqrt{\mu}}\,\frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}$$

$$= \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{gh}{4k^5\sqrt{\mu\pi}}\left(3-\frac{\mu g^2}{2k^2}\right)\right]e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Posons

$$\frac{\mu g^2}{4k^2} = \theta^2, \quad \text{d'où} \quad g = \frac{2k\theta}{\sqrt{\mu}},$$

nous aurons :

$$U_i = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{h\theta}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}\left(5-2\theta^2\right)\right]e^{-\theta^2},$$

probabilité que E arrive $m = \mu p - \frac{\mu g}{2} = \mu p - k\theta\sqrt{\mu}$ fois,

et que F arrive $n = \mu q + \frac{\mu g}{2} = \mu q + k\theta\sqrt{\mu}$ fois.

Première remarque. Si $\theta = 0$, on a

$$U_i = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}},$$

valeur maximum de $U_i$ :
probabilité que E arrive $m = \mu p$ fois,
et que F arrive $n = \mu q$ fois;
d'où $m : n = p : q$.

Deuxième remarque. Cherchons la probabilité que

$$\text{E arrive } m = \mu p \pm kt\sqrt{\mu} \text{ fois,}$$

et que

$$\text{F arrive } n = \mu q \pm kt\sqrt{\mu} \text{ fois.}$$

Soit $\theta$ successivement égal à $-t$ et à $+t$, $t$ étant un multiple de $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$; on aura :

$$U_{-t} + U_t = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} + \frac{ht}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2) + \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{ht}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2)\right]e^{-t^2}$$
$$= \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-t^2};$$

probabilité que $m$ sera l'un des deux nombres $\mu p \pm kt\sqrt{\mu}$,
et que $n$ » » » $\mu q \pm kt\sqrt{\mu}$.

Troisième remarque. Cherchons la probabilité que $m$ et $n$ sont compris entre les limites

$$\mu p \pm uk\sqrt{\mu} \text{ et } \mu q \pm uk\sqrt{\mu}.$$

Posons

$$\delta = \frac{1}{k\sqrt{\mu}}, \quad t = i\delta, \quad u = l\delta.$$

$U_0 = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}$ sera la probabilité que $m = \mu p$, $n = \mu q$

$U_{-\delta} + U_\delta = \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-\delta^2}$ » » $m = \mu p \mp \delta k\sqrt{\mu}$,
$n = \mu q \pm \delta k\sqrt{\mu}$;

$U_{-2\delta} + U_{2\delta} = \dfrac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(2\delta)^2}$ sera la probabilité que $m = \mu p \mp 2\delta k\sqrt{\mu}$, $n = \mu q \pm 2\delta k\sqrt{\mu}$

$U_{-i\delta} + U_{i\delta} = \dfrac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(i\delta)^2}$ » » $m = \mu p \mp i\delta k\sqrt{\mu}$, $n = \mu q \pm i\delta k\sqrt{\mu}$

$U_{-l\delta} + U_{l\delta} = \dfrac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(l\delta)^2}$ » » $m = \mu p \mp l\delta k\sqrt{\mu}$, $n = \mu q \pm l\delta k\sqrt{\mu}$.

Soit P la somme de ces termes : nous aurons, en remplaçant $i\delta$ par $t$ :

$$P = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} + \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} \sum_{\delta}^{u} e^{-t^2},$$

probabilité que $m$ sera entre $\mu p - uk\sqrt{\mu}$ et $\mu p + uk\sqrt{\mu}$.

Or

$$\sum_{\delta}^{u} e^{-t^2} = \sum_{\delta}^{\infty} e^{-t^2} - \sum_{u}^{\infty} e^{-t^2};$$

mais comme $\delta$ est très-petit, et que $\sum_{0}^{\infty} = \sum_{0}^{\delta} + \sum_{\delta}^{\infty}$, on peut remplacer $\sum_{\delta}^{\infty}$ par $\sum_{0}^{\infty}$ et l'on obtient

$$\sum_{\delta}^{u} e^{-t^2} = \sum_{0}^{\infty} e^{-t^2} - \sum_{u}^{\infty} e^{-t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

Par la formule sommatoire d'Euler, on a (n° 51, p. 87) :

$$\sum_{u}^{\infty} e^{-t^2} = \frac{1}{\delta} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} e^{-u^2} - \frac{1}{6} \delta u e^{-u^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\delta} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} e^{-u^2}.$$

Pour $u = 0$, on aura

$$\sum_{0}^{\infty} e^{-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \sqrt{\pi} - \frac{1}{2};$$

et par suite la formule $(a')$ deviendra :

$$\sum_{\delta}^{u} e^{-t^2} = \frac{1}{2\delta} \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} e^{-u^2};$$

substituant cette valeur dans l'expression de P, et remplaçant $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ par $\delta$, on aura :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}dt + \frac{1}{2}e^{-u^2}\right\} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt + \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt + \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-u^2}. \end{aligned}$$

Quatrième remarque. Comme nous avons posé

$$k^2 = \sum \frac{2p_iq_i}{\mu},$$

si $p_i$ et $q_i$ sont des constantes, que nous désignerons par $p$ et $q$, on aura

$$k^2 = 2pq, \quad k = \sqrt{2pq},$$

et la dernière formule coïncide avec celle du théorème de Bernouilli.

Cette dernière formule exprime la probabilité P, que

$$\mu p - l\delta k\sqrt{\mu} < m < \mu p + l\delta k\sqrt{\mu}$$

et que

$$\mu q - l\delta k\sqrt{\mu} < n < \mu q + l\delta k\sqrt{\mu};$$

ou bien, en remplaçant $\delta$ par sa valeur $\frac{k\sqrt{\mu}}{1}$, P sera la probabilité que

$$\begin{cases} \mu p - l < m < \mu p + l \\ \mu q - l < n < \mu q + l \end{cases}$$

ou bien, en posant $\frac{l}{\mu} = \lambda$, P sera la probabilité que

$$\begin{cases} p - \lambda < \frac{m}{\mu} < p + \lambda \\ q - \lambda < \frac{n}{\mu} < q + \lambda. \end{cases}$$

**Problème de Poisson.**

56. *Une chose* A *est susceptible de toutes les valeurs possibles entre* a *et* b; *les probabilités de ces valeurs sont différentes entre elles pour la même épreuve, et diffèrent de plus d'une valeur à la suivante : après* $\mu$ *épreuves, chercher* 1° *la probabilité* P *que la somme des valeurs de* A *sera une quantité donnée* S; 2° *la probabilité* $\Pi$ *que cette somme sera comprise entre deux limites.*

Solution. Soit

$$\alpha dz = a \text{ et } \beta dz = b;$$

les valeurs possibles de A seront

$$\alpha dz,\ (\alpha + 1)dz \ldots ndz, \ldots\ldots (\beta - 1)dz,\ \beta dz.$$

Soient maintenant respectivement

$$p_1^{(\alpha)}, p_1^{(\alpha+1)}, \ldots\ldots p_1^{(n)} \ldots p_1^{(\beta-1)}, p_1^{(\beta)}$$
$$p_2^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha+1)}, \ldots\ldots p_2^{(n)} \ldots p_2^{(\beta-1)}, p_2^{(\beta)},$$
$$\text{etc.},$$

les probabilités de ces valeurs à la 1re, 2e, etc. épreuve.

Si nous faisons $S = mdz$, et

$$X = \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_1^{(n)} t^{ndz} \cdot \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_2^{(n)} t^{ndz} \ldots \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_\mu^{(n)} t^{ndz} = \Sigma U_m t^{mdz},$$

nous aurons $P = U_m$.

$U_m$ étant indépendant de $t$, nous pouvons faire $t = e^{x\sqrt{-1}}$, $x$ étant fini, et si, de plus, nous posons $ndz = z$, nous aurons

$$X = \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_1^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_2^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} \ldots \sum_{\alpha}^{\beta}{}_n p_\mu^{(n)} e^{zx\sqrt{-1}} = \Sigma U_m e^{mdzx\sqrt{-1}};$$

d'où nous déduirons par le procédé connu :

$$P = U_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-mdzx\sqrt{-1}} d(xdz) \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

La probabilité que la somme $S = mdz$ sera comprise entre deux limites $i$ et $i'$ sera donc

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X d(xdz) . \sum_{i}^{i'}{}_{m} e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Transformons l'expression sommatoire qui précède ; nous pouvons l'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i}^{i'}{}_{m} e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} &= e^{-ixdz\sqrt{-1}} + e^{-(i+1)xdz\sqrt{-1}} + \cdots + e^{-i'xdz\sqrt{-1}} \\
&= e^{-ixdz\sqrt{-1}} \left\{ 1 + e^{-xdz\sqrt{-1}} + e^{-2xdz\sqrt{-1}} + \cdots + e^{-(i'-i)xdz\sqrt{-1}} \right\} \\
&= e^{-ixdz\sqrt{-1}} \frac{e^{-(i'-i+1)xdz\sqrt{-1}} - 1}{e^{-xdz\sqrt{-1}} - 1} = \frac{e^{-(i-1)xdz\sqrt{-1}} - e^{-i'xdz\sqrt{-1}}}{e^{xdz\sqrt{-1}} - 1} \\
&= e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} \frac{e^{-(i-1)xdz\sqrt{-1}} - e^{-i'xdz\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2 \sin \frac{1}{2}(xdz)} \left\{ e^{-\left(i'+\frac{1}{2}\right)xdz\sqrt{-1}} - e^{-\left(i-\frac{1}{2}\right)xdz\sqrt{-1}} \right\} .
\end{aligned}$$

Puisque $x$ est fini, nous pouvons poser

$$\sin \frac{1}{2}(xdz) = \frac{1}{2} xdz ; \text{ et } e^{\pm\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} = 1 ;$$

de sorte que la valeur précédente devient :

$$\sum_{i}^{i'}{}_{m} e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{xdz} \left\{ e^{-i'xdz\sqrt{-1}} - e^{-ixdz\sqrt{-1}} \right\} .$$

Si nous substituons cette valeur dans la formule $(b)$, en observant que

$$\frac{d(xdz)}{xdz} = \frac{dx}{x},$$

et qu'aux limites $\pm\pi$ de $xdz$ répondent celles

$$\pm \frac{\pi}{dz} = \pm \infty \text{ de } x,$$

et si nous faisons $i' = c + \varepsilon$, $i = c - \varepsilon$, cette formule deviendra

$$\Pi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}} \left[ e^{-\varepsilon z \sqrt{-1}} - e^{\varepsilon z \sqrt{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

probabilité que la somme $S = mdz$ des valeurs de A, après $\mu$ épreuves, sera comprise entre les limites $c + \varepsilon$, $c - \varepsilon$.

Cherchons l'expression de X.

La probabilité $p_i^{(n)}$ de la valeur $ndz = z$ de A, à la $i^{me}$ épreuve est une fonction de $z$ infiniment petite, attendu que le nombre des valeurs possibles de A est infiniment grand; on peut donc poser :

$$p_i^{(n)} = f_i(z)\,dz,$$

et par suite

$$\sum_{\alpha}^{\beta}{}_n\, p_i^{(n)} e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}},$$

et

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1.$$

On aura donc

$$X = \int_a^b f_1(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}} \cdot \int_a^b f_2(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \ldots \int_a^b f_u(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \quad . \quad (d)$$

Or de ce que

$$\int_a^b f_i(z)\,dz e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz \cos xz + \sqrt{-1} \int_a^b f_i(z)\,dz \sin xz, \quad (e)$$

et qu'en outre

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1,$$

d'où résulte également

$$\int_a^b f_i(z)\,dz \cos(xz) < 1, \int_a^b f_i(z)\,dz \sin(xz) < 1,$$

il s'ensuit que nous pourrons poser

$$\int_a^b f_i(z)\,dz\,e^{xz\sqrt{-1}} = \rho_i \cos\varphi_i + \sqrt{-1}\,\rho_i \sin\varphi_i = \rho_i e^{\varphi_i\sqrt{-1}}; \quad (f)$$

de sorte que l'expression de X devient

$$X = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_\mu \left\{ \cos \sum_1^\mu \varphi_i + \sqrt{-1} \sin \sum_1^\mu \varphi_i \right\}.$$

Posons

$$\rho_1\rho_2 \ldots \rho_\mu = Y; \quad \sum_1^\mu \varphi_i = y,$$

nous aurons

$$X = Y(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = Ye^{y\sqrt{-1}};$$

et substituant cette expression dans celle de Π :

$$\Pi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ye^{(y-cx)\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Mais des formules $(e)$ et $(f)$ il est facile de déduire que $\rho_i$ et par suite Y, ne change pas de signe avec $x$, tandis que $\varphi_i$, et par suite $y$, change de signe.

Ces formules donnent en effet

$$\rho_i^2 = \left[\int_a^b f_i z\,dz \cos zx\right]^2 + \left[\int_a^b f_i z\,dz \sin zx\right]^2$$

et

$$tg\ \varphi_i = \frac{\int_a^b f_i z\,dz \sin zx}{\int_a^b f_i z\,dz \cos zx}.$$

Il résulte de là que la formule $(g)$ peut s'écrire :

$$\Pi = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Y \cos(y - cx) \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}. \quad (h)$$

Pour effectuer l'intégration, nous avons à déterminer des valeurs approchées de Y et $y$.

Calculons ces valeurs.

1° *Calcul de* Y.

Il est manifeste d'abord que $\rho_i$ est $< 1$. Car

$$\rho_i^2 = \left(\int_a^b f_i(z)\, d\,.\cos zx\right)^2 + \left(\int_a^b f_i(z)\, d\,.\sin zx\right)^2$$

$$= \int_a^b f_i(z)\, d.\cos zx \int_a^b f_i(z')d.\cos z'x + \int_a^b f_i(z)d.\sin zx \int_a^b f_i(z')d.\sin z'x =$$

$$= \int_a^b \int_a^b f_i(z)\, f_i(z')\cos x\,(z - z')\, dzdz' < \int_a^b \int_a^b f_i(z)\, f_i(z')\, dzdz'$$

$$< \int_a^b f_i(z)\, dz < \int_a^b f_i(z')\, dz' < 1.$$

Ensuite, pour $x = 0$, on a $\rho_i = 1$.

De là résulte que $Y = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_\mu$ n'a de valeur sensible que quand $x$ est très-petit, et qu'on peut en conséquence négliger les puissances supérieures de $x$ à partir de la quatrième, et écrire :

$$\cos zx = 1 - \frac{z^2x^2}{2}; \quad \sin zx = zx - \frac{z^3x^3}{6};$$

d'où

$$\rho_i \cos\varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \cos zx = \int_a^b f_i(z)\, dz \left(1 - \frac{z^2x^2}{2}\right) = \int_a^b f_i(z)\, dz$$

$$- \int_a^b f_i(z)\, dz \frac{x^2z^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}\int_a^b z^2 f_i(z)\, dz = 1 - \frac{x^2}{2} k_i',$$

en posant :

$$k_i' = \int_a^b z^2 f_i(z)\, dz.$$

$$\rho_i \sin\varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \sin zx = \int_a^b f_i(z) dz \left(xz - \frac{x^3z^3}{6}\right) = x\int_a^b z f_i(z)\, dz$$

$$- \frac{x^3}{6}\int_a^b z^3 f_i(z)\, dz = xk_i - \frac{x^3}{6} k_i'',$$

en posant :

$$k_i = \int_a^b z f_i(z)\, dz; \quad k_i'' = \int_a^b z^3 f_i(z)\, dz.$$

De là nous tirons :

$$\rho_i^2 \cos^2 \varphi_i = 1 - x^2 k_i', \quad \text{et} \quad \rho_i^2 \sin^2 \varphi_i = x^2 k_i^2;$$

et en ajoutant :

$$\rho_i^2 = 1 - (k_i' - k_i^2)\, x^2 = 1 - 2h_i x^2,$$

en posant

$$k_i' - k_i^2 = 2h_i.$$

Prenons le logarithme des deux membres :

$$2 \text{ l. } \rho_i = \text{l. } (1 - 2h_i x^2) = -2h_i x^2; \quad \text{l. } \rho_i = -k_i x^2;$$

d'où

$$\text{l. Y} = \sum_1^{\mu} \text{l. } \rho_i = -x^2 \sum_1^{\mu} h_i.$$

Faisons

$$\sum_1^{\mu} h_i = \mu . h, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{h_1 + \cdots + h_\mu}{\mu},$$

nous aurons

$$\text{Y} = e^{-\mu h x^2},$$

et par suite

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \cos (y - cx) \frac{dx}{x} \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

2° *Calcul de* $\varphi_i$ et de $y$.

Nous avons

$$\rho_i \sin \varphi_i = \int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz = xk_i - \frac{x^3}{6} k_i'';$$

d'où

$$\sin \varphi_i = \frac{xk_i - \frac{x^3}{6} k_i''}{\rho_i} = \left(xk_i - \frac{x^3}{6} k_i''\right)(1 + h_i x^2)$$

$$= \left(xk_i - \frac{x^3}{6} k_i''\right)\left(1 + \frac{k_i' - k_i^2}{2} x^2\right) = xk_i - \left(\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i' k_i}{2} + \frac{k_i^3}{2}\right) x^3 .$$

Posons $\sin \varphi_i = \nu$; d'où

$$\varphi_i = \arc\sin \nu = \int \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = \int d\nu \left(1 + \frac{\nu^2}{2}\right) = \nu + \frac{\nu^3}{2} = \sin \varphi_i + \frac{1}{6}\sin^3 \varphi_i$$

$$= xk_i - \left[\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i' k_i}{2} + \frac{k_i^3}{2}\right] x^3 + \frac{1}{6} x^3 k_i^3$$

$$= xk_i - \left[\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i' k_i}{2} + \frac{k_i^3}{3}\right] x^3 = xk_i - x^3 g_i,$$

en posant

$$\frac{k_i''}{6} - \frac{k_i' k_i}{2} + \frac{k_i^3}{3} = g_i.$$

Soient de plus

$$\sum_1^\mu k_i = \mu k; \quad \sum_1^\mu g_i = \mu g;$$

nous aurons

$$y = \sum_1^\mu \varphi_i = x \sum_1^\mu k_i - x^3 \sum_1^\mu g_i = \mu k x - \mu g x^3;$$

donc

$$y - cx = (\mu k - c)x - \mu g x^3;$$

et

$$\cos(y - cx) = \cos(\mu k - c)x \cos \mu g x^3 + \sin(\mu k - c)x \sin \mu g x^3$$
$$= \cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x,$$

en négligeant toujours les puissances de $x$ à partir de la 4e.

Substituant dans la dernière expression de $\Pi$, nous aurons

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x} \left\{ \cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x \right\} : \quad (l)$$

probabilité que S est compris entre $c \pm \varepsilon$.

Si nous posons $c = \mu k$, nous aurons :

$$\Pi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \frac{dx}{x} : \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

probabilité que la somme S des valeurs de A en $\mu$ épreuves est comprise entre $\mu k \pm \varepsilon$.

Pour intégrer cette expression, posons

$$\xi^2 = \mu h x^2; \quad d\xi = \sqrt{\mu h}\, dx; \quad \varepsilon x = \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}};$$

nous aurons

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin\frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}}\frac{d\xi}{\xi} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

Partons de la formule connue

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{a^2}{4\mu h}};$$

multiplions par $\frac{da}{\sqrt{\mu h}}$ et intégrons entre les limites $a = \left\{{}^{\varepsilon}_{0}\right.$, nous aurons :

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty \cos\frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}}\frac{da}{\sqrt{\mu h}};$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}}\frac{da}{\sqrt{\mu h}};$$

ou bien, en remplaçant

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}}\cdot\frac{\cos a\xi}{\sqrt{\mu h}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{\xi}\sin\frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} :$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}}\, e^{-\xi^2}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu h}}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}}\, da\,.$$

Faisons $\frac{a^2}{4\mu h} = t^2$; $da = 2\sqrt{\mu h}\, dt$ : aux limites $\left\{{}^{\varepsilon}_{0}\right.$ de $a$ répondront celles $\left\{{}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\mu h}} = u}_{0}\right.$ de $t$; et la formule précédente deviendra :

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2}\sin\frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu h}}\int_0^u e^{-t^2}\sqrt{2\mu h}\, dt = \sqrt{\pi}\int_0^u e^{-t^2}dt$$

$$= \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_u^\infty e^{-t^2}\, dt\right\} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}\int_u^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

Substituant dans la formule (*n*), nous aurons :

$$\Pi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

probabilité que dans un très-grand nombre $\mu$ d'épreuves la somme S des valeurs de A sera comprise entre

$$\mu k \pm 2u\sqrt{\mu h},$$

ou que la valeur moyenne $\frac{S}{\mu}$ sera comprise entre

$$k \pm \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}.$$

Si l'on donne à $u$ une valeur peu considérable, le terme $\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$ sera très-petit; alors $\frac{S}{\mu}$ différera peu de $k$; pour $u = 3$, on aura $\Pi = 1 - 0{,}000022091$.

Pour interpréter ce résultat, cherchons la signification de $k$.

Nous avons posé :

$$k = \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu k_i = \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu \int_a^b z f_i(z) dz = \int_a^b z dz \frac{\sum_1^\mu f_i(z)}{\mu} = \int_a^b z dz f(z).$$

Or

$$f(z)dz \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_1^\mu f_i(z) dz}{\mu}$$

est la probabilité moyenne des valeurs de $z$ à chaque épreuve.

Il en résulte que $k$ est la somme de toutes les valeurs possibles de A, multipliées par leur probabilité moyenne.

Or le résultat précédent dit que, si l'on prend $\frac{s}{\mu}$ pour la valeur de $k$, l'erreur à craindre, en plus ou en moins, sera

$$\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}};$$

$u$ étant peu considérable; on peut donc énoncer ce théorème :

*Soit* k *la somme de tous les produits obtenus en multipliant chacune des valeurs possibles d'une chose* A *par sa probabilité moyenne; je dis : 1° que dans un très-grand nombre* $\mu$ *d'épreuves il y aura toujours une probabilité très-approchée de la certitude que la valeur moyenne* $\frac{s}{\mu}$ *de* A *différera très-peu de* k; *2° que la différence* $\frac{s}{\mu} - k$ *diminue indéfiniment à mesure que* $\mu$ *augmente, et qu'elle serait tout à fait nulle si ce nombre devenait infini.*

Remarque. La valeur de $\frac{s}{\mu}$ approche indéfiniment de l'abscisse $z_1$ du centre de gravité de l'aire de la courbe

$$y = \frac{1}{\mu}\sum_{1}^{\mu} f_i(z),$$

limitée entre les abscisses $a$ et $b$.

Car on a

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1;$$

et par suite

$$\int_a^b y\,dz = \int_a^b \frac{1}{\mu}\sum_{1}^{\mu} f_i(z)\,dz = \frac{1}{\mu}\left[\int_a^b f_i(z)dz + \cdots + \int_a^b f_\mu(z)\,dz\right] = \frac{\mu}{\mu} = 1.$$

Pour l'abscisse du centre de gravité, on a l'expression

$$z_1 = \frac{\int_a^b zy\,dz}{\int_a^b y\,dz}, \quad z_1 = \frac{1}{\mu}\sum_{1}^{\mu}\int_a^b z f_i(z)\,dz = \frac{1}{\mu}\sum_{1}^{\mu} k_i = k, \text{ cqfd.}$$

## CHAPITRE III.

### ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE.

57. Définition. *L'espérance mathématique est le produit du gain attendu par la probabilité de le réaliser. On l'appelle aussi le sort ou l'avantage du joueur.*

Si $p, p_1 \dots p_i$ désignent les probabilités respectives des gains $g, g_1 \dots g_i$ ; $q, q_1 \dots q_i$ les probabilités respectives des pertes $k, k_1 \dots k_i$ : l'expérience mathématique sera :

$$E = pg + \dots + p_i g_i - (qk + \dots + q_i k_i).$$

Si les gains $g, \dots g_i$ ne doivent être payés qu'après $n, \dots n_i$ années, ces gains devront être escomptés pour être convertis en valeurs actuelles.

En représentant par $r$ le taux annuel de l'intérêt pour 1, par $\gamma, \dots \gamma_i$ les valeurs actuelles de $g, \dots g_i$, nous aurons

$$\gamma = \frac{g}{(1+r)^n}; \dots \gamma_i = \frac{g_i}{(1+r)^{n_i}};$$

et la valeur actuelle de l'espérance mathématique sera :

$$E = \gamma p + \dots + \gamma_i p_i = \frac{gp}{(1+r)^n} + \dots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}} \quad . \quad . \quad (a)$$

Si une personne A se charge de payer à une personne B après $n \dots n_i$ années, les sommes $g \dots g_i$ qui dépendent d'événements dont les probabilités sont $p \dots p_i$, il faudra que B paye aujourd'hui à A

$$E = \frac{gp}{(1+r)^n} + \dots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}}$$

si E est positif; et qu'il reçoive de A cette somme si E est négatif.

58. Théorème. *Soit* g *un gain certain, à espérer pour les personnes* A, B, C ...; p, q, r ... *leurs probabilités de le gagner; de sorte que* $p + q + r + \cdots = 1$; *supposons que ces personnes conviennent de se partager le gain* g *avant que le sort ait décidé : je dis que le partage devra se faire proportionnellement à* p, q, r .., *en sorte que la part de* A *sera* pg; *celle de* B, qg; *celle de* C, rg, *etc.*

*Démonstration.* Supposons que sur un nombre total $m$ de chances, pouvant également amener le gain $g$, $a$ chances soient favorables à A, $b$ chances à B, $c$ chances à C, etc.; il est clair que la part de chaque personne doit être proportionnelle au nombre des chances qui lui sont favorables; de sorte qu'en appelant $x$, $y$, $z$ ... les parts respectives de A, B, C ..., on a :

$$x : g = a : m \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ag}{m}$$

$$y : g = b : m \qquad y = \frac{bg}{m}$$

$$z : g = c : m \qquad z = \frac{cg}{m}$$

. . . . . . . . .

Or $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$ sont les probabilités respectives que A, B, C ... gagneront; le théorème est donc démontré.

1er corollaire.

$$x + y + z + \cdots = g\left(\frac{a + b + c + \cdots}{m}\right) = g\,(p + q + r + \cdots) = g.$$

2me corollaire. La règle précédente sert aussi à déterminer la mise de chaque joueur, qui doit être proportionnelle à la probabilité qu'il a de gagner la partie.

3me corollaire. Soient $p$, $q$; $\alpha$, $\beta$ les probabilités de gagner et les mises respectives de A et de B; et $p + q = 1$; on devra avoir :

$$p : q = \alpha : \beta, \quad p\beta = q\alpha \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Donc : *dans un pari équitable, les espérances mathématiques des deux joueurs doivent être égales.*

Exemple. Soit $p$ la probabilité qu'une maison brûlera; $\nu$ sa valeur; $x$ la prime à payer à l'assureur; on devra avoir

$$\nu p = x(1 - p).$$

Mais comme la prime est payée d'avance, et perdue quoi qu'il arrive, pour que le jeu fût équitable, il faudrait que

$$\nu p = x(1 - p) + x :$$

telle serait la manière de fixer les primes, abstraction faite des intérêts et des frais de la compagnie d'assurances.

59. Premier problème. *L'arrivée d'un événement procure le bénéfice* $\nu$; *sa non-arrivée cause la perte* $\mu$; *une personne* A *attend l'arrivée d'un nombre* s *d'événements semblables, tous indépendants les uns des autres, et également probables : quel est son avantage?*

Solution. Désignons par $q$ la probabilité de l'arrivée de chaque événement; par $p = 1 - q$ la probabilité de son contraire.

Posons

$$(1 - q + q)^s = \mathrm{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i} = \mathrm{S}\Pi_i, \quad . \quad . \quad (1)$$

la probabilité que sur un nombre total de fois $s$ il arrive $i$ des événements attendus sera

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!}q^i(1-q)^{s-i}.$$

Dans ce cas, le bénéfice de A sera $i\nu$; sa perte sera $(s - i)\mu$; posons $\quad i\nu - (s - i)\mu = i(\nu + \mu) - s\mu = \Delta_i$;

$\Pi_i\Delta_i$ sera l'avantage de A correspondant à l'arrivée de $i$ des événements attendus, sur un nombre total $s$ de fois.

L'avantage de A correspondant à l'arrivée d'un seul des événements est donc $\Pi_1\Delta_1$

L'avantage de A correspondant à l'arrivée de deux des événements $\Pi_2\Delta_2$

etc.

L'avantage de A correspondant à l'arrivée de $s$ des événements $\Pi_s\Delta_s$;

et comme tous ces événements sont indépendants entre eux, et que, sur un nombre $s$ de fois, l'événement attendu peut arriver $0, 1, 2 \ldots s$ fois, l'avantage cherché N sera

$$N = S\Pi_i \Delta_i = S\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, q^i (1-q)^{s-i} \left[ i(\nu+\mu) - s\mu \right]$$
$$= -s\mu\,[1-q+q]^s + (\nu+\mu)\, S\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, i\, q^i (1-q)^{s-i}\,.$$

Pour déterminer cette dernière somme, partons de l'identité

$$d.S\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, t^i q^i (1-q)^{s-i} = S\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, i\, q^i (1-q)^{s-i} t^{i-1}\, dt;$$

nous pourrons écrire en conséquence :

$$S\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, i\, q^i (1-q)^{s-i} = \left\{ \frac{d S \dfrac{s!}{i!\,(s-i)!}\, t^i q^i (1-q)^{s-i}}{dt} \right\}_{t=1}$$
$$\left\{ \frac{d\,[qt+(1-q)]^s}{dt} \right\}_{t=1} = \left\{ s\,[qt+(1-q)]^s \right\}_{t=1} = sq.$$

Nous aurons donc

$$N = -s\mu + (\nu+\mu)\, sq = s\left\{ q\nu + q\mu - \mu \right\} = s\left\{ q\nu - (1-q)\mu \right\}.$$

L'avantage cherché est donc proportionnel à $s$, ou au nombre des événements attendus.

Remarque. Pour $q\nu = (1-q)\mu$, on a $N = 0$.

» $q\nu < (1-q)\mu$, » $N < 0$, c'est-à-dire un désavantage.

60. Deuxième problème. *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, chercher la probabilité que le bénéfice réel de* A (*c'est-à-dire le bénéfice diminué de la perte*) *est compris entre deux limites,* s *étant un grand nombre.*

Solution. Nous avons trouvé, pour la probabilité que $i$ événements arrivent, ou que le bénéfice réel est $\Delta_i$ (n° 20).

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, q^i (1-q)^{s-i}.$$

Si nous faisons $i = qs$, l'expression précédente sera le plus grand terme du développement de $(1-q+q)^s$, que nous représenterons par $M_i$; et, par le théorème de Bernouilli, nous trouverons :

$$\sum_{i-l}^{i+l} M_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}, \left\{ \gamma = \frac{l}{\sqrt{2sq(1-q)}} \right\} \quad (\alpha)$$

pour la probabilité que le nombre des événements qui arrivent est compris entre $i \pm l$, ou que le bénéfice éventuel est compris entre $\Delta_{i+l}$ et $\Delta_{i-l}$.

Or on sait, par le problème précédent, que si $i$ événements arrivent, le bénéfice réel de A est

$$\Delta_i = i(\nu - \mu) - s\mu;$$

faisant $i = qs$, nous aurons :

$$\Delta_i = s\left[q\nu - (1-q)\mu\right];$$

changeant $i$ en $qs - l$, puis en $qs + l$, nous aurons de même :

$$\Delta_{i-l} = s\left[q\nu - (1-q)\mu\right] - l(\nu + \mu),$$
$$\Delta_{i+l} = s\left[q\nu - (1-q)\mu\right] + l(\nu + \mu);$$

et la formule $(\alpha)$ nous donnera la probabilité que le bénéfice est compris entre ces deux limites.

Nous simplifierons un peu cette formule en posant

$$l = r\sqrt{s}; \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{r\sqrt{s}}{\sqrt{2q(1-q)}},$$

expression que nous pouvons également mettre à la place de $t$; nous aurons ainsi :

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi q(1-q)}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2q(1-q)}}} e^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}} dr + \frac{e^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}} : \quad (1)$$

probabilité que le bénéfice réel de A est compris entre

$$s[q\nu - (1-q)\mu] \pm r\sqrt{s}\,(\nu + \mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le dernier terme de la formule (1) peut se négliger.

Première remarque. Lorsque $q\nu > (1-q)\mu$, le bénéfice réel augmente avec $s$.

Deuxième remarque. Lorsque $s$ augmente, le premier terme de la formule (2) varie comme $s$, le second comme $\sqrt{s}$; l'intervalle des limites augmente donc sans cesse, et il devient de plus en plus probable que le bénéfice tombe entre ces limites.

Si $s$ est infini, le bénéfice est aussi infini ou certain.

Donc, quand $s$ est très-grand, il est presque certain que le bénéfice différera très-peu de $s[q\nu - (1-q)\mu]$.

61. Troisième problème. *Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, supposons que les probabilités des* s *événements soient différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés : chercher la probabilité que le bénéfice réel sera compris entre deux limites,* s *étant supposé très-grand.*

Solution. Pour simplifier les calculs, on peut faire abstraction des pertes $\mu$, causées par la non-arrivée de chaque événement; car on peut comprendre dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement la perte qu'occasionnerait sa non-arrivée, et retrancher de l'avantage total ainsi obtenu la somme de ces pertes.

On a en effet, en se conformant aux notations précédentes :

$$\Sigma\left\{ q_i\nu_i - (1-q_i)\,\mu_i \right\} - \Sigma q_i\,(\nu_i + \mu_i) - \Sigma\mu_i.$$

Soient maintenant

$q_1 \dots q_s$ les probabilités respectives des $s$ événements;

$p_1 \dots p_s$ celles de leurs contraires;

$\nu_1 \dots \nu_s$ les bénéfices que procure leur arrivée;

$\mu_1 \dots \mu_s$ les pertes que cause leur non-arrivée.

Posons

$$X = (p_1 + q_1u^{\nu_1})\,(p_2 + q_2u^{\nu_2}) \dots (p_s + q_su^{\nu_s}) = \Sigma U_m u^m,$$

et désignons par P la probabilité que la somme des bénéfices sera $m$, nous aurons

$$P = U_m.$$

Changeons $m$ en $L + l$, et $u^{\nu_1}$ en $e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}$, etc., ce qui est permis, puisque $U_m$ est indépendant des $\nu$; l'expression X deviendra :

$$X = (p_1 + q_1 e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}) \dots (p_s + q_s e^{\nu_s \omega \sqrt{-1}}) = \Sigma U_{L+l} e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}}$$
$$= U_0 + \dots + U_{L+l} e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}}.$$

multiplions par $e^{(L+l)\omega \sqrt{-1}} d\omega$, et intégrons entre les limites $\pm \pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(L+l)\omega \sqrt{-1}} d\omega = U_{L+l} = 2\pi P,$$

d'où

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(L+l)\omega \sqrt{-1}} X d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega \sqrt{-1}} e^{-L\omega \sqrt{-1}} X. \quad (a)$$

Mais nous avons

$$X = \prod_1^s (p_i + q_i e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}) = \prod_1^s \left[1 - q_i (1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}})\right];$$

d'où

$$l.X = \sum_1^s l. \left[1 - q_i (1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}})\right],$$
$$= \sum_1^s \left\{ q_i (1 - e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}) - \frac{1}{2} q_i^2 (1 - 2e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}} + e^{2\nu_i \omega \sqrt{-1}}) + \dots \right\}$$
$$= \sum_1^s \left\{ q_i \nu_i \omega \sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \nu_i^2 q_i (1 - q_i) - \dots \right\};$$

et par suite

$$l. (e^{-L\omega \sqrt{-1}} x) = \left( \sum_1^s q_i \nu_i - L \right) \omega \sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1 - q_i) \nu_i^2 - \dots$$

Si nous faisons $L = \sum_1^s q_i \nu_i$, le premier terme du second membre disparaîtra, et nous aurons

$$e^{-L\omega \sqrt{-1}} X = e^{-\frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1 - q_i) \nu_i^2 - \dots}$$

$s$ étant très-grand, il en sera de même de $\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2$, qui est de

l'ordre de $s$, et l'on pourra négliger dans l'exposant les puissances de $\omega$ supérieures à la $2^{me}$; alors :

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega e^{-\left[l\omega\sqrt{-1}+\frac{\omega^2}{2}\sum_1^s p_i q_i \nu_i^2\right]}.$$

On pourra, pour la même raison, étendre les limites à $\pm\infty$, de sorte que

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\left(l\omega\sqrt{-1}+\frac{\omega^2}{2}\sum_1^s p_i q_i \nu_i^2\right)} : \ldots\ldots (b)$$

probabilité que la somme des bénéfices sera $l + \sum_1^s q_i \nu_i$.

Pour intégrer l'expression $(b)$, il faut convertir l'exposant en un carré. Si nous faisons

$$\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2 = a,$$

nous pourrons écrire

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2} e^{-\frac{l^2}{2a}} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right]^2},$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sqrt{\frac{a}{2}} e^{-\left(\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\pi\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}};$$

ou bien, en remplaçant $a$ par sa valeur :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}}\, e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} : \ldots\ldots (c)$$

probabilité que le bénéfice est $\sum_1^s q_i \nu_i + l$.

Pour avoir la probabilité que le bénéfice est compris entre $\sum_1^s q_i\nu_i \pm l$, il suffira de multiplier par $dl$ et d'intégrer entre les limites $\pm l$; on aura ainsi :

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} dl = \frac{2}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}} dl. \quad (d)$$

Cette formule se simplifiera si l'on pose

$$l = r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}, \quad dl = dr\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2};$$

elle devient alors :

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r dr\, e^{-r^2},$$

probabilité que le bénéfice est compris entre

$$\mathrm{L} \pm l = \sum_1^s q_i\nu_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2}.$$

Mais, d'après la manière de tenir compte des pertes, que nous avons exposée au commencement de la solution, nous avons à changer dans L, $\nu_i$ en $\nu_i + \mu_i$, et à retrancher $\sum_1^s \mu_i$; de sorte que

$$\Pi = \int_0^r e^{-r^2} dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

sera la probabilité que le bénéfice réel est entre

$$\sum_1^s [q_i(\nu_i + \mu_i)] - \sum_1^s \mu_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2},$$

ou entre

$$\sum_1^s (q_i\nu_i - p_i\mu_i) \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i \nu_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

De là résulte :

1° Que si $q_i\nu_i > p_i\mu_i$, ou si l'espérance mathématique $q_i\nu_i - p_i\mu_i$ de chaque événement est $> 0$, il y aura toujours un bénéfice réel;

2° Que le premier terme étant de l'ordre $s$ et le second de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse avec $s$, en même temps que Π s'approche de 1. Ce bénéfice devient infiniment grand, et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événements; car les limites s'étendant de plus en plus, il devient de plus en plus probable que le bénéfice tombe entre ces limites.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé la probabilité du bénéfice réel résultant d'un certain nombre d'événements simples; nous allons maintenant déterminer la probabilité du bénéfice qui résulte de la répétition d'un événement consistant en diverses chances qui produisent des gains ou des pertes.

62. Quatrième problème. *Une urne renferme des boules de diverses couleurs* (1), (2), *etc.; une personne* A *tire une boule et la remet dans l'urne après le tirage; son bénéfice est* $\nu_1$ *si la boule qui sort est de la couleur* (1); $\nu_2$ *si elle est de la couleur* (2), *etc. Supposons un nombre très-grand* t *de tirages; et cherchons la probabilité que le bénéfice de* A *sera* $\sigma = t\mu + l$.

Solution. Soient $p_1, p_2, \ldots$ les probabilités du tirage d'une boule (1), (2).., ces probabilités étant assujéties à la condition $p_1 + p_2 + \ldots = 1$.

Les bénéfices de A correspondants à ces tirages seront

$p_1\nu_1$ bénéfice éventuel pour une boule (1),
$p_2\nu_2$ » » (2), etc.

Posons

$$X = (p_1 u^{\nu_1} + p_2 u^{\nu_2} + \ldots)^t = \Sigma U_\sigma u^\sigma ;$$

$U_\sigma$ sera la probabilité que le bénéfice de A est $\sigma$.

Comme ce terme est indépendant de $u$, nous pourrons faire

$$u = \omega\sqrt{-1};$$

d'où

$$X = (p_1 e^{\nu_1\omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + \ldots)^t = \Sigma U_\sigma e^{\sigma\omega\sqrt{-1}};$$

d'où

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\omega\sigma\sqrt{-1}} d\omega X.$$

Si nous changeons $\sigma$ en $t\mu + l$, nous aurons :

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega\sqrt{-1}} \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} \left[ p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + .. \right] \right\}^t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega e^{-l\omega\sqrt{-1}}. \; A,$$

en posant

$$A = \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} \left[ p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + .. \right] \right\}^t;$$

d'où

$$\text{l. A} = -t\mu\omega\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[ p_1 e^{\omega\nu_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\omega\nu_2\sqrt{-1}} + \cdots \right]$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[ p_1 \left( 1 + \omega\nu_1\sqrt{-1} - \frac{\omega^2\nu_1^2}{2} + \cdots \right) \right.$$

$$\left. + p_2 \left( 1 + \omega\nu_2\sqrt{-1} - \frac{\omega^2\nu_2^2}{2} + \cdots \right) + \cdots \right]$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[ 1 + (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)\,\omega\sqrt{-1} \right.$$

$$\left. - (p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)\frac{\omega^2}{2} + \cdots \right]$$

$$= t\omega\sqrt{-1}\,(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots - \mu) - \frac{\omega^2 t}{2}\left[ (p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots) \right.$$

$$\left. - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2 \right] + \cdots$$

Faisons $\mu = p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots$, et

$$p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2 = 2k^2,$$

ce qui est permis, cette quantité étant essentiellement positive; elle est, en effet, égale à

$$(p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)(p_1 + p_2 + \cdots) - (p_1^2\nu_1^2 + p_2^2\nu_2^2 + \cdots + 2p_1p_2\nu_1\nu_2 + \cdots)$$
$$= p_1p_2\,(\nu_1 - \nu_2)^2 + \cdots$$

Faisant ces substitutions dans l'expression l. A, elle deviendra :

$$\text{l. A} = -\omega^2 tk^2; \quad A = e^{-tk^2\omega^2},$$

en négligeant les termes en $\omega^3$ ...., à cause de la valeur très-grande que nous supposons à $t$. La formule $U_\sigma$ deviendra donc, en étendant, pour la même raison, les limites à $\pm\infty$ :

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-(tk^2\omega^2 + l\omega\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-tk^2\left[\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-tk^2\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2};$$

ou bien, en posant $\tau = k\nu t\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{t\mu^2}\right)$; $d\omega = \frac{d\tau}{k\nu t}$ :

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi k\nu t} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

$$= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} : \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

probabilité que le bénéfice de A est $\sigma = \mu t + l$.

Cherchons la probabilité que ce bénéfice est compris entre $\mu t \pm l$.

Pour cela, il faut faire varier, dans $(a)$, $l$ depuis $-l$ jusqu'à $l$, et prendre la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues, ce qui revient à multiplier l'expression $(a)$ par $dl$ et à intégrer entre les limites $\pm l$; on aura ainsi

$$P = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl :$$

probabilité que le bénéfice de A est compris entre

$$\mu t \pm l \quad \text{ou} \quad t(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots) \pm l.$$

Cette formule se simplifiera en posant

$$\frac{l}{2k\sqrt{t}} = r, \quad dl = 2k\sqrt{t}\,dr;$$

elle deviendra

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-r^2} dr :$$

probabilité que le bénéfice de A est compris entre

$$t(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots) \pm 2k\sqrt{t} \,.\, r.$$

Comme les limites s'étendent de plus en plus à mesure que $t$ augmente, il deviendra de plus en plus probable que le bénéfice tombera entre les limites; et le bénéfice deviendra infiniment grand, et certain, si le nombre des tirages devient infini.

## JEUX DE HASARD.

63. Dans les jeux de hasard, on nomme *avantage* ou *sort* d'un joueur son espérance mathématique. La théorie des jeux de hasard consiste à déterminer cet avantage dans chaque cas particulier.

Pour faire voir comment s'effectue cette détermination, prenons pour exemple le jeu de Pharaon.

### Règles du jeu.

1° Le banquier taille avec un jeu de cinquante-deux cartes;

2° Il tire toutes les cartes de suite, en mettant les unes à sa droite, les autres à sa gauche; chaque couple de cartes se nomme une taille ou une main ;

3° A chaque main, le ponte a la liberté de prendre une ou plusieurs cartes, et de hasarder dessus une certaine somme;

4° Le banquier gagne la mise du ponte, lorsque la carte de celui-ci arrive à la main droite, ou en rang impair;

5° Le banquier perd la mise du ponte, lorsque la carte de celui-ci arrive à la main gauche, ou en rang pair;

6° Le banquier prend la moitié de ce que le ponte a mis sur une carte, lorsque, dans une même taille, cette carte arrive deux

fois (par exemple, deux as), ce qui fait une partie de l'avantage du banquier;

7° La dernière carte, qui devrait être pour le ponte, ne compte pas, ce qui est encore un avantage pour le banquier; car, comme l'avant-dernière carte est de rang impair, le banquier gagnera la mise, si même la dernière ou l'avant-dernière carte est celle du ponte.

Il s'agit de déterminer l'avantage du banquier dans ce jeu.

Un premier avantage consiste en ce que le ponte perd la moitié de sa mise, quand sa carte vient deux fois dans une taille; nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Premier problème. *Le banquier tient en main* p *cartes, parmi lesquelles celles du ponte qui ne sont pas encore sorties, au nombre de* q; *trouver la probabilité* P *que deux des cartes du ponte arrivent dans la* 1re, *la* 2me, ... *ou la* rme *taille.*

Solution. Soient $Q_1$, $Q_2$, ... $Q_r$ les probabilités que les cartes du ponte arrivent deux fois dans la 1re, la 2me, ... la $r^{me}$ taille; on aura

$$P = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r.$$

Déterminons $Q_1$ ... $Q_r$.

1° *Détermination de* $Q_1$ :

La probabilité que la première carte tirée sera celle du ponte est $\frac{q}{p}$;

La probabilité contraire

$$1 - \frac{q}{p} = \frac{p - q}{p}.$$

La probabilité que la deuxième carte tirée sera aussi celle du ponte est $\frac{q-1}{p-1}$;

Par suite, la probabilité que les deux cartes du ponte sortent ensemble dans la première taille sera

$$Q_1 = \frac{q}{p}\frac{q-1}{p-1}.$$

2° *Détermination de* $Q_2$ :

La probabilité que, les cartes du ponte ne sortant pas dans la première taille, elles sortent toutes deux dans la seconde, sera

$$\frac{q}{p-2}\cdot\frac{q-1}{p-3}.$$

Mais la probabilité qu'aucune des cartes du ponte ne sorte dans la première taille est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)=\frac{p-q}{p}\frac{p-q-1}{p-1};$$

nous aurons, par suite, pour la probabilité des deux événements simultanés (la non-sortie dans la première taille, et la sortie des deux cartes dans la deuxième taille)

$$Q_2=\frac{q\,(q-1)}{(p-2)(p-3)}\cdot\frac{(p-q)(p-q-1)}{p\,(p-1)}.$$

3° *Détermination de* $Q_3$ :

La probabilité que, les deux cartes du ponte n'étant pas sorties dans les deux premières tailles, elles sortent dans la troisième est

$$\frac{q\,(q-1)}{(p-4)(p-5)}.$$

La probabilité qu'aucune carte du ponte ne sort dans la première taille est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right).$$

La probabilité qu'aucune carte du ponte ne sort, ni dans la première ni dans la deuxième taille, est

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

La probabilité cherchée $Q_3$ sera donc

$$Q_3 = \frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

4° On trouverait absolument de la même manière :

$$Q_4 = \frac{q(q-1)}{(p-6)(p-7)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-5}\right);$$

et enfin :

$$Q_r = \frac{q(q-1)}{(p-2r+2)(p-2r+1)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-2r+3}\right). \quad (A)$$

Réduisant au même dénominateur et ajoutant, on trouve

$$P = \frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1+\frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)}+\frac{(p-q)\cdots(p-q-3)}{(p-2)\cdots(p-5)}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(p-q)\cdots(p-q-2r+3)}{(p-2)\cdots(p-2r+1)}+\cdots\right\}. \quad (a)$$

Il s'agit de déterminer le dernier terme de la somme entre parenthèses. Si l'on change $r$ en $r+1$, on obtient, pour le $(r+1)^{me}$ terme,

$$\frac{(p-q)\ldots(p-q-2r+1)}{(p-q)\ldots(p-2r-1)} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Les cartes du banquier, c'est-à-dire celles que le ponte n'a pas prises, sont au nombre de $(p-q)$.

La partie cessera quand les cartes restantes après $r$ tailles seront les $q$ cartes du ponte, si $q$ est pair, ou bien quand les cartes restantes seront les $q$ cartes du ponte plus une carte du banquier, si $q$ est impair.

Car, à la taille suivante, les deux cartes du ponte sortiront, si $q$ est pair, ce qui fera gagner le banquier; tandis que, si $q$ est impair, il sortira deux cartes du ponte, ou une carte du ponte et une du banquier, ce qui fera gagner l'un ou l'autre.

Le dernier terme de la formule (*a*) répond donc à une valeur de $r$, telle qu'à la $r^{me}$ taille les cartes restantes soient au nombre de $q$, si $q$ est pair, ou au nombre de $q + 1$, si $q$ est impair.

Supposons d'abord $q$ pair : pour qu'il reste $q$ cartes après la $(r-1)^{me}$ taille, il faut qu'on ait tiré $p - q = 2(r-1)$ cartes ; d'où

$$r = \frac{p - q + 2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Supposons $q$ impair : pour qu'il reste $q + 1$ cartes après la $(r-1)^{me}$ taille, il faut qu'on ait tiré $p - q - 1 = 2(r-1)$ cartes ; d'où

$$r = \frac{p - q + 1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, le terme (*b*) devient :

$$\frac{(p-q)\ldots \times 0 \times -1}{(p-2)\ldots(q-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

ou

$$\frac{(p-q)\ldots 2 \cdot 1 \cdot 0}{(p-2)\ldots(q-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Si donc $q > 2$, (*e*) et (*f*) seront nuls ; et la somme de la formule (*a*) devra être continuée jusqu'à ce qu'elle s'arrête d'elle-même.

Si $q = 2$, la formule (*c*) donne

$$r = \frac{p}{2}, \qquad 2r = p :$$

dans ce cas toutes les cartes sont tirées à la $r^{me}$ taille, et le reste sera impossible ; aussi (*e*) devient-il $\frac{0}{0}$.

Si $q = 1$, la formule (*a*) donne

$$r = \frac{p - q + 1}{2} = \frac{p}{2}, \qquad 2r = p ;$$

le reste sera encore impossible ; aussi (*f*) devient-il $\frac{0}{0}$.

La somme $(a)$ doit donc être continuée jusqu'à ce qu'on trouve 0, ou $\frac{0}{0}$.

Deuxième problème. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* q *est* $> 2$.

Solution. Si $q > 2$, le nombre de cartes au commencement de la $r^{me}$ taille étant $q$ ou $q+1$, la $r^{me}$ taille n'épuisera pas toutes les cartes; il est donc inutile de prendre en considération la dernière règle du jeu, pour en tenir compte dans la recherche de l'espérance mathématique du banquier.

Si $a$ est la mise du ponte, le gain à espérer par le banquier sera $\frac{1}{2}a$, et son espérance mathématique sera donc :

$$E = \frac{1}{2}a\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)..(p-q-3)}{(p-2)..(p-5)} + \ldots\right\}. \quad (g)$$

et la série s'arrêtera d'elle-même.

Troisième problème. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* $r = 2$.

Solution. Si dans la formule $(g)$ on pose $q = 2$, tous les termes de la parenthèse seront égaux à l'unité, et leur nombre sera celui des termes de la progression $1, 3, 5, \ldots p-1$, nombre qui est $\frac{p}{2}$; on a donc

$$E = \frac{1}{2}a\,\frac{2.1}{p(p-1)}\cdot\frac{1}{2}p = \frac{a}{2(p-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Mais, dans ce cas, l'espérance mathématique du banquier est plus grande que cette valeur $(k)$; car pour $q = 2$, on a $r = \frac{p}{2}$, $2r = p$; il ne reste donc plus de cartes après la $r^{me}$ taille, et, d'après la dernière règle du jeu, le banquier gagnera sûrement à la $r^{me}$ taille. Si les deux cartes du ponte sont dans cette taille, le banquier gagnera $a$ et non $\frac{1}{2}a$; or, la probabilité qu'il en sera ainsi est, d'après la formule (A), dans laquelle on doit faire $r = \frac{p}{2}$ et $q = 2$ :

$$\frac{2.1}{2.1}\frac{(p-2)\ldots 1}{p(p-1)\ldots 3} = \frac{2.1}{p(p-1)}$$

l'espérance qu'a le banquier de gagner $a$ est donc

$$a\,\frac{1.2}{p\,(p-1)}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

et comme la moitié de cette valeur est déjà comprise dans la valeur $(k)$, l'espérance mathématique du banquier sera

$$(k)+\frac{1}{2}\,(l)=a\left(\frac{1}{2\,(p-1)}+\frac{1}{p\,(p-1)}\right)=a\,\frac{p+2}{2p\,(p-1)}. \quad (m)$$

Quatrième problème. *Déterminer l'espérance mathématique du banquier quand* $q=1$.

Solution. Dans ce cas, l'espérance du banquier dépend de la probabilité que la carte unique du ponte sortira la première dans la dernière taille. Or, comme chacune des $p$ cartes peut sortir la première dans cette taille, la probabilité cherchée sera $\frac{1}{p}$.

Mais si la carte du ponte sort, le banquier gagne la mise $a$; son espérance mathématique sera donc

$$E=\frac{a}{p}.$$

## CHAPITRE IV.

### ESPÉRANCE MORALE.

64. Soit $v$ la fortune matérielle d'un individu, $g$ un gain matériel, et G la valeur morale de $g$, on a entre ces deux valeurs une relation de la forme

$$G = m\frac{g}{v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$m$ étant une constante qui dépend du temps, du lieu, etc.

On admet que les fortunes varient par degrés insensibles, de sorte qu'à l'accroissement de fortune matérielle $dx$ correspond un accroissement $dG$ de fortune morale, qui sera donné, en vertu de la relation (1), par

$$dG = m\frac{dx}{x}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

si le capital matériel $x$ croît de $x = v$ à $x = V$, la fortune morale correspondante à cet accroissement sera

$$G = \int_v^V \frac{m\,dx}{x} = ml\frac{V}{v}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Il résulte de cette formule :

1° Que G croît avec V;

2° Que G augmente quand $v$ diminue;

3° Que $G = 0$ quand $V = v$;

4° Que G est négatif quand V est $< v$.

Il est à remarquer que V et $v$ ne sont jamais nuls, ni, à plus forte raison, négatifs, vu que personne n'est jamais absolument sans fortune physique; car celui qui n'a rien possède au moins

son existence, qu'il n'échangerait pas contre une somme qu'il estimerait être inférieure à la valeur de cette existence. Il n'y a que celui qui meurt actuellement de faim, dit Bernouilli, dont on puisse dire qu'il ne possède absolument rien.

Soit $v$ la fortune matérielle d'un individu; $g_1$, $g_2$, ... des gains matériels à espérer; $p_1$, $p_2$, ... les probabilités de ces gains; G la valeur relative de sa fortune morale en vertu de son expectative; on aura

$$G = p_1 m \text{ l.} \frac{v + g_2}{v} + p_2 m \text{ l.} \frac{v + g_2}{v} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais si V est la fortune physique correspondante à cette fortune morale, on a aussi

$$G = m \text{ l.} \frac{V}{v};$$

et, en égalant les deux valeurs de G :

$$\text{l.} \frac{V}{v} = p_1 \text{ l.} \frac{v + g_1}{v} + p_2 \text{ l.} \frac{v + g_2}{v} + \cdots$$

d'où

$$\frac{V}{v} = \frac{(v + g_1)^{p_1} (v + g_2)^{p_2} \ldots}{v^{p_1 + p_2 + \cdots}},$$

et comme

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1,$$

il en résulte

$$V = (v + g_1)^{p_1} (v + g_2)^{p_2} \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on retranche la fortune primitive de cette valeur V, la différence

$$V - v = (v + p_1)^{g_1} (v + p_2)^{g_2} \cdots - v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sera l'accroissement de fortune matérielle qui procurerait à l'individu le même avantage moral que celui qui résulte pour lui de son expectative : ce sera son espérance morale, tandis que son espérance mathématique a pour expression

$$E = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots$$

Si les gains $g_1$, $g_2$ ... sont très-faibles par rapport à $v$, l'espé-

rance morale différera peu de l'espérance mathématique; on a en effet

$$V = v^{p_1+p_2+\cdots}\left(1+\frac{g_1}{v}\right)^{p_1}\left(1+\frac{g_2}{v}\right)^{p_2}\cdots$$

$$= v\left(1+\frac{p_1g_1}{v}\right)\left(1+\frac{p_2g_2}{v}\right)\cdots$$

en négligeant les puissances supérieures des rapports $\frac{g}{v}$; donc

$$V - v = p_1g_1 + p_2g_2 + \cdots + p_1p_2\frac{g_1g_2}{v} + \cdots,$$

valeur qui diffère peu de E.

**Conséquences des formules précédentes.**

65. I. *L'importance d'une somme* g, *considérée comme gain, est moindre que l'importance de cette somme considérée comme perte.*

Démonstration. Si $g$ est un gain, la fortune initiale $v$ aura pour valeur morale

$$G = m\,l.\frac{v+g}{v} = m\left[l.(v+g) - l.\,v\right];$$

tandis que si $g$ est une perte, la valeur morale de la fortune initiale sera

$$G' = m\,l.\frac{v-g}{v} = m\left[l.(v-g) - l.\,v\right].$$

Or de ce que

$$(v+g)(v-g) < v^2,$$

il s'ensuit

$$l.(v+g) - l.\,v < l.\,v - l.(v-g);$$

donc, en valeur absolue, on a

$$G < G'.$$

II. *Le jeu ou le pari le plus équitable est toujours désavantageux.*

Démonstration. Soit $v$ la fortune de A avant le jeu; $p$ la pro-

babilité qu'il gagnera; $s$ sa mise; $x$ la mise de B; $q = 1 - p$ la probabilité qu'il gagnera; pour que le jeu soit équitable, il faut qu'on ait

$$x : s = 1 - p : p, \quad x = \frac{1-p}{p} s.$$

Si A gagne, sa fortune après le jeu sera $v + \frac{1-p}{p} s$; et la probabilité qu'il en sera ainsi est $p$.

Si A perd, sa fortune après le jeu sera $v - s$; et la probabilité qu'il en sera ainsi est $1 - p$.

La fortune matérielle V de A, en vertu de son expectative, sera :

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v - s)^{1-p},$$

il s'agit de démontrer que V sera $< v$; ou que

$$\left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v - s)^{1-p} < v;$$

pour cela, transformons successivement cette inégalité dans les suivantes :

$$v^p \left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right)^p v^{1-p} \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p} < v,$$

$$\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right)^p \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p} < 1,$$

$$p \,\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right) + (1-p) \,\mathrm{l.}\left(1 - \frac{s}{v}\right) < 0,$$

$$\int \left\{ p\, d \,\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right) + (1-p)\, d \,\mathrm{l.}\left(1 - \frac{s}{v}\right) \right\} < 0;$$

$$\int \left\{ \frac{p \dfrac{1-p}{p} \dfrac{ds}{v}}{1 + \dfrac{1-p}{p} \dfrac{s}{v}} - \frac{(1-p)\dfrac{ds}{v}}{1 - \dfrac{s}{v}} \right\} < 0;$$

$$\int (1-p) \frac{ds}{v} \left\{ \frac{1}{1 + \dfrac{1-p}{p} \dfrac{s}{v}} - \frac{1}{1 - \dfrac{s}{v}} \right\} < 0:$$

inégalité qui est en effet satisfaite, puisque

$$1 + \frac{1-p}{p}\,\frac{s}{v} > 1 - \frac{s}{v}.$$

III. *Déterminer la valeur de la mise, pour que le désavantage soit insensible, eu égard à la fortune* v *du joueur.*

Nous avons trouvé

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p}\,s\right)^{p}(v-s)^{1-p};$$

$s$ est l'inconnue; comme sa valeur doit être faible, négligeons ses puissances supérieures à la deuxième, nous aurons

$$V = v - \frac{1-p}{2pv}\,s^2;$$

en faisant $\frac{1-p}{2pv}\,s^2$ égal à une très-petite partie de $v$, le désavantage sera insensible. Posons en conséquence

$$\frac{1-p}{2pv}\,s^2 = \frac{v}{n},$$

et nous trouverons

$$s = v\sqrt{\frac{2p}{n(1-p)}}.$$

La fortune du joueur, en vertu de son expectative, sera

$$V = v - \frac{v}{n},$$

et ne sera pas notablement changée, puisque $n$ est très-grand.

IV. *Quelle doit être la probabilité de gagner pour qu'un joueur puisse risquer sa fortune* v *moins une partie insensible* $\frac{v}{n}$?

La fortune du joueur, en vertu de son expectative, sera

$$V = v - \frac{v}{n} = v\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, nous avons trouvé pour V l'expression

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p}\,s\right)^{p}(v-s)^{1-p},$$

dans laquelle nous avons à changer la mise $s$ en $v\left(1-\frac{1}{n}\right)$, ce qui donne

$$V = v\left[1 + \frac{1-p}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p \left(\frac{1}{n}\right)^{1-p};$$

égalant entre elles les deux valeurs de V, nous obtiendrons l'équation

$$1 - \frac{1}{n} = \left[1 + \frac{1-p}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p \left(\frac{1}{n}\right)^{1-p},$$

d'où nous pouvons déduire la valeur cherchée de $p$.

V. *Démontrer qu'il est avantageux de ne pas exposer toute sa fortune à un même danger, et qu'il convient de la répartir, au contraire, sur plusieurs dangers indépendants les uns des autres.*

Supposons qu'un négociant dont la fortune est $v$ attende une cargaison d'une valeur $s$, exposée sur un seul navire, et que l'on sache par l'observation que l'arrivée au port d'un bâtiment semblable a une probabilité $p$.

La fortune morale du négociant, en vertu de son expectative, sera

$$V = (v+1)^r,$$

d'où

$$\text{l. V} = p\,\text{l.}\,(v+s) = p\int\frac{ds}{v+s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Supposons que le négociant expose la valeur $s$ par parties égales sur $r$ vaisseaux; si tous arrivent, sa fortune deviendra $v+s$, et la probabilité de cette arrivée est $p^r$; si $r-1$ vaisseaux arrivent, sa fortune sera $v + \frac{(r-1)s}{r}$, et la probabilité de cette arrivée est $rp\frac{r-1}{(1-p)}$; si $r-2$ vaisseaux arrivent, sa fortune sera $v + \frac{(r-2)s}{2}$, et la probabilité de cette arrivée est

$$\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2; \text{ etc.}$$

La fortune morale du négociant sera donc

$$V = (v+s)^{p^r}\cdot\left(v+\frac{r-1}{r}s\right)^{rp^{r-1}(1-p)}\cdot\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)^{\frac{r(r-1)}{r}p^{r-2}(1-p)^2}$$

d'où

$$\text{l. V} = p^r \text{ l.}(v+s) + rp^{r-1}(1-p)\text{ l.}\left(v+\frac{r-1}{r}s\right)$$

$$+\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2\text{ l.}\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)+\cdots$$

$$=\int\left\{\frac{p^r ds}{v+s}+\frac{rp^{r-1}(1-p)\frac{r-1}{r}ds}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{\frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(1-p)^2\frac{r-2}{r}ds}{v+\frac{r-2}{r}s}+\cdots\right\}.$$

$$=p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(v+\frac{r-2}{r}s\right)}+\cdots\right\}ds\ (b),$$

mais à cause de

$$(p+1-p)^{r-1}=p^{r-1}+(r-1)p^{r-2}(1-p)$$

$$+\frac{(r-1)(r-2)}{2}p^{r-3}(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{r-1}=1$$

la formule $(a)$ peut s'écrire

$$\text{l. V} = p\int 1\cdot\frac{ds}{v+s}$$

$$=p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{v+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2(v+s)}+\cdots\right\}ds\quad(a').$$

Si l'on retranche cette dernière valeur de la valeur $(b)$, la différence sera

$$\text{D}=\frac{r-1}{r}(1-p)\int\frac{\text{S}ds}{v+s}\left\{\frac{p^{r-1}}{v+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-2)(1-p)p^{r-2}}{v+\frac{r-2}{r}s}+\cdots\right\}.$$

Comme cette différence est positive, on voit qu'il y a moralement avantage à répartir la valeur $s$ sur plusieurs vaisseaux.

Cet avantage augmente avec $r$, et si $r$ est très-grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le démontrer, reprenons la formule (6) dans laquelle nous supposerons $v = 1$ :

$$\text{I.V} = p\int\left\{\frac{p^{r-1}}{1+s}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{p}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(1+\frac{r-1}{r}s\right)}+\cdots\right\}ds.$$

La somme entre parenthèses peut se mettre sous la forme d'une intégrale définie; en effet, si nous développons

$$e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1} = p^{r-1}e^{-x(1+s)}+(r-1)p^{r-2}(1-p)e^{-x\left(1+\frac{r-1}{r}s\right)} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}p^{r-3}(1-p)^2e^{-x\left(r+\frac{r-2}{r}\right)}+\text{etc.},$$

et que nous intégrions relativement à $x$ entre les limites 0 et $\infty$, en tenant compte de

$$\int_0^\infty e^{-mx}dx = \frac{1}{m}$$

nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+x}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}dx = \frac{p^{r-1}}{1+s} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}s}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2\left(1+\frac{r-2}{r}s\right)}+\text{etc.}$$

Par suite, l'expression de l. V devient

$$\text{l. V} = p\int ds\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}dx.$$

Pour transformer l'intégrale définie, observons que la fonction

$$y = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-1}$$

n'a ni maximum ni minimum, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, puisque $\frac{dy}{dx}$, qui est égal à

$$-e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right)^{r-2}\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right],$$

est toujours négatif dans cet intervalle.

Il nous est donc permis de poser

$$y=y_0e^{-t},$$

$y_0$ étant ce que devient $y$ pour $x=0$. Comme pour $t=0$ on a aussi $y=y_0$, il s'ensuit qu'à $t=0$ répond $x=0$. Et si, dans l'expression de $y$, on fait $x=0$, on trouve $y_0=1$. On aura, par suite,

$$\int_0^\infty y\,dx=\int_0^\infty e^{-t}\,dt\,\frac{dx}{dt}.$$

Nous avons à exprimer $\frac{dx}{dt}$ en fonction de $t$. Or,

$$x=f(t)=f(0)+\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}t+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}\frac{t^2}{1\cdot 2}+\cdots. \qquad (1)$$

et puisque $t=\text{l.}\frac{y_0}{y}=\text{l.}\frac{1}{y}$, nous aurons

$$dt=-\frac{dy}{y}=\frac{dx}{-\frac{ydx}{dy}}=\frac{dx}{u},$$

en posant

$$u=-\frac{ydx}{dy};$$

d'où

$$\frac{dx}{dt}=u;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\frac{du}{dx}}{1\Big|\frac{dx}{dt}}=\frac{udu}{dx};\ \text{etc.}$$

Et puisqu'à $t=0$ répond $x=0$, il en résulte :

$$f(0)=0;\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=u_{x=0};\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}=\left(\frac{udu}{dx}\right)_{x=0};\ \text{etc.}$$

La formule (1) deviendra donc :

$$x = u_0 t + \left(\frac{udu}{dx}\right)_0 \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = u_0 + \left(\frac{udu}{dx}\right)_0 t + \cdots = u_0 \left\{ 1 + \left(\frac{du}{dx}\right) t + \cdots \right\}.$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale précédente, nous obtiendrons

$$\int_0^\infty y dx = u_0 \left\{ \int_0^\infty e^{-t} dt + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 \int_0^\infty t e^{-t} dt + \cdots \right\}$$

$$= u_0 \left[ 1 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \cdots \right];$$

mais nous avons posé

$$u = -\frac{ydx}{dy} = \frac{pe^{-\frac{sx}{r}} + 1 - p}{p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}} + (1-p)\left(1 + \frac{s}{r}\right)};$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{-(1-p)p\frac{s^2}{r^2}(1-r)e^{-\frac{sx}{r}}}{\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^2}; \text{ etc.}$$

Par suite

$$u_0 = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{s}{r}\right)}{r\left[1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}\right]^2}.$$

L'intégrale cherchée aura donc pour valeur

$$\int_0^\infty y dx = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}} \left\{ 1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}\right]^2} + \cdots \right\}$$

et substituant cette valeur dans l'expression

$$\text{l. V} = p \int ds \int_0^\infty y dx,$$

nous aurons

$$\text{l. V} = \int \frac{pds}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}} \left\{ 1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2} + \cdots \right\}.$$

Si $r$ est très-grand, on aura à peu près

$$\text{l. V} = \int \frac{pds}{1+ps} = \text{l.}(1+ps);$$

d'où

$$\text{V} = 1 + ps;$$

et comme nous avions fait $v = 1$, en remettant maintenant $v$ au lieu de 1, nous aurons $\text{V} = v + ps$; ou $\text{V} - s = ps$; ou $\text{E}' = \text{E}$, c'est-à-dire l'espérance morale égale à l'espérance mathématique.

VI. *L'avantage moral est souvent augmenté par les assurances.*

Cherchons la somme que le négociant pourra donner à une compagnie d'assurances pour que sa fortune morale soit augmentée par son assurance.

Il a une valeur $s$ sur un navire dont l'arrivée a la probabilité $p$; sa fortune morale est donc

$$\text{V} = (v+s)^p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

S'il assure cette valeur, il doit donner à la compagnie, d'après la règle du pari équitable, $(1-p)\,s$ comme prime d'assurance; mais à cause des frais et du bénéfice des assureurs, il doit donner, en outre, un excédant $u$; sa fortune réelle est donc

$$v + s - (1-p)\,s - u = v + sp - u. \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Pourvu que sa fortune morale reste la même, qu'il assure ou non, il faut que

$$(v+s)^p = v + sp - u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

d'où l'on tire

$$u = v + sp - (v+s)^p:$$

c'est tout ce que le négociant pourra donner, sans désavantage

moral, en excédant du prix réglé par l'espérance mathématique. Il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de $u$.

Les compagnies d'assurances peuvent donc faire un bénéfice réel, tout en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec elles.

VII. *Démontrer que le négociant peut faire un sacrifice excédant la somme* (1 — p) s *exigée par l'équité mathématique.*

En effet, s'il ne paye que $(1 - p)\,s$, sa fortune réelle est

$$v + s - (1 - p)\,s = v + sp;$$

s'il n'assure pas, elle est

$$(v + s)^p.$$

Or, $p$ étant $< 1$, on a

$$\int \frac{pds}{v + ps} > \int \frac{pds}{v + s},$$

ou

$$\text{l.}\,(v + ps) > p\,\text{l.}\,(v + s),$$

et

$$v + ps > (v + s)^p.$$

La fortune morale du négociant étant donc augmentée par l'assurance, il peut faire un sacrifice propre à subvenir aux frais de la compagnie et aux bénéfices qu'elle doit réaliser.

### Problème de Pétersbourg.

66. *Deux personnes,* A *et* B, *jouent à croix et pile, sous la condition que* B *donnera à* A, *si celui-ci fait croix au* 1^er^ *coup,* 2 *francs; s'il fait croix au* 2^me^ *coup,* 4 *francs; ...; s'il fait croix au* n^me^ *coup,* $2^n$ *francs; on demande quelle doit être la mise de* A?

Solution mathématique. Pour l'équité mathématique, il faut que la mise de A soit égale au gain qu'il peut espérer, ou à son espérance mathématique; or les probabilités de faire croix au 1^er^, au 2^me^, ..., au $n^{me}$ coup, sont :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{2^n};$$

l'espérance mathématique de A sera donc

$$E = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + \cdots + 2^n\frac{1}{2^n} = n.$$

Telle devrait donc être la mise de A. Mais si $n$ est très-grand, personne ne voudra risquer une pareille somme; la règle de l'espérance mathématique est donc ici en contradiction avec l'appréciation du sens commun : celle-là prescrit d'accepter le pari, celui-ci de s'en abstenir.

Solution morale de D. Bernouilli. Soit $v$ la fortune de A avant le jeu, $x$ la mise qu'il peut risquer. Si croix arrive au 1^er^, 2^me^, ... $n^{me}$ coup, sa fortune sera respectivement

$$v + 2 - x,\ v + 2^2 - x, \ldots v + 2^n - x;$$

et les probabilités correspondantes seront

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots \frac{1}{2^n},$$

la fortune morale de A sera donc

$$V = (v + 2 - x)^{\frac{1}{2}}\ (v + 2^2 - x)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (v + 2^n - x)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Pour que l'état de fortune de A ne soit pas changé, il faudra que :

$$v = (v + 2 - x)^{\frac{1}{2}} (v + 2^2 - x)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (v + 2^n - x)^{\frac{1}{2^n}},$$

ou bien, en faisant $v - x = v'$,

$$v = v' + x = (v' + 2)^{\frac{1}{2}} (v' + 2^2)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (v' + 2^n)^{\frac{1}{2^n}} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$= v'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}} \left(1 + \frac{2}{v'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^2}{v'}\right)^{\frac{1}{2^2}} \ldots \left(1 + \frac{2^n}{v'}\right)^{\frac{1}{2^n}},$$

mais si $n$ est très-grand on a, à peu près,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1;$$

donc, en divisant les deux membres par $v'$, et en posant $\frac{1}{v'} = \alpha$, nous aurons

$$1 + \alpha x = (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1 + 2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (1 + 2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}} \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous avons maintenant à déterminer la mise $x$ que peut risquer le joueur.

Observons que les facteurs de l'expression (2) convergent vers l'unité, car

$$(1 + 2^u\alpha)^2 > 1 + 2 \cdot 2^u\alpha,$$

ou $$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{2^{u+1}}{2^u}} > 1 + 2^{u+1}\alpha,$$

ou $$(1 + 2^u x)^{\frac{1}{2^u}} > (1 + 2^{u+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{u+1}}}.$$

D'un autre côté

$$\text{l.}\,(1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = \frac{1}{2^u}\,\text{l.}\,(1 + 2^u\alpha) = \frac{1}{2^u}\,\text{l.}\,2^u\left(\frac{1}{2^u} + \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2^u}\,\text{l.}\,2^u + \frac{1}{2^u}\,\text{l.}\left(\alpha + \frac{1}{2^u}\right) = \frac{u}{2^u}\,\text{l.}\,2 + \frac{1}{2^u}\,\text{l.}\left(\alpha + \frac{1}{2^u}\right);$$

or les deux termes de cette somme convergent vers 0, lorsque $u$ tend vers $\infty$ ; donc

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = 1 \text{ pour } u = \infty.$$

Le cas le plus avantageux pour A est celui où l'on suppose $n = \infty$.

Si l'on prend $u$ tel que $2^u\alpha = 10$ au moins, on pourra s'arrêter dans la formule (2) au terme $(1 + 2^{u-1})^{\frac{1}{2^{u-1}}}$, et l'on aura par cette formule :

$$\lg(1 + \alpha x) = \frac{1}{2}\lg(1 + 2\alpha) + \frac{1}{2^2}\lg(1 + 2^2\alpha) + \cdots + \frac{1}{2^{u-1}}\lg(1 + 2^{u-1}\alpha). \quad (3)$$

En supposant connu $v'$, et par suite $\alpha = \frac{1}{v'}$, cette dernière formule donnera $x$, et l'on aura alors $v = v' + x$.

Exemple. Soit $v' = 100$, donc $\alpha = 0{,}01$ ; on trouve d'après Laplace $x = 7{,}89$ ; donc $v = 107{,}89$.

Si donc A possède fr. 107,89 avant le jeu, la prudence lui prescrit de ne risquer à ce jeu que fr. 7,89, pour conserver la même fortune morale.

# CHAPITRE V.

## PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS FUTURS.

—

### THÉORIE.

#### I. — Causes.

67. Définition des causes. Les circonstances qui concourent à la production d'un événement sont ou constantes, ou variables à chaque instant.

Les premières, qui s'appellent *chances*, peuvent être connues ou inconnues, elles sont susceptibles d'une évaluation exacte ou approchée.

Les secondes ne peuvent pas s'évaluer.

Ces deux espèces de circonstances contribuent toutes deux à la production de l'événement et en constituent les vraies causes.

Mais dans le calcul des probabilités on appelle *causes* les circonstances de la première espèce, ou les chances, et *hasard* l'ensemble des circonstances variables qu'il est impossible d'évaluer.

Si les chances sont connues, la probabilité de l'événement sera connue, et l'on dit que sa cause est certaine.

Si un événement peut être attribué à plusieurs causes, sans qu'on sache à laquelle il est dû, on dit que sa cause est incertaine, et les diverses causes auxquelles il peut être attribué seront plus ou moins probables, selon qu'elles consisteront en plus ou moins de chances favorables.

Si les chances sont inconnues, et qu'on puisse faire sur leur valeur un certain nombre d'hypothèses également admissibles, mais dont une seule est nécessairement vraie, ces hypothèses pourront être regardées comme des causes plus ou moins pro-

bables, et l'on devra regarder comme vraie celle qui a pour elle la plus grande probabilité.

Les causes ou les hypothèses peuvent être également possibles, ou avoir des possibilités diverses.

Soit $x$ la probabilité d'un événement simple; $y = f(x)$ la probabilité d'un événement composé E, dépendant de cet événement simple; on dit que $x$ est la cause de E, et que la probabilité de E, due à cette cause, est $y$.

Si $x$ est connu, on dit que la cause de E est certaine.

Si $x$ est inconnu, et que l'on sache seulement qu'il doit avoir l'une des valeurs $a, b \ldots i$, chacune de ces valeurs pourra être regardée comme une cause incertaine de E, et ces causes auront en général des probabilités diverses.

La probabilité de chaque hypothèse, ou cause, est égale au nombre des chances favorables à cette hypothèse, divisé par le nombre total des chances.

Exemple. Si l'on extrait une boule blanche d'une urne qui contient des boules blanches ou noires, au nombre de 8, on pourra faire les hypothèses suivantes :

8 bl. 0 n.; 7 bl. 1 n.; 6 bl. 2 n.; 5 bl. 3 n.;
4 bl. 4 n.; 3 bl. 5 n.; 2 bl. 6 n.; 1 bl. 7 n.

Les causes de l'extraction d'une boule blanche consistent dans les huit hypothèses

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 bl.

auxquelles répondent les probabilités propres :

$$\frac{8}{8}, \frac{1}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}.$$

*Principes fondamentaux.*

68. 1° Les probabilités des hypothèses ou des causes sont proportionnelles au nombre des chances favorables propres à ces hypothèses.

2° La valeur la plus probable de la cause inconnue d'un événement E est celle qui rend la probabilité $y = f(x)$ de cet événement un maximum.

3° Soit $v$ la probabilité d'un événement E;

V celle d'un événement composé EF;

P la probabilité que E ayant eu lieu, F aura lieu aussi;

La probabilité V sera évidemment donnée par

$$V = Pv,$$

d'où

$$P = \frac{V}{v} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

Ces trois principes constituent le fondement de la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, conclue de l'observation des événements passés.

69. Premier théorème (de Bayes). *La probabilité d'un événement* E, *en vertu de la cause* $c_i$ (i *pouvant prendre les valeurs* 1, 2, ... n), *étant* $p_i$, *la probabilité que la cause* $c_i$ *aura agi dans la production de cet événement sera*

$$P_i = \frac{p_i}{\sum_1^n p_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Première démonstration. Soit $a_i$ le nombre des chances favorables à E, constituant la cause $c_i$, $\mu$ le nombre de toutes les chances également possibles; la probabilité propre à $c_i$ sera

$$p_i = \frac{a_i}{\mu}.$$

En vertu du principe 1, on a:

$$P_1 : P_2 : \cdots : P_i : \cdots : P_n = a_1 : a_2 : \cdots : a_i : \cdots : a_n;$$

donc, à cause de $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$ :

$$P_i : 1 = a_i : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_i}{\mu} : \frac{a_1}{\mu} + \frac{a_2}{\mu} + \cdots + \frac{a_n}{\mu}$$
$$= p_i : p_1 + p_2 + \cdots + p_n;$$

d'où

$$P_i = \frac{p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Deuxième démonstration (de Laplace).

Soit E l'événement dû aux causes $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ;

$P_i$ la probabilité que $c_i$ aura lieu quand E a eu lieu ;

V la probabilité de l'événement composé $Ec_i$ ;

$v$ la probabilité de E ;

on a, en vertu du principe 3 :

$$P_i = \frac{V}{v}.$$

Les causes étant également possibles, la probabilité de $c_i$ est $\frac{1}{n}$ ; et si nous appelons $p_i$ la probabilité de E quand $c_i$ a lieu, nous aurons pour la probabilité de l'événement composé $Ec_i$

$$V = \frac{1}{n} p_i.$$

Comme l'événement E ne peut arriver que par l'une des causes $c_1, c_2 \ldots c_n$, il s'ensuit que sa probabilité sera égale à la somme des probabilités de $Ec_1$, $Ec_2 \ldots Ec_n$ ; donc :

$$V = \frac{1}{n} p_1 + \frac{1}{n} p_2 + \cdots + \frac{1}{n} p_n = \frac{1}{n} \sum_1^n p_i ;$$

et par suite

$$P_i = \frac{V}{v} = \frac{p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Donc la probabilité d'une des causes est égale à la probabilité de l'événement qui est due à cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités semblables.

70. Remarque I. La probabilité de l'événement E due indifféremment à l'une des causes $c_a \ldots c_i \ldots c_b$ étant représentée par P, on aura

$$P = P_a + \cdots + P_i + \cdots + P_b = \sum_a^b P_i = \frac{\sum_a^b p_i}{\sum_1^n p_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Remarque II. La possibilité de la plupart des événements simples est inconnue, considérée *à priori;* elle nous paraît également susceptible de toutes les valeurs possibles, depuis 0 jusqu'à 1.

Soit $x$ cette possibilité; $y$ la probabilité d'un événement composé A : on aura $y = fx$, et $x$ pourra être considéré comme la cause de A, donc $y$ est la probabilité quand $x$ est certain, si donc $P_i$ est la probabilité de $x$, on aura

$$P_i = \frac{y}{\int_0^1 y} = \frac{fx}{\int_0^1 fx} = \frac{fxdx}{dx\int_0^1 fx};$$

mais en vertu de l'identité suivante, dans laquelle $b = a + nda$ :

$$\int_0^b fxdx = dx\{fa + f(a + da) + \cdots + f(a + n - 1da)\}$$

on peut écrire $\int_0^1 fxdx = dx\int_0^1 fx$; et par suite on a

$$P_i = \frac{fxdx}{\int_0^1 fxdx} = \frac{ydx}{\int_0^1 ydx}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

La probabilité P que $x$ est compris entre $a$ et $b$ sera donc

$$P = \frac{\int_a^b ydx}{\int_0^1 ydx}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Remarque III. Soit $u = f(x, y)$ la probabilité d'un événement E composé d'événements simples de deux espèces différentes, dont les probabilités sont $x$ et $y$; en regardant $x$ et $y$ comme les causes de E, la probabilité de ces causes simultanées sera

$$P_i = \frac{u}{\int_0^1\int_0^1 u} = \frac{udxdy}{dxdy\int_0^1\int_0^1 u} = \frac{udxdy}{\int_0^1\int_0^1 udxdy};$$

et la probabilité que $x$ est compris entre $a$ et $b$, en même temps que $y$ est compris entre $\alpha$ et $\beta$, sera

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta dy\int_a^b udx}{\int_0^1\int_0^1 udxdy}.$$

En général, si un événement E, dont la probabilité est

$$u = f(x, y, \dots w)$$

est dû à des événements simples dont les probabilités sont désignées par $x, y \dots w$, la probabilité que les causes inconnues sont comprises entre les limites

$$x = \begin{cases} b \\ a \end{cases} \quad y = \begin{cases} \beta \\ \alpha \end{cases} \dots w = \begin{cases} \delta \\ \gamma \end{cases},$$

sera

$$P = \frac{\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \dots \int_\gamma^\delta u dw}{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u dx dy \dots dw}.$$

Remarque IV. Nous avons supposé jusqu'à présent que toutes les causes $c_i$ étaient également possibles. Supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi, et appelons $q_i$ la probabilité de $c_i$ avant l'observation de E ; $p_i$ désignant toujours la probabilité de l'événement E en vertu de la cause $c_i$ considérée comme certaine, on aura, après l'observation de l'événement E, pour la probabilité due au concours des probabilités indépendantes $q_i$ et $p_i$ :

$$p_i' = q_i p_i ;$$

et pour la probabilité $P_i'$ que la cause $c_i$ a agi pour produire E :

$$P_i' = \frac{p_i'}{\sum_1^n p_i'} = \frac{q_i p_i}{\sum_1^n q_i p_i}.$$

De même si $z = \varphi x$ est la probabilité de $x$ avant l'observation de l'événement composé E, et $y = fx$ la probabilité de cet événement après l'observation, la probabilité que l'inconnue $x$ est comprise entre $a$ et $b$ sera

$$P = \frac{\int_a^b yz dx}{\int_0^1 yz dx}.$$

71. Deuxième théorème (de Laplace). *La probabilité que la possibilité des événements simples est comprise entre des limites*

*qui se resserrent de plus en plus, approche sans cesse de l'unité à mesure que le nombre des événements augmente; de manière que, dans la supposition d'un nombre infini d'événements simples, ces deux limites venant à se réunir, et la probabilité se changeant en certitude, la véritable possibilité des événements simples est exactement égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable.*

Démonstration. Soit $y = (fx)^{\mu}$ la probabilité d'un événement E, $\mu$ étant très-grand, et $x$ la probabilité simple inconnue; soit $m$ la valeur de $x$ qui rend $y$ maximum, c'est-à-dire celle qu'on déduit de $\frac{dy}{dx} = 0$. Nommons $y_m$ ce maximum et posons

$$y = y_m e^{-t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y}.$$

Supposons que $x$ diffère peu de $m$ entre les limites $\alpha$ et $\beta$, et soit

$$\gamma = \sqrt{\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y_\beta}, \quad -\gamma' = \sqrt{\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y_\alpha},$$

on aura approximativement

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dx = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt, \quad \ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

formule dans laquelle on a posé

$$u = \frac{x - m}{\sqrt{\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y}}, \qquad u_m = \left( \frac{x - m}{\sqrt{\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y}} \right)_{x=m}.$$

Soient ensuite $x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$ les valeurs de $x$ qui rendent $y$ nul, on aura (*)

$$\int_{a}^{b} y dx = y_m u_m \sqrt{\pi}. \quad \ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Cela posé, la probabilité P que $x$ est compris entre $m - \theta$ et $m + \theta$ sera :

$$\text{P} = \frac{\int_{m-\theta}^{m+\theta} y dx}{\int_{0}^{1} y dx} = \frac{\text{N}}{\text{D}}.$$

(*) Pour les formules (A) et (B) voir la note II à la fin du volume.

Or, si $\theta$ est très-petit, et que $y$, ce qui arrive presque toujours, devienne nul aux deux limites 0 et 1, on aura, par la formule (A) :

$$N = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

en faisant

$$\gamma = \sqrt{\text{l. } y_m - \text{l. } y_{m+\theta}} \quad \text{et} \quad \gamma' = \sqrt{\text{l. } y_m - \text{l. } y_{m-\theta}};$$

et par la formule (B) :

$$D = y_m u_m \sqrt{\pi};$$

par conséquent

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Or, puisque

$$y = (fx)^{\mu},$$

d'où

$$\text{l. } y = \mu \text{ l. } fx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

on aura :

$$\text{l. } y_{m-\theta} = \mu \text{ l. } f(m-\theta) = \mu \text{ l. } fm - \mu\theta \frac{d \text{ l. } fm}{dm} + \mu \frac{\theta^2}{1.2} \frac{d^2 \text{ l. } fm}{dm^2} - \cdots$$

mais en vertu de (1) :

$$\text{l. } y_m = \mu \text{ l. } fm.$$

En outre, comme

$$\frac{d \text{ l. } y}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y},$$

et que, pour $x = m$, $\frac{dy}{dx} = 0$, on aura :

$$\frac{d \text{ l. } fm}{dm} = 0.$$

Enfin, puisque

$$\frac{d^2 \text{ l. } fx}{dx^2} = \frac{d^2 fx}{fx dx^2} - \left(\frac{dfx}{fx dx}\right)^2$$

et que, pour $x = m$, $\frac{dfx}{dm} = 0$, on aura

$$\frac{d^2 \text{ l. } fm}{dm^2} = \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_{x=m} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^2 y}{y dx^2}\right)_{x=m}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de l. $y_{m-\theta}$, elle devient :

$$\text{l. } y_{m-\theta} = \text{l. } y_m + \frac{\mu\theta^2}{2} \left(\frac{d^2 fx}{fx dx^2}\right)_m - \text{etc.}$$

De même

$$\text{l.}\, y_{m+\theta} = \text{l.}\, y_m + \frac{\mu\theta^2}{2}\left(\frac{d^2fx}{fxdx^2}\right)_m + \text{etc.}$$

D'où l'on tire, en négligeant les termes en $\theta^3$, etc. :

$$\text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y_{m+\theta} = \text{l.}\, y_m - \text{l.}\, y_{m-\theta} = -\frac{\mu\theta^2}{2}\left(\frac{d^2fx}{fxdx^2}\right)_m = -\mu\theta^2\left(\frac{1}{\mu}\frac{d^2y}{2ydx^2}\right)_m = \gamma^2 = \gamma'^2.$$

L'expression de la probabilité P deviendra donc :

$$\text{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt,$$

en posant

$$\gamma = \theta\sqrt{\mu}.k,$$

d'où

$$\theta = \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}},$$

et

$$k = \sqrt{-\left(\frac{d^2fx}{2fxdx^2}\right)_m} = \sqrt{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{d^2y}{2ydx^2}\right)_m},$$

P sera la probabilité que $x$ est compris entre

$$m \pm \theta = m \pm \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}};$$

et l'on voit que ces limites se resserrent à mesure que $\mu$ croît. De plus P tend vers l'unité à mesure que $\gamma$ augmente; et si $\gamma$ est suffisamment grand, mais fini, on aura

$$\text{P} = 1, \quad \theta = 0, \quad \text{et} \quad x = m,$$

valeur la plus probable.

72. Remarque I. *Règle pour juger si la cause* x *est indiquée avec une grande probabilité.*

Si nous développons l'expression de P en série, nous aurons

$$\text{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}dt = 1 - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma\sqrt{\pi}}(1 - \cdots).$$

Or nous avons posé

$$\gamma^2 = -\theta^2\left(\frac{d^2y}{2ydx^2}\right)_m;$$

donc

$$P = 1 - \frac{e^{\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}}{\theta\sqrt{\pi}\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}} + \cdots = 1 - \frac{e^{\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}}{\sqrt{\pi}\sqrt{-\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m}} + \cdots;$$

P sera donc fort grand si $-\theta^2\left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_m$ est un peu considérable, onze ou douze, par exemple.

75. Remarque II. Il est maintenant facile de démontrer le théorème inverse de Bernouilli.

Soient $m_1$, $m_2$ les nombres de fois que les événements contraires A, B se répètent en un très-grand nombre $s$ d'épreuves; $x_1$ la probabilité inconnue de A.

Nous avons trouvé

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt$$

pour la probabilité que $x_1$ est compris entre

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\mu \cdot k}}.$$

Dans le cas actuel nous aurons

$$y = x_1^{m_1}(1-x_1)^{m_2} = \left(x_1(1-x_1)^{\frac{m_2}{m_1}}\right)^{m_1},$$

et par suite

$$\mu = m_1.$$

De plus :

$$\text{l.}\, y = m_1 \,\text{l.}\, x_1 + m_2 \,\text{l.}\,(1-x_1),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\,\text{l.}\, y}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx_1} = \frac{m_1}{x_1} - \frac{m_2}{1-x_1} = \frac{m_1 - (m_1+m_2)\,x_1}{x_1(1-x_1)}.$$

La valeur de $x_1$ qui répond au maximum de $y$ est donc

$$m = \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{s}.$$

Dérivant de nouveau :

$$\frac{-d^2 \mathrm{l}.y}{dx^2} = \frac{m_1}{x_1^2} + \frac{m_2}{(1-x_1)^2};$$

d'où

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \mathrm{l}.y}{dx^2}\right)_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 y}{y dx^2}\right)_m = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1}{\left(\frac{m_1}{s}\right)^2} + \frac{m_2}{\left(1-\frac{m_1}{s}\right)^2}\right\} = \frac{s^3}{2m_1 m_2}.$$

Or nous avions posé

$$k = \sqrt{-\left(\frac{d^2 y}{y dx^2}\right)_m} = \sqrt{\frac{1}{m_1}\frac{s^3}{2m_1(s-m)_1}};$$

par suite P est la probabilité que $x_1$ est compris entre

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1 . k}} = \frac{m_1}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1}\sqrt{\frac{1}{m_1}\cdot\frac{s_3}{2m_1(s-m_1)}}} = \frac{m_1}{s} \pm \gamma\sqrt{\frac{2m_1(s-m_1)}{s^3}}.$$

### II. Événements futurs.

74. Troisième théorème. *La probabilité* $\Pi_i$ *de l'arrivée d'un événement futur* F, *en vertu de la cause* $c_i$ *d'un événement observé* E, *est égale au produit de la probabilité* $P_i$ *de la cause* $c_i$ *par la probabilité* $\varpi_i$ *que cette cause donne à l'événement.*

Démonstration. En effet $\Pi_i$ est la probabilité de l'événement composé qui résulte du concours de l'existence de la cause $c_i$ avec l'arrivée de l'événement F, la cause $c_i$ étant supposée exister. On a par suite

$$\Pi_i = P_i \varpi_i = \frac{\varpi_i p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

Remarque I. Si nous faisons $p_i = y = fx$, $x$ étant la cause, $p_i$ étant la probabilité de E quand $x$ est certain, et de même $\varpi_i = z = \psi x$, probabilité de F en vertu de $x$, nous aurons

$$\Pi_i = \frac{yz}{\sum_0^1 y} = \frac{yzdx}{\int_0^1 y dx}.$$

La probabilité Π que l'événement F arrivera en vertu des valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$ sera

$$\Pi = \frac{\int_a^b yzdx}{\int_0^1 ydx}.$$

Remarque II. Si les causes $c_i$ étaient inégalement possibles avant l'observation de E, et que nous désignions par $q_i$ la possibilité de $c_i$, nous aurions

$$\Pi_i' = P_i'\varpi_i = \frac{\varpi_i q_i p_i}{\sum_1^n q_i p_i}.$$

Remarque III. La probabilité que l'événement F arrivera en vertu de l'une quelconque des causes $c_1, c_2 \ldots c_n$ sera

$$\Pi' = \Pi_1 + \cdots + \Pi_n = \frac{\sum_1^n \varpi_i p_i}{\sum_1^n p_i}.$$

*Remarque générale.*

Les problèmes de la théorie des hasards sont de trois espèces :

1° *L'événement est incertain, les causes ou les probabilités simples sont connues. On demande alors la probabilité de l'événement incertain.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans le rapport donné de $p$ à $q$; on demande la probabilité de tirer une boule blanche.

La cause $\frac{p}{p+q}$ est certaine; l'événement est incertain.

2° *L'événement est certain; la cause ou probabilité simple est incertaine. On demande la probabilité de chaque supposition que l'on peut faire sur la valeur de la cause ou probabilité simple inconnue.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans un rapport inconnu; on en tire une blanche : quelle est la probabilité de la supposition que le rapport est égal à $p : q$?

L'événement est certain ; sa cause $\frac{p}{p+q}$ est incertaine.

3° *L'événement passé est certain ; la cause est incertaine, de même que l'événement futur. On demande la probabilité de cet événement.*

Exemple. Une urne renferme des boules blanches et noires dans un rapport inconnu ; on en tire $p + q$ boules, dont $p$ blanches et $q$ noires ; on demande quelle est la probabilité de tirer une nouvelle boule blanche.

*Applications.*

75. Premier exemple. Une urne contient des boules blanches et noires, au nombre de $r$ ; on en tire une blanche ; quelle est la probabilité qu'elle contient $n$ boules blanches ?

Solution. Les diverses hypothèses ou causes de l'extraction d'une boule blanche sont :

1 blanche, $r-1$ noires ; cause $c_1$
2 blanches, $r-2$ noires ; » $c_2$
. . . . . .
$r$ blanches, 0 noire ; cause $c_r$.

Les probabilités de l'extraction d'une blanche, dues à ces différentes causes, sont

$$p_1 = \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{2}{r}, \cdots p_r = \frac{r}{r}.$$

Mais la supposition que l'urne renferme $n$ boules blanches donne

$$p_n = \frac{n}{r}.$$

On a donc, pour le théorème de Bayes :

$$P_n = \frac{\frac{n}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \cdots + \frac{r}{r}} = \frac{2n}{r(r+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Deuxième exemple. *Une urne renferme* r *boules, blanches et noires; on en extrait une blanche; on demande la probabilité qu'une seconde boule que l'on extrait sera blanche.*

Solution. Il y a deux cas à considérer, selon qu'on remet, ou non, la boule extraite dans l'urne.

*Premier cas.* L'événement E est l'extraction d'une boule blanche, l'événement F aussi. Si l'urne contenait $n$ boules blanches, les probabilités de E et de F seraient

$$p_n = \frac{n}{r}, \quad \varpi_n = \frac{n}{r};$$

on aura donc

$$\Pi = \frac{\varpi_1 p_1 + \cdots + \varpi_r p_r}{p_1 + \cdots + p_r} = \frac{\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + r^2}{r^2}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{\dfrac{r(r+1)(2r+1)}{1.2.3r^2}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{2r+1}{3r} = \frac{2+\dfrac{1}{r}}{3}.$$

Cette probabilité converge donc vers $\frac{2}{3}$ à mesure que $r$ augmente :

En effet, si l'on suppose le nombre des boules infini, et qu'on désigne par $x$ la probabilité d'extraire une boule blanche, $x$ pouvant varier depuis 0 jusqu'à 1, on aura

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{2}{3}.$$

*Deuxième cas.* Si la boule extraite n'a pas été remise dans l'urne, on a

$$\varpi_n = \frac{n-1}{r-1}; \quad p_n = \frac{n}{r};$$

donc

$$\Pi = \frac{\dfrac{1.2 + 2.3 + \cdots + (r-1)r}{(r-1)r}}{\dfrac{1 + 2 + \cdots + r}{r}} = \frac{\dfrac{(r-1)r(r+1).1.2}{1.2.3(r-1)r}}{\dfrac{1}{2}(r+1)} = \frac{2}{3}.$$

Troisième exemple. *Le nombre de boules contenues dans une urne ne peut excéder trois; on a extrait* x *boules blanches en* n *tirages, en remettant dans l'urne la boule extraite; on demande la probabilité de l'extraction d'une nouvelle boule blanche.*

Solution. Les événements E et F sont l'extraction d'une boule blanche; $x$ n'étant ni 0 ni $n$, on ne peut faire que les trois hypothèses :

1 blanche et 1 noire : cause $c_1$ des événements E et F,
2 blanches et 1 » : » $c_2$ » »
1 blanche et 2 noires : » $c_3$ » »

Les probabilités de E, dues à ces causes, sont :

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \frac{1}{2^n}, \text{ probabilité due à } c_1;$$

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^x}{3^n}, \quad » \quad » \quad c_2;$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^{n-x}}{3^n}, \quad » \quad » \quad c_3.$$

Les probabilités de F, dues à ces trois causes, sont :

$$\varpi_1 = \frac{1}{2}, \text{ probabilité due à } c_1;$$

$$\varpi_2 = \frac{2}{3}, \quad » \quad » \quad c_2;$$

$$\varpi_3 = \frac{1}{3}, \quad » \quad » \quad c_3;$$

la probabilité de $c_1$ est donc

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n} + \frac{2^x}{3^n} + \frac{2^{n-x}}{3^n}} = \frac{3^n}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n-x}}.$$

On trouverait de même, pour celles de $c_2$ et de $c_3$ :

$$P_2 = \frac{2^{n+x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}}; \quad P_3 = \frac{2^{2n-x}}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n+x}};$$

et par suite :

$$\Pi = P_1\varpi_1 + P_2\varpi_2 + P_3\varpi_3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3^n + \frac{2}{3}\cdot 2^{n+x} + \frac{1}{3}\cdot 2^{2n-x}}{3^n + 2^{x+n} + 2^{2n-x}}.$$

Quatrième exemple. *Une urne renferme une infinité de boules blanches et noires; on en a extrait une blanche au premier tirage : on demande la probabilité d'en amener ensuite* n *noires?*

En appelant $x$ la probabilité de l'extraction d'une boule blanche; et $1-x$ celle de l'extraction d'une noire, on aura :

$$P = \frac{\int_0^1 x(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Cinquième exemple. *Deux joueurs,* A *et* B, *dont les probabilités de gagner sont inconnues, jouent à cette condition que celui qui aura le premier gagné* n *parties obtiendra l'enjeu* a. *Ils sont forcés d'abandonner le jeu, lorsqu'il manque* b *parties à* A, *et* c *parties à* B, *pour gagner l'enjeu. Comment celui-ci doit-il se partager entre les deux joueurs?*

Soit $x$ la probabilité qu'a A de gagner une partie;

» $1-x$ » » B » »

$x$ pouvant varier entre 0 et 1.

La probabilité que A gagne $n-b$ parties, et B, $n-c$ parties, sur un nombre total $2n-b-c$, est

$$P = G\,.\,x^{n-b}(1-x)^{n-c},$$

et la probabilité d'une valeur $x$ de la cause, en vertu de l'événement observé, sera (n° 70) :

$$\Pi = \frac{x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}.$$

La somme S qui doit revenir à B, dans l'hypothèse de $x = x$, est (n° 59) :

$$S = a(1-x)^{b+c-1}\left\{1 + \frac{x}{1-x}(b+c-1) + \frac{x^2}{(1-x)^2}\frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{x^{b-1}}{(1-x)^{b-1}}\frac{(b+c-1)\ldots(c+1)}{1\,.\,2\,..\,(b-1)}\right\}. \quad (a)$$

Donc, la somme qui doit lui revenir dans toutes les hypothèses possibles, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, sera

$$S' = \int_0^1 \Pi\,.\,S. = \frac{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-1}\,dx\,\{(a)\}}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}.$$

Effectuant les différentes intégrations indiquées dans cette expression, au moyen de la formule

$$\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx = \frac{1\,.\,2\ldots(n-c)}{(n-b+1)\ldots(2n-b-c+1)},$$

on trouvera,

$$S' = \frac{a(n-c+1)-(n+b-1)}{(2n-b-c+2)\ldots 2n}\left\{1 + \frac{b+c-1}{2}\cdot\frac{n-b+1}{b+n-1} + \frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{(n-b+1)(n-b+2)}{(n+b-1)(n+b-2)} + \ldots + \frac{(b+c-1)\ldots(c+1)}{1\,.\,2\ldots(b-1)}\cdot\frac{(n-b+1)\ldots(n-1)}{(b+n-1)\ldots(n+1)}\right\}.$$

Sixième exemple. *Deux urnes* A *et* B *contiennent, la première* p *boules blanches et* q *noires, la seconde* p' *blanches et* q' *noires. On extrait de l'une de ces urnes* (on ignore laquelle) m + n *boules, dont* m *blanches, et* n *noires : quelle est la probabilité que l'urne dont on a extrait ces boules est* A *ou* B ?

La probabilité d'extraire $m$ blanches et $n$ noires, dans la première hypothèse, est

$$\mathrm{P} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p^{m-1}q^{n-1}}{(p+q)^{m+n-1}};$$

et dans la seconde hypothèse, cette probabilité est :

$$\mathrm{P}' = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p'^{m-1}q'^{n-1}}{(p'+q')^{m+n-1}}.$$

La probabilité de la première hypothèse est donc :

$$\Pi = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}+\mathrm{P}'} = \frac{\dfrac{p^{m-1}q^{n-1}}{(p+q)^{m+n-1}}}{\dfrac{p^{m-1}q^{n-1}}{(p+q)^{m+n-1}} + \dfrac{p'^{m-1}q'^{n-1}}{(p'+q')^{m+n-1}}}.$$

De même on aurait pour la probabilité de la seconde hypothèse :

$$\Pi' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}.$$

## CHAPITRE V.

### PROBLÈMES SUR LES NAISSANCES.

—

76. Premier problème. *On a observé que, sur un grand nombre* $p+q$ *d'enfants, il est né* p *garçons et* q *filles : on demande la probabilité* P *que sur* $m+n$ *enfants qui doivent naître, il y aura* m *garçons et* n *filles.*

Solution. Soit $x$ la probabilité de la naissance d'un garçon; $1-x$ d'une fille.

La probabilité que, sur $p+q$ enfants, il y aura $p$ garçons et $q$ filles, est (n° 20) :

$$\varpi_1 = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,x^p(1-x)^q\,.$$

De même, la probabilité que, sur $m+n$ enfants, il y aura $m$ garçons et $n$ filles, est :

$$\varpi_2 = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,x^m(1-x)^n\,.$$

La probabilité cherchée sera donc

$$P = \frac{\int_0^1 \varpi_2\varpi_1 dx}{\int_0^1 \varpi_1 dx} = k\,\frac{\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx},$$

en posant

$$k = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,.$$

Or

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q}{1.2\ldots p(p+1)\ldots(p+q+1)}$$

$$= \frac{1.2\ldots q}{(p+1)\ldots(p+q+1)}\,.$$

De même

$$\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}dx = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,(q+n)}{(p+m+1)\,\ldots\,(p+q+m+n+1)};$$

donc

$$\mathrm{P} = k\,\frac{(q+1)\,\ldots\,(q+n)\,(p+1)\,\ldots\,(p+m)}{(p+q+2)\,\ldots\,(p+q+m+n+1)};$$

mais, $p$ et $q$ étant très-grands, nous pouvons écrire approximativement (*)

$$(q+1)\,\ldots\,(q+n) = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,(q+n)}{1\,.\,2\,\ldots\,q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}}\,e^{-n};$$

$$(p+1)\,\ldots\,(p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}}\,e^{-m};$$

$$(p+q+1)\,\ldots\,(p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}\,e^{-(m+n)};$$

et

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n}.$$

En substituant ces valeurs approchées dans l'expression de P, nous aurons

$$\mathrm{P} = k\,\frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}\,(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}\,(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}\,p^{p+\frac{1}{2}}\,(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{5}{2}}}. \quad . \quad . \quad (a)$$

Remarque. Si $p$ et $q$ sont très-grands, la vraie possibilité de la naissance d'un garçon sera $\frac{p}{p+q}$, et d'une fille $\frac{q}{p+q}$.

En effet, si $\mu$ et $s$ sont petits relativement à $p$ et à $q$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}.\,(p+\mu)^{p+s} &= (p+s)\,\mathrm{l}.\,(p+\mu) = (p+s)\left\{\mathrm{l}.\,p + \mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu}{p}\right)\right\} \\
&= (p+s)\left\{\mathrm{l}.\,p + \frac{\mu}{p} - \frac{\mu^2}{2p^2} + \ldots\right\} \\
&= (p+s)\,\mathrm{l}.\,p + (p+s)\,\frac{\mu}{p} = (p+s)\,\mathrm{l}.\,p + \mu.
\end{aligned}$$

(*) Voir la note I, à la fin de l'ouvrage.

d'où $$(p+s)^{p+s} = p^{p+s} \cdot e^{\mu}.$$

D'après cela, si $m$ et $n$ sont petits relativement à $p$ et $q$, on pourra écrire

$$(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^{n} p^{q+n+\frac{1}{2}}$$

$$(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^{m} p^{p+m+\frac{1}{2}}$$

$$(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}} = e^{m+n} (p+q)^{p+q+m+n+\frac{5}{2}},$$

et la formule $(a)$ deviendra, par la substitution de ces valeurs :

$$\mathrm{P} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}.$$

Or cette probabilité est précisément celle qu'on obtiendrait si l'on supposait que la possibilité de la naissance d'un garçon est $\frac{p}{p+q}$, celle d'une fille $\frac{q}{p+q}$.

Il est donc naturel de conclure que ces possibilités sont à peu près dans le rapport de $p$ à $q$, si ces nombres sont très-grands, et par suite que la vraie possibilité de la naissance d'un garçon est approximativement égale à $\frac{p}{p+q}$.

77. Deuxième exemple. *On observe constamment que, sur un très-grand nombre* p + q *de naissances, le nombre* p *des garçons est supérieur au nombre* q *des filles; chercher la probabilité que la possibilité de la naissance des garçons surpasse celle de la naissance des filles.*

Soit $x$ la probabilité de la naissance d'un garçon; $1-x$, d'une fille.

Désignons par $c$ le coefficient du terme $x^p(1-x)^q$ du binôme $(x+1-x)^{p+q}$; la probabilité que, sur $p+q$ naissances, $p$ seront masculines, $q$ féminines, est

$$cx^p(1-x)^q.$$

Posons $y = x^p(1-x)^q$, la probabilité d'une valeur de $x$ sera (n° 70) :

$$\frac{cydx}{\int_0^1 cydx} = \frac{ydx}{\int_0^1 ydx}.$$

Et la probabilité que la valeur de $x$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}$ sera par suite

$$P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Nous aurons donc, pour la probabilité que $x$ surpasse $\frac{1}{2}$, ou que $x$ est $> 1 - n$ :

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = 1 - \frac{N}{D}.$$

78. *Calcul de* $N = \int_0^{1/2} y\,dx$, expression dans laquelle

$$y = x^p (1 - x)^q.$$

Désignons par $y_0$ et $y_{1/2}$ ce que devient $y$ pour $x = 0$ et $x = 1/2$ :

$$y_0 = 0 \,.\, y_{1/2} = \frac{1}{2^{p+q}};$$

si nous posons $y = y_0 e^{-t}$, aux limites $\{_0^1$ de $x$ répondront celles $\{_0^\infty$ de $t$; tandis qu'en posant $y = y_{1/2} e^{-t}$, aux limites $\{_{1/2}^1$ de $x$ répondront celles $\{_0^\infty$ de $t$.

Calculons N au moyen de l'expression

$$N = \int_0^1 y\,dx - \int_{1/2}^1 y\,dx;$$

nous aurons, en remplaçant $y$ par l'une ou l'autre des expressions précédentes :

1°. $$\int_0^1 y\,dx = y_0 \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt;$$

2°. $$\int_{1/2}^1 y\,dx = y_{1/2} \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Cherchons les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ qui entrent dans ces deux intégrales.

$x$ étant une fonction de $t$, développons-la par la formule de Mac-Laurin :

$$x = f(t) = f(0) + f'(0)\,t + f''(0)\frac{1.2}{t^2} + \cdots$$
$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

1° Pour ce cas nous avons :

$$t = \text{l.}\frac{y_0}{y};\quad dt = -\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{y\dfrac{dx}{dy}} = \frac{dx}{v},$$

en posant

$$v = -y\frac{dx}{dy};$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = v;\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\dfrac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx},$$

et par suite :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = v_0;\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0}.$$

2° Pour ce cas-ci :

$$y = y_{1/2}e^{-t};$$

d'où, en procédant comme plus haut :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_{1/2};\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}.$$

Par suite :

1° $$x = v_0 t + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0}\frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

2° $$x = v_{1/2}t + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1.2} + \cdots$$

d'où l'on déduit :

1° $$\frac{dx}{dt} = v_0 + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=0} t + \cdots = v_0\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} t + \cdots\right\}.$$

2° $$\frac{dx}{dt} = v_{1/2} + \left(\frac{vdv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} t + \cdots = v_{1/2}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} t + \cdots\right\}.$$

Substituant ces valeurs dans les intégrales précédentes, nous aurons

$$\int_0^1 y\,dx = v_0 y_0 \left\{ \int_0^\infty e^{-t}dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} \int_0^\infty te^{-t}dt + \cdots \right\}$$

$$= v_0 y_0 \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots \right\},$$

puisque toutes les intégrales de la parenthèse ont pour valeur 1.

$$\int_{1/2}^1 y\,dx = v_{1/2} y_{1/2} \left\{ \int_0^\infty e^{-t}dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} \int_0^\infty te^{-t}dt + \cdots \right\}$$

$$= v_{1/2} y_{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots \right\};$$

et par conséquent

$$\mathrm{N} = v_0 y_0 \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots \right\} - v_{1/2} y_{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots \right\}.$$

Déterminons les valeurs des expressions de $v$ et $\frac{dv}{dx}$.

De $y = x^p (1-x)^q$ on tire

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[p - (p+q)\,x\right],$$

d'où

$$v = -\frac{y\,dx}{dy} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)\,x}; \quad v_0 = 0; \quad v_{1/2} = -\frac{1}{2(p-q)};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x-1)\left[p-(p+q)\,x\right] + (p+q)\,x\,(x-1)}{\left[p-(p+q)\,x\right]^2};$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{p}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{1/2} = -\frac{p+q}{(p-q)^2};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de N, nous aurons :

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left\{ 1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} \right\}.$$

79. *Calcul de* $\mathrm{D} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

On sait que cette intégrale a pour valeur

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Mais nous allons la calculer par le procédé de Laplace.

Soit $a$ la valeur de $x$ qui rend $y$ maximum; nous aurons, en posant $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = 0$ :

$$p(1-a) - qa = 0;$$

d'où

$$a = \frac{p}{p+q}.$$

Et en appelant $y_a$ le maximum de $y$ :

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Si nous posons $y = y_a \cdot e^{-t^2}$, aux valeurs $0$, $a$, $1$ de $x$ répondront celles $-\infty$, $0$, $\infty$ de $t$; et par suite nous aurons

$$D = \int_0^1 y\,dx = y_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Faisons $x = a + vt$; $t$ sera très-petit quand $x$ différera peu de $a$; $v$ étant une fonction de $x$, si nous développons $x$ par la formule de Lagrange, nous obtiendrons :

$$x = a + v_{x=a} \cdot t + \left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_{x=a} \cdot \frac{t^2}{1.2} + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x=a} \cdot \frac{t^3}{1.2.3} + \cdots$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = v_a + \left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a t + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_a \frac{t^2}{1.2} + \cdots.$$

Substituant cette expression dans celle de D, on trouve :

$$D = \int_0^1 y\,dx = y_a \left\{ v_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_a \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \cdots \right\}.$$

Or on sait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}\,;\quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;\quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt = 0\,;$$

et par suite

$$\mathrm{D} = y_a\sqrt{\pi}\left[v_a + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.v^3}{dx^2}\right)_a + \cdots\right].$$

Mais nous avons posé

$$v = \frac{x-a}{t}\,,\quad y = y_a e^{-t^2}\,;$$

d'où

$$t = \sqrt{\mathrm{l}.\,y_a - \mathrm{l}.\,y},$$

et

$$v = \frac{x-a}{\sqrt{\mathrm{l}.\,y_a - \mathrm{l}.\,y}}\,.$$

Comme $t$ s'évanouit pour $x = a$, nous pourrons poser

$$t^2 \text{ ou } \mathrm{l}.\,y_a - \mathrm{l}.\,y = (x-a)^2\left\{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,(x-a) + \mathrm{C}\,(x-a)^2 + \cdots\right\};$$

d'où nous déduisons par des différentiations successives

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_{x=a} = \mathrm{A}\,;\quad \left(-\frac{d^3\,\mathrm{l}.\,y}{1.2.3\,dx^3}\right)_{x=a} = \mathrm{B}\,;\quad \left(-\frac{d^4\,\mathrm{l}.\,y}{1..4\,dx^4}\right)_{x=a} = \mathrm{C}\,;\text{ etc.}$$

et, en outre,

$$v = \frac{1}{\left\{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,(x-a)^2 + \cdots\right\}^{1/2}}\,;$$

d'où

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2}\right)_a}}\,.$$

Or, $\mathrm{l}.\,y = p\,\mathrm{l}.\,x + q\,\mathrm{l}.\,(1-x)$; et par suite

$$-\frac{d^2\,\mathrm{l}.\,y}{dx^2} = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2}\,.$$

Faisant $x = a = \frac{p}{p+q}$, nous aurons :

$$-\left(\frac{d^2 \cdot y}{dx^2}\right)_a = \frac{(p+q)^5}{pq};$$

et

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^5}}.$$

Il nous reste à chercher $\left(\frac{d^2 \cdot v^5}{dx^2}\right)_a$. Nous avons :

$$\begin{aligned} v^5 &= \left[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \cdots\right]^{-5.2} \\ &= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a) + \cdots; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d^2 \cdot v^5}{dx^2} = 2A_2 + (x-a)(\cdots);$$

et

$$\left(\frac{d^2 \cdot v_5}{dx^2}\right)_a = 2A_2.$$

$A_2$ est le coefficient de $(x-a)^2$, dans le développement de $v^5$, qui est :

$$\left[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \cdots\right]^{-\frac{5}{2}}$$
$$= A^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}A^{-\frac{5}{2}}B(x-a) + \left[-\frac{5}{2}A^{-\frac{5}{2}} + \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right](x-a)^2 + \cdots$$

On a donc

$$A_2 = \left[-\frac{5}{2}A^{-\frac{5}{2}} + \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right] = -\frac{5}{2}\frac{C}{A^{\frac{5}{2}}} + \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4}\frac{B^2}{A^{\frac{7}{2}}}.$$

Nous avons déjà trouvé $A = \frac{(p+q)^5}{2pq}$; nous obtiendrons de même :

$$B = -\left(\frac{d^3 l.y}{1.2.3\,dx^3}\right)_a = \left[\frac{-p}{3x^3} + \frac{q}{3(1-x)^3}\right]_a = \frac{(p+q)^4(p-q)}{3p^2q^2}.$$

$$C = -\left(\frac{d^4 l.y}{1..4\,dx^4}\right)_a = \left[\frac{-p}{4x^4} + \frac{q}{4(1-x)^4}\right]_a = \frac{(p+q)^5}{4p^3q^3}(p^2 - pq + q^2).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $A_2$, on trouve, après réduction :

$$A_2 \text{ ou } \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.v^3}{dx^2}\right)_a = \frac{\sqrt{2}}{6p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(p+q)^{\frac{5}{2}}}(p^2 - 11pq + q^2).$$

Cette valeur, ainsi que celles

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q, \quad \text{et} \quad v_a = \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^5}},$$

étant remplacées dans l'expression trouvée

$$D = y_a\sqrt{\pi}\left[v_a + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.v^3}{dx^2}\right)_a + \cdots\right]$$

nous donneront celle de D, que nous écrivons plus bas.

80. Substituant maintenant les valeurs que nous venons de trouver (n^os^ 78 et 79) :

$$N = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}$$

$$D = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{5}{2}}}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\},$$

dans l'expression $Q = 1 - \frac{N}{D}$, et réduisant, nous obtiendrons :

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)\sqrt{\pi}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\}^{-1},$$

ou, approximativement, à cause de $p$ et $q$ très-grands :

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p+q)\sqrt{\pi}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - pq}{12pq(p+q)}\right\}.$$

Exemple. De 1745 à 1784 on a baptisé à Paris

$$p = 393386 \text{ garçons}; \qquad q = 377555 \text{ filles}.$$

Pour calculer la valeur numérique de Q, écrivons :

$$Q = 1 - \frac{1}{\mu}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - pq}{1.2\,pq\,(p+q)}\right\},$$

en faisant

$$\frac{1}{\mu} = \frac{(p+q)^{3/2}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q};$$

d'où

$$\lg\frac{1}{\mu} = \lg\frac{(p+q)^{3/2}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}} + 0{,}43429448\,\text{l.}\,\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q};$$

le dernier facteur peut se développer en une série très-convergente :

$$\text{l.}\,\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q} = -p\,\text{l.}\left(1 + \frac{p-q}{p+q}\right) - q\,\text{l.}\left(1 - \frac{p-q}{p+q}\right)$$

$$= -(p+q)\left\{\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4}{5.4} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6}{5.6} + \cdots\right\}.$$

On trouvera par là

$$\lg\frac{1}{\mu} = 72{,}2511780,$$

et

$$Q = 1 - \frac{1}{\mu}(1 - 0{,}0030761 + \cdots) = 1 \text{ à peu près},$$

à cause de l'excessive petitesse du second terme.

81. Troisième problème. *On a observé un grand nombre de naissances* p + q *des deux sexes dans un lieu* A, p *masculines*, q *féminines; et l'on en a déduit le rapport* r *du nombre des naissances des garçons à celui des filles. Dans un lieu* B *on a observé de même les nombres* p', q', r'. *On trouve* r' > r; *déterminer la probabilité que la naissance d'un garçon est plus probable dans le lieu* B *que dans le lieu* A.

Solution. En adoptant les mêmes notations que plus haut, la probabilité d'une valeur de $x$ sera

$$P_n = \frac{ydx}{\int_0^1 ydx}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Posons

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta,$$

$a = \frac{p}{p+q}$ étant la valeur de $x$ qui répond au maximum de $y$. Aux limites $x = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ répondent les limites

$$\theta = \begin{cases} \frac{p}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} \end{cases};$$

la probabilité d'une valeur de $\theta$ sera donc

$$P_n = \frac{\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p \left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q d\theta}{\int_0^1 ydx} = \frac{N}{D}.$$

*Calcul de* N. On a :

$$l.\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p\left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q = l.\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} + p\,l.\left(1+\frac{p+q}{p}\theta\right)$$
$$+ q\,l.\left(1-\frac{p+q}{q}\theta\right) = l.\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} - p\frac{p+q}{p}\theta - p\frac{(p+q)^2\theta^2}{2p^2}$$
$$+ q\frac{p+q}{q}\theta - q\frac{(p+q)^2}{2p^2}\theta^2 = l.\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} - \frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2;$$

en s'arrêtant à la deuxième puissance de $\theta$; et par suite :

$$\left(\frac{p}{p+q}+\theta\right)^p\left(\frac{q}{p+q}-\theta\right)^q = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2}.$$

*Calcul de* D. En reprenant la valeur trouvée dans le problème précédent (n° 80), et nous arrêtant au premier terme, nous aurons :

$$D = \int_0^1 ydx = \frac{p^p q^q \sqrt{\pi}}{(p+q)^{p+q}} \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^3}}.$$

Substituant les valeurs de N et D dans l'expression de $P_n$, nous obtiendrons :

$$P_n = \frac{N}{D} = \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}}\, e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Nous trouverions de même, pour la probabilité d'une valeur $\theta'$ dans le lieu B, en posant $\alpha' = \frac{p'}{p'+q'} = \theta'$ :

$$P'_n = \frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}}\, e^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta')$$

La probabilité des valeurs simultanées $\theta$ et $\theta'$ sera donc :

$$P_n P'_n = \frac{d\theta\, d\theta'}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2}.$$

Posons $x' = x + t$; $x'$ sera $> x$ pour $t$ positif; et l'on aura

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t;$$

nous avons à déterminer la probabilité que $t$ est compris entre 0 et 1. Comme $x'$ est indépendant de $x$, et par suite $\theta'$ de $\theta$, la différentiation de l'égalité précédente donnera :

$$dt' = dt;$$

et en substituant dans l'expression de $P_n P'_n$ les valeurs que nous venons de trouver, nous obtiendrons

$$P_n P'_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, dt dt'\, e^{-(A\theta^2 + 2B(t-h)\theta + C(t-h)^2)},$$

expression dans laquelle

$$h = \frac{p'q - pq'}{(p+q)(p'+q')}; \quad A = \frac{(p+q)^3}{2pq} + \frac{(p'+q')^3}{2p'q'};$$

$$B = \frac{p'+q'}{2p'q'}; \quad C = \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.$$

Convertissant l'exposant en un carré, et posant

$$k^2 = \frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3 + 2pq(p'+q')^3},$$

on trouve

$$P_n P'_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, d\theta dt e^{-A\left[\theta + \frac{2pq}{(p+q)^3} k^2 (t-h)^2\right]} e^{-k^2 (t-h)^2}.$$

Intégrant entre les limites

$$\theta = \begin{cases} \frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} \end{cases} \quad \text{et} \quad t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

nous déterminerons la probabilité que $x$ et $t$ sont tous deux compris entre 0 et 1, ou, comme $x$ est nécessairement compris entre ces limites, la probabilité que $t$ y est compris, ou que $x'$ est $> x$.

Nous aurons ainsi

$$P = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}} \int_{-\frac{p}{p+q}}^{\frac{q}{p+q}} d\theta \int_0^1 dt\, e^{-A[\,]^2} e^{-k^2 (t-h)}.$$

Le facteur $e^{-A[\,]^2}$ devenant très-petit pour les valeurs de $\theta$, qui sont prises au delà des limites jusqu'à $\pm\infty$, on peut étendre les limites relatives à $\theta$ jusqu'à $\pm\infty$, et l'on aura ainsi, en posant $A[\,]^2 = \tau^2$ :

$$P = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \int_0^1 e^{-k^2 (t-h)^2} dt$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-k^2 (t-h)^2} dt;$$

et comme $e^{-k^2 (t-h)^2}$ est très-petit au delà des limites $t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, on peut également étendre celles-ci jusqu'à $\pm\infty$, ce qui donne :

$$P = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-k^2 (t-h)^2} dt;$$

ou, en faisant $k(t-h)=u$ :

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-kh}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{k}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}-\int_{kh}^{\infty}\right\}=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{kh}^{\infty}e^{-u^2}du\,;$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{e^{-k^2h^2}}{2kh}\left(1-\frac{1}{2k^2h^2}+\frac{1.3}{2^2k^4h^4}-\cdots\right)\right\},$$

expression dans laquelle

$$\frac{1}{2k^2h^2}=\frac{p'q'(p+q)^3+pq(p'+q')^3}{(p+q)(p'+q')(p'q-pq')^2}.$$

Exemple. A Paris on a :

$$p=595586,\quad q=577555\,;\quad r=\frac{p}{q}=\frac{25}{24},$$

à Londres :

$$p'=737629,\quad q'=648958\,;\quad r'=\frac{p'}{q'}=\frac{19}{18}.$$

La formule précédente donnera

$$P=1-\frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328268 à parier contre 1 qu'à Londres la probabilité de la naissance d'un garçon est plus grande qu'à Paris.

82. Quatrième problème. *Chercher la probabilité* P *que la possibilité* x *de la naissance d'un garçon est comprise entre les limites* $\frac{p}{p+q}\pm v_a z$, z *étant un petit nombre.*

Solution. En désignant par $\alpha$ et $\beta$ ces limites, et par $y$ la fonction précédente $y=x^p(1-x)^q$, la probabilité cherchée sera :

$$P=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}ydx}{\int_{0}^{1}ydx}=\frac{N}{D}.$$

*Calcul de* D. Nous avons vu (n° 79) que

$$\int_0^1 ydx=y_a v_a\sqrt{\pi},$$

en négligeant les puissances de

$$\frac{1}{p+q}\,;\quad v_a=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{d^2\,l.\,y}{dx^2}\right)_a}}=\sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}.$$

*Calcul de* N. Si nous posons $x=a+v_a\theta$, aux limites données $x=\begin{cases}\beta\\ \alpha\end{cases}$ répondront celles

$$\theta=\begin{cases}\frac{\beta-a}{v_a}\\ \frac{\alpha-a}{v_a}\end{cases},$$

que nous supposerons respectivement égales à $\pm z$; et en reprenant la valeur de $x$ donnée précédemment (n° 79)

$$x \text{ ou } a+v_a\theta=a+v_at+\frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a t^2+\cdots$$

nous en déduirons :

$$\theta=t+\frac{1}{v_a}\frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a t^2,$$

$$t=\theta-\frac{1}{v_a}\frac{1}{2}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a \theta^2,$$

$$t^2=\theta^2-\frac{1}{v_a}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a \theta^3,$$

$$\mathrm{N}=\int_\alpha^\beta y\,dx=y_av_a\int_{-z}^{z}e^{-\theta^2}\left[1+\frac{1}{v_a}\left(\frac{d.v^2}{dx}\right)_a\theta^3\right]d\theta=2y_av_a\int_0^z e^{-\theta^2}d\theta,$$

d'où nous tirerons :

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\theta^2}d\theta.$$

Exemple d'après Poisson. $p+q=9656135$, nombre des naissances en France pendant les dix années 1817-1826; $p=4981566$, nombre des garçons. On aura

$$\mathrm{P}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\theta^2}d\theta,$$

probabilité que $x$ est compris entre $0{,}5159\pm 0{,}00025z$; si l'on prend $z=3$, on trouve

$\mathrm{P}=0{,}999978$, probabilité que $x$ est entre $0{,}5159\pm 0{,}0007$.

85. Cinquième problème. *En supposant* $\theta$ *certain, trouver la probabilité* $\Pi$ *que sur* n *naissances le nombre des garçons ne sera pas supérieur à* u. (Voir n° 81.)

Solution. Soit E l'événement dont il s'agit : cet événement pourra être amené en général en supposant que sur $n-u+k$ naissances, il y ait $n-u$ filles et $k$ garçons, sans que le dernier né soit un garçon.

Comme les $k$ garçons peuvent prendre alors chacune des $n-u+k-1$ premières places, la probabilité de cet événement, pour une valeur déterminée de $k$, sera :

$$\frac{(n-u+k-1)(n-u+k-2)\dots(n-u)}{1.2\dots k}(1-x)^{n-u}x^k.$$

Mais l'événement E pouvant être amené par toutes les valeurs de $k$ depuis 1 jusque $u$, la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_1^u{}_k \frac{(n-u+k-1)(n-u+k-2)\dots(n-u)}{1.2\dots k}(1-x)^{n-u}x^k \\ &= q^{n-u}\left\{1+(n-u)p+\frac{(n-u)(n-u+1)}{1.2}p^2+\dots\right. \\ &\quad \left.+\frac{(n-u)\dots(n-1)}{1.2\dots u}p^u\right\}, \qquad\qquad (A)\end{aligned}$$

en posant $x=p$ et $1-x=q$.

Transformons le second membre en une intégrale définie.

Par des intégrations successives par parties, on obtient :

$$\int\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}} = \frac{1}{n}\left\{-\frac{y^u}{(1+y)^n}-\frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}}-\frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{u(u-1)\dots(u-l+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-l+1)}\int\frac{y^{u-l}dy}{(1+y)^{n-l+1}}\right\}.$$

Pour $l=u$, on a :

$$n\int\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}} = c-\frac{y^u}{(1+y)^n}-\frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}}-\frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}}-\dots$$
$$-\frac{u(u-1)\dots 2.1}{(n-1)(n-2)\dots(n-u)}\frac{1}{(1+y)^{n-u}}.$$

Et par suite

$$n\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}}=q^{n-u}\left[p^u+\frac{u}{n-1}p^{u-1}+\frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}p^{u-2}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{u(u-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-u)}\right];$$

$$n\int_{0}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n-1}}=\frac{u(u-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-u)}.$$

Or le quotient de ces deux expressions est égal à

$$q^{n-u}\left[1+(n-u)p+\frac{(n-u)(n-u+1)}{1.2}p^2+\cdots+\frac{(n-u)\ldots(n-1)}{1.2\ldots u}p^u\right],$$

c'est-à-dire à la valeur précédemment trouvée pour Π. Nous avons donc

$$\Pi=\frac{N}{D};\quad\text{et}\quad N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}},\quad D=\int_{0}^{\infty}\frac{y^u dy}{(1+y)^{n+1}}.$$

Si nous posons $Y=\frac{y^u}{(1+y)^{n+1}}$, nous aurons :

$$N=\int_{\frac{p}{q}}^{\infty}Y dy;\qquad D=\int_{0}^{\infty}Y dy.$$

84. *Calcul de* D. Appelons $a$ la valeur de $y$ qui rend Y maximum; $Y_a$ ce maximum; nous trouverons par $dY=0$ :

$$a=\frac{u}{n+1-u};$$

et

$$Y_a=\frac{u^u(n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}};$$

et si nous faisons $Y=Y_a e^{-t^2}$, aux limites $y=\left\{\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.^{\infty}$ répondront celles $t=\left\{\begin{matrix}0\\-\infty\end{matrix}\right.^{+\infty}$, et nous aurons par suite

$$\int_{0}^{\infty}Y dy=Y_a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\,\frac{dy}{dt}.$$

Puisque $t$ devient nul pour $y=a$, il doit renfermer le facteur $y-a=y'$; et $t^2$ le facteur $y'^2$; nous pourrons donc poser

$$t^2=y'^2\,[A+By'+Cy'^2+\cdots]=l.\,Y_a-l.\,Y.$$

On trouvera

$$A=-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right]_{y=a};\quad B=-\frac{1}{6}\left[\frac{d^3\,l.\,Y}{dy^3}\right]_{y=a};\ \text{etc.}$$

et en substituant dans l'expression de $t^2$ :

$$t^2+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right]_{y=a}y'^2+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3\,l.\,Y}{dy^3}\right]_{y=a}y'^3+\cdots=0.$$

Comme $y'$ est nul pour $t=0$, on peut poser

$$y'=a't+a''t^2+\cdots,$$

et l'équation précédente deviendra :

$$t^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right)_a a'^2\right]+t^3\left[\left(\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right)_a a'a''+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,l.\,Y}{dy^3}\right)_a a'^3\right]+\cdots=0;$$

égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de $t$ :

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right)_a a'^2=0;\qquad \left(\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right)_a a'a''+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,l.\,Y}{dy^3}\right)_a a'^3=0.$$

Si nous substituons dans ces équations les valeurs

$$a=\frac{u}{n+1-u};\quad l.\,Y=u\,l.\,y-(n+1)\,l.\,(1+y);$$

d'où

$$\left(\frac{d^2\,l.\,Y}{dy^2}\right)_a=-\frac{(n+1-u)^3}{u\,(n+1)};\quad \left(\frac{d^3\,l.\,Y}{dy^3}\right)_a=\frac{2\,(n+1-u)^4\,(n+1+u)}{u^2\,(n+1)^2},$$

ces équations donneront :

$$a'=\sqrt{\frac{2u\,(n+1)}{(n+1-u)^3}},\qquad a''=\frac{2\,(n+1-u)}{3\,(n+1-u)^2};$$

cela posé, si nous substituons dans D à $\frac{dy}{dt}$ sa valeur

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = a' + 2a''t + \cdots,$$

nous aurons

$$\mathrm{D} = \int_0^\infty \mathrm{Y} dy = \mathrm{Y}_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dy'}{dt}\, dt$$

$$= \mathrm{Y}_a \left[ a' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + 2a'' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t\, dt + 3a''' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^2 dt + \text{etc.} \right]$$

$$= \mathrm{Y}_a \left[ a' \sqrt{\pi} + \frac{1.3}{2^2} a''' \sqrt{\pi} + \text{etc.} \right],$$

à cause de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2i+1} dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2i} dt = \frac{1.3..(2i+1)}{2^i} \sqrt{\pi}.$$

Lorsque $n$, $u$, et $n - u$ sont très-grands, on a, à peu près :

$$\mathrm{D} = \mathrm{Y}_a . a' \sqrt{\pi}.$$

85. *Calcul de* $\mathrm{N} = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} \mathrm{Y} dy$.

Cherchons d'abord les limites de $t$, qui correspondent à celles de $y = \left\{ \begin{matrix} \infty \\ \frac{p}{q} \end{matrix} \right.$, et appelons $k^2$ la valeur de $t^2$, répondant à $y = \frac{p}{q}$.

Comme $t^2 = \mathrm{l.}\, \mathrm{Y}_a - \mathrm{l.}\, \mathrm{Y}$, et que

$$\mathrm{Y} = \frac{y^u}{(1+y)^{n+1}}, \qquad \mathrm{Y}_a = \frac{u^u (n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}},$$

on aura

$$k^2 = u \,\mathrm{l.} \frac{u}{p(n+1)} + (n+1-u) \,\mathrm{l.} \frac{n+1-u}{q(n+1)}; \qquad (a)$$

d'où $t = \pm k$ pour $y = \frac{p}{q}$.

On devra prendre le signe + si $\frac{p}{q} > a$, et le signe — si $\frac{p}{q} < a$. Car $y = a$ donne $t = 0$, et $y \gtrless a$ donnera $t \gtrless 0$ ; $t$ sera donc positif ou négatif selon que $y$ sera plus grand ou plus petit que $a$.

*Premier cas :* $\frac{p}{q} > a$. Nous aurons :

$$N = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y dy = Y_a \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt \frac{dy'}{dt} = Y_a \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt \,[a' + 2a''t + \cdots]$$

$$= Y_a \left[ a' \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + 2a'' \cdot \frac{1}{2} e^{-k^2} \right] = Y_a a' \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + a'' Y_a e^{-k^2}.$$

Par suite, en substituant à N et D leurs valeurs :

$$\Pi = \frac{N}{D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{a''}{a' \sqrt{\pi}} e^{-k^2};$$

or on a :

$$\frac{a''}{a'} = \frac{\sqrt{2}(n+1+u)}{3\sqrt{u(n+1-u)(n+1)}} = \frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu(n-u)}} \text{ à peu près;}$$

d'où

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu(n-u)\pi}} e^{-k^2}, \text{ pour } \frac{p}{q} > a. \quad (b)$$

*Deuxième cas :* $\frac{p}{q} < a$. Nous aurons dans ce cas

$$N = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y dy = Y_a \int_{-k}^{\infty} e^{-t^2} dt \,[a' + 2a''t + \cdots]$$

$$= Y_a a' \int_{-k}^{\infty} e^{-t^2} dt + 2Y_a a'' \int_{-k}^{\infty} e^{-t^2} t dt$$

$$= -Y_a a' \int_k^{-\infty} e^{-t^2} dt + 2Y_a a'' \int_k^{-\infty} e^{-t^2} t dt$$

$$= Y_a a' \left[ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_k^{\infty} \right] + Y_a a'' e^{-k^2}$$

$$= Y_a a' \sqrt{\pi} - Y_a a' \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + Y_a a'' e^{-k^2};$$

substituant cette valeur, ainsi que celle de $D = Y a' \sqrt{\pi}$ dans l'expression de $\Pi$, on obtient :

$$\Pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{a''}{a' \sqrt{\pi}} e^{-k^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu(n-u)\pi}} e^{-k^2}, \text{ pour } \frac{p}{q} < a \quad (c).$$

86. Sixième problème. *Trouver la probabilité* P′ *que sur* n=p+q *naissances, le nombre de garçons ne sera pas supérieur à* u.

Solution. Comme θ n'est pas certain, et que sa probabilité est (n° 82) :

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\theta^2} [1 - \theta^3 . 0{,}00002],$$

la probabilité cherchée sera

$$P' = \Pi . P,$$

Π ayant la valeur déterminée dans le problème précédent.

Septième problème. *En supposant* θ *certain, chercher la probabilité* Π′ *que sur un grand nombre* n *de garçons ne surpasse pas* $u = \frac{n}{2}$, *ou* $u = \frac{n-1}{2}$.

Solution. *Premier cas : n* pair.

Nous avons eu (n° 85) :

$$a = \frac{u}{n+1-u} = \frac{n}{n+2}, \quad p > q, \quad \text{donc } \frac{p}{q} > a;$$

nous aurons donc à appliquer les formules (*a*) et (*b*) :

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b')$$

$$k^2 = \frac{n}{2} \text{l.} \frac{n}{2p(n+1)} + \frac{n+2}{2} \text{l.} \frac{n+2}{2q(n+1)} . \quad . \quad (a')$$

*Deuxième cas : n* impair. Alors

$$u = \frac{n-1}{2}, \quad p > q, \quad a = \frac{n-1}{n+3},$$

donc

$$\frac{p}{q} > a;$$

les mêmes formules donneront :

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b'')$$

$$k^2 = \frac{n-1}{2} \text{l.} \frac{n-1}{2p(n+1)} + \frac{n+3}{2} \text{l.} \frac{n+1}{2q(n+1)} . \quad (a'')$$

87. Huitième problème. *Chercher la probabilité* P′ *que sur un grand nombre* n *de naissances le nombre des garçons ne surpassera pas celui des filles.*

Solution. $\theta$ n'étant pas certain, et sa probabilité étant P (n° 82), on aura

$$P' = P.\Pi'.$$

Premier exemple. Soit $n = 12000$, nombre des naissances annuelles dans un département français d'une population moyenne;

$$p = 0{,}5159 + \theta.0{,}00023 \text{ (voir le n° 82)};$$
$$q = 0{,}4841 - \theta.0{,}00023$$

$n$ étant pair, la formule $(b')$ donnera

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-k^2},$$

or

$$\int_k^\infty e^{-t^2} dt = \frac{e^{-k^2}}{2k}\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1.3}{2^2 k^4} - \cdots\right) = e^{-k^2}(0{,}1805 - \theta.0{,}00023),$$

si l'on remplace dans les facteurs algébriques $k$ par sa valeur déduite de la formule $(a')$; on en tire en la développant et y remplaçant $n$, $p$, $q$ par leurs valeurs

$$k^2 = 6{,}1028 + \theta.0{,}1761 + \theta^2.0{,}00127 + \cdots$$

d'où

$$\frac{1}{2k} = 0{,}2024 - \theta.0{,}0829.$$

On aura par suite

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2}(0{,}2012 - \theta.0{,}00023),$$

La valeur de P trouvée au n° 82 est

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-5}^{5} e^{-\theta^2}[1 - \theta^5.0{,}00002]\, d\theta;$$

et par conséquent

$$P' = P\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-5}^{5} e^{-\theta^2} d\theta\,(1 - \theta^5.0{,}00002) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2}(0{,}2012 - \theta.0{,}0023)$$
$$= \frac{0.2012}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k^2+\theta^2)} d\theta,$$

car, $e^{-(k^2+\theta^2)}$ étant excessivement faible aux limites $\theta = \pm 5$, on peut étendre celles-ci à $\pm\infty$.

Si l'on pose

$$\theta = \frac{\theta'}{\sqrt{1{,}00127}} - \frac{0{,}1761}{2.1{,}00127},$$

on aura, à fort peu près

$$k^2 + \theta^2 = \theta'^2 + 6{,}0951,$$

et par suite

$$P' = \frac{0{,}2014\, e^{-6{,}0951}}{\pi\sqrt{1{,}00127}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta'^2} d\theta'$$

$$= \frac{0{,}2014\, e^{-6{,}0951}}{\sqrt{\pi}.1{,}00127} = 0{,}000256 = \frac{1}{4000} \text{ environ.}$$

On peut donc parier 4000 contre 1 que le nombre des garçons surpassera celui des filles.

Deuxième exemple. *Trouver la probabilité* P′ *qu'à Paris, parmi les enfants naturels, le nombre des naissances annuelles des garçons n'excédera pas celui des filles.*

Les résultats de treize années (1815-1827) ont donné, pour le nombre des enfants naturels, 122404, et pour celui des garçons, 62259.

Le quatrième problème (n° 82) donnera

$$p = 0{,}50847 + \theta\,.\,0{,}002021$$
$$q = 0{,}49153 - \theta\,.\,0{,}002021.$$

Par suite, d'après la formule du n° 87 :

$$P' = P'\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-5}^{5} \Pi' e^{-\theta^2} (1 - \theta^5\,.\,0{,}000092)\, d\theta.$$

Soit $n = 10000$, nombre moyen des naissances annuelles illégitimes à Paris; nous aurons à appliquer les formules $(a')$ et $(b')$ du n° 85 :

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^2} dt + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-k^2}$$

$$k^2 = \frac{n}{2} \text{l.} \frac{n}{2p(n+1)} + \frac{n+2}{2} \text{l.} \frac{n+2}{pq(n+1)}.$$

Pour faciliter les calculs, posons

$$0{,}00847 + \theta \,.\, 0{,}002021 = \frac{1}{2}\alpha;$$

et nous aurons

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha;$$

d'où

$$k^2 = -\frac{n+1}{2}\,\mathrm{l}.(1-\alpha^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{n+1}{2}\alpha^2 + \alpha,$$

en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Si nous faisons

$$\frac{n+1}{2}\alpha^2 = \beta^2,$$

d'où

$$\beta = 0{,}1979 + \theta \,.\, 0{,}2858,$$

nous trouverons :

$$k = \left(\frac{n+1}{2}\alpha^2 + \alpha\right)^{\frac{1}{2}} = \beta + \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ à peu près;}$$

et par suite

$$\int_k^\infty e^{-t^2}dt = \int_\beta^\infty e^{-t^2}dt - \frac{1}{\sqrt{2n}}\,e^{-\beta^2};$$

d'où

$$\begin{aligned}\Pi' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\beta^\infty e^{-t^2}dt - \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\beta^2} + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,e^{-\beta^2-\frac{2\beta}{\sqrt{2(n+1)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\beta^\infty e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{n\pi}}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-\beta^2t^2}dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2n\pi}}, \text{ en changeant } t \text{ en } \beta t.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-\beta^2t^2}dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2n\pi}}\right)e^{-\theta^2}(1-\theta^3.0{,}000092)\,d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta^2t^2-\theta^2}\beta\,dt\,dt + \frac{1}{\pi\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta^2-\theta^2}d\theta.\end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2 - \theta^2} \beta d\theta = \frac{a\sqrt{\pi}}{(1 + b^2 t^2)^{3/2}} e^{-\frac{a^2 t^2}{1+b^2 t^2}}, \quad a = 1{,}1979; \quad b = 0{,}2858;$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 \theta^2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En posant

$$\frac{at}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} = v, \qquad \frac{a}{\sqrt{1 + b^2}} = c,$$

nous aurons

$$\int_{1}^{\infty} \frac{adt}{(1 + b^2 t^2)^{3/2}} e^{-\frac{a^2 t^2}{1+b^2 t^2}} = \int_{c}^{a} e^{-v^2} dv;$$

et comme $\frac{a}{b} > 4$, on peut étendre la limite supérieure jusqu'à $\infty$ ; de sorte que

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c}^{\infty} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{2n\pi\,(1 + b^2)}}.$$

Au moyen de la Table de Kramp, on trouvera :

$$P' = 0{,}0658 = \frac{1}{15} \text{ à peu près.}$$

Il n'y a donc pas tout à fait 15 à parier contre 1 qu'à Paris le nombre des naissances annuelles illégitimes des garçons excédera celui des filles.

Remarque. La probabilité que dans un intervalle de treize ans le nombre des naissances féminines illégitimes excédera au moins une fois celui des masculines est

$$Q = 1 - (1 - P')^{13} = 1 - (0{,}9362)^{13} = 0{,}424 = \frac{2}{5}.$$

88. Neuvième problème. Déterminer la probabilité P que la supériorité du nombre des naissances masculines sur les féminines se maintiendra pendant $i$ années.

Solution. Soit $p$ le nombre observé des naissances masculines; $q$ celui des féminines; $2n$ celui des naissances annuelles.

$x$ la probabilité de la naissance d'un garçon; $1-x$, d'une fille; et soit, pour une valeur déterminée de $x$ :

$y'$ la probabilité de la naissance de $p$ garçons et de $q$ filles;

$z$ la probabilité qu'après un an le nombre des naissances masculines surpassera celui des féminines;

$z^i$ la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant $i$ années.

La probabilité demandée sera, pour toutes les valeurs possibles de $x$ :

$$\mathrm{P} = \frac{\int_0^1 z^i y' dx}{\int_0^1 y' dx}.$$

Si nous appelons $c$ le coefficient du terme $y = x^p (1-x)^q$ du développement de $(x+1-x)^{p+q}$, nous aurons $y' = cy$, et par suite

$$\mathrm{P} = \frac{\int_0^1 z^i y dx}{\int_0^1 y dx}.$$

Pour déterminer $z$, nous n'aurons qu'à changer, dans la formule (A) du cinquième problème (n° 83) $p$ en $q$, $q$ en $p = x$, $u$ en $n-1$, $n$ en $2n$, ce qui donnera :

$$z = x^{n+1} \left\{ 1 + (n+1)(1-x) + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(1-x)^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n-1}(1-x)^{n-1} \right\},$$

ou bien (n° 83) :

$$z = \frac{\int_{\frac{1-x}{x}}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{2n+1}} du}{\int_0^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{2n+1}} du}.$$

Si nous posons

$$u = \frac{1-s}{s}; \quad \text{donc} \quad s = \frac{1}{1+u},$$

aux limites $0, \frac{1-x}{x}, \infty$ de $u$ répondront celles $1$, $x$ et $0$ de $s$; de sorte que nous aurons

$$z = \frac{\int_0^x s^n (1-s)^{n-1}\, ds}{\int_0^1 s^n (1-s)^{n-1}\, ds}.$$

Dérivons, en observant que le dénominateur est constant; nous trouverons

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{\int_0^1 s^n (1-s)^{n-1}\, ds}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-nx^{n-1}(1-x)^{n-1} + (n-1)x^n(1-x)^{n-2}}{\int_0^1 s^n (1-s)^{n-1} ds},$$

$$\frac{dz}{zdx} = \frac{x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{\int_0^1 s^n (1-s)^{n-1}\, ds}; \quad \frac{d^2z}{zdx^2} = \frac{dz}{zdx}\,\frac{n-(2n-1)x}{x(x-1)}.$$

Si nous posons $Y = z^i y = z^i x^p (1-x)^q$, l'expression de P sera

$$P = \frac{\int_0^1 Y dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{N}{D}.$$

Appelons $a'$ la valeur de $x$ qui rend Y maximum; $a$ celle qui rend $y$ maximum; le deuxième problème (n° 77) donne :

$$\int_0^1 Y dx = Y_{a'} \sqrt{\pi}\, v_{a'}; \quad \int_0^1 y dx = y_a \sqrt{\pi}\, v_a.$$

et, par conséquent

$$P = \frac{N}{D} = \frac{Y_{a'} v_{a'}}{y_a v_a}.$$

89. *Calcul de* N. Pour déterminer sa valeur, nous avons d'abord à chercher celles de $a', z_{a'}, v_{a'}$.

1°. *Calcul de a'.* De $\frac{dY}{dx} = 0$ on tire, en changeant $x$ en $a'$ :

$$o = pz(1-a') + ia'(1-a')\frac{dz}{dx} - qa'z = \frac{p}{a'} + i\left(\frac{dz}{zdx}\right)_{a'} - \frac{q}{1-a'}$$

$$= \frac{p}{a'} + i\frac{a'^n(1-a')^{n-1}}{\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}\,ds} - \frac{q}{a'};$$

ce qui donne

$$a' = \frac{p}{p+q} + \frac{ia'^{n+1}(1-a')^n}{(p+q)\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}\,ds}.$$

Soit $\sigma = s^n(1-s)^{n-1}$, $\alpha$ la valeur de $s$ qui rend $\sigma$ maximum, $\sigma_\alpha$ ce maximum, $\alpha$ étant égal à $\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$ à peu près, $\sigma_\alpha$, et, à plus forte raison, $\sigma$ est très-petit; on aura donc :

$$\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}\,ds = \int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}\,ds = \sigma_\alpha\sqrt{\pi}\,v_\alpha.$$

Or

$$\text{l.}\,\sigma_\alpha - \text{l.}\,\sigma = (s-\alpha)^2\left[\text{A} + \text{B}(s-\alpha) + \cdots\right],$$

expression dans laquelle $\text{A} = -\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\,\text{l.}\,\sigma}{ds^2}\right]_a$, (n° 79) ;

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\text{A}}}$$

$$\text{l.}\,\sigma = n\,\text{l.}\,s + (n-1)\,\text{l.}\,(1-s),$$

et, par suite,

$$\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}\,ds = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\sqrt{n}};$$

de sorte que la valeur de $a'$ deviendra :

$$a' = \frac{p}{p+q} + \frac{ia'^{n+1}(1-a')^n\,2^{2n}\sqrt{n}}{(p+q)\sqrt{\pi}}. \quad \ldots \quad (1)$$

Posons

$$a' = \frac{p}{p+q} + \mu, \quad \ldots \quad (2)$$

$\mu$ sera une quantité très-petite.

*Calcul de* $\mu$. Substituons dans (1) à $a'$ sa valeur (2) :

$$\mu = \frac{i\left(\frac{p}{p+q}+\mu\right)^{n+1}\left(\frac{q}{p+q}-\mu\right)^{n} 2^{2n}\sqrt{\pi}}{(p+q)\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{i\left(\frac{p}{p+q}\right)^{n}\frac{p}{p+q}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)^{n}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)\left(1-\frac{p+q}{q}\mu\right)^{n}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{n} 2^{2n}\sqrt{\pi}}{(p+q)\sqrt{\pi}},$$

d'où, en négligeant les puissances de $\mu$ :

$$\text{l. } \mu = \text{l.}\left\{\frac{i\sqrt{n}\,p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2}\right]}{(p+q)^{2}\sqrt{\pi}} e^{-n\mu\frac{(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{n\mu^{2}(p+q)^{2}}{pq}}\right\},$$

et, par conséquent,

$$\mu = i\sqrt{n}\frac{p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2}\right]}{(p+q)^{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n\mu(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{n\mu^{2}(p+q)^{2}}{pq}} \quad . \quad . \quad (a)$$

2° *Calcul de* $z_{a'}$. Nous avons

$$z_{a'} = \frac{\int_{0}^{a'} s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_{0}^{1} s^{n}(1-s)^{n-1}ds} = 1 - \frac{\int_{a'}^{1} s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_{0}^{1} s^{n}(1-s)^{n-1}ds}.$$

Posons

$$s = \alpha + \theta = \frac{n}{2n-1} + \theta.$$

Si dans la formule (B) du troisième problème nous faisons

$$p = n, \quad q = n-1,$$

nous trouverons

$$\frac{s^{n}(1-s)^{n-1}ds}{\int_{0}^{1} s^{n}(1-s)^{n-1}ds} = \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}}\, e^{-\frac{(2n-1)^{3}}{2n(n-1)}\theta^{2}},$$

et par suite

$$\frac{\int_{a'}^{1} s^n (1-s)^{n-1} ds}{\int_{0}^{1} s^n (1-s)^{n-1} ds} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}} \int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{1-\frac{n}{2n-1}} e^{-\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}} \int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2} d\theta,$$

à cause de la valeur très-petite de l'expression sous le signe $\int$ pour $\theta = 1$.

Si nous faisons enfin

$$\frac{(2n-1)^3\theta^2}{2n(n-1)} = t^2,$$

d'où

$$\theta = \sqrt{\frac{2n(n-1)}{(2n-1)^3}}\, t = \frac{p}{p+q} + \mu - \frac{n}{2n-1},$$

et

$$t = \sqrt{\frac{2n-1}{2n(n-1)}} \left[ \frac{n(p-q)}{p+q} - \frac{p}{p+q} + (2n-1)\mu \right],$$

nous aurons

$$z_{a'} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

3° *Calcul de* $v_{a'}$. Nous aurons, en procédant comme au n° 79 :

$$Y = x^p z^i (1-x)^q = Y_{a'} e^{-t^2},$$

$$t^2 = l.\,Y_{a'} - l.\,Y = (x-a')^2 \left[ A + B(x-a') + \cdots \right],$$

où

$$A = -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2\, l.\, Y}{dx^2} \right)_{a'}.$$

Or

$$l.\,Y = p\, l.\, z + i\, l.\, z + q\, l.\,(1-x);$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\, l.\, Y}{dx^2} = -\frac{p}{2x^2} + \frac{i}{2} \frac{d^2 z}{z dx^2} - \frac{i}{2} \left( \frac{dz}{z dx} \right)^2 + \frac{q}{2(1-x)^2};$$

et

$$v_{a'} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \frac{p}{2a'^2} - \frac{i}{2} \left[ \frac{d^2 z}{z dx^2} \right]_{a'} + \frac{i}{2} \left[ \frac{dz}{z dx} \right]_{a'}^2 + \frac{q}{2(1-a')^2} \right\}}}.$$

Substituant les valeurs trouvées dans l'expression de N :

$$N = Y_{a'} v_{a'} \sqrt{\pi} = \frac{a'^{p+1} z_{a'}^{i} (1-a')^{q+1} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left\{ p(1-a')^2 + q a'^2 + i a'^2 (1-a')^2 \left[ \left( \frac{dz}{z dx} \right)_{a'}^2 - \left( \frac{d^2 z}{z dx^2} \right)_{a'} \right] \right\}}}.$$

Mais nous avons trouvé (n° 89) :

$$a' = \frac{p}{p+q} + \mu;$$

$$0 = \frac{p}{a'} + i \left( \frac{dz}{z dx} \right)_{a'} - \frac{q}{1-a'};$$

donc

$$\left( \frac{dz}{z dx} \right)_{a'} = \frac{\mu (p+q)}{i a' (1-a')};$$

$$\left( \frac{d^2 z}{z dx^2} \right)_{a'} = \left( \frac{dz}{z dx} \right)_{a'} \cdot \frac{n(2n-1) a'}{a'(1-a')} = \frac{\mu (p+q) n (2n-1)}{i a'^2 (1-a')^2};$$

de sorte que :

$$N = \frac{a'^{p+1} z_{a'}^{i} (1-a')^{q+1} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{\left\{ 1 + \frac{p+q}{pq} \left[ n(p-q) - p \right] \mu + \frac{(p+q)^2}{pq} \left[ \frac{p+q}{i} + 2n \right] \mu^2 \right\}}}.$$

Il nous reste à déterminer $a'^{p+1} (1-a')^{q+1}$, qui est égal à :

$$a'^{p+1} (1-a')^{q+1} = \left( \frac{p}{p+q} + \mu \right) \left( \frac{q}{p+q} - \mu \right) a'^{p} (1-a')^{q};$$

or

$$a'^{p} (1-a')^{q} = \left( \frac{p}{p+q} \right)^p \left( \frac{q}{p+q} \right)^q \left[ 1 + \frac{p+q}{p} \mu \right]^p \left[ 1 - \frac{p+q}{q} \mu \right]^q,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{l.}\, a'^{p} (1-a')^{q} &= \text{l.} \left( \frac{p}{p+q} \right)^p \left( \frac{q}{p+q} \right)^q - (p+q)^2 \mu^2 \frac{p+q}{2pq} \\ &= \text{l.} \left\{ \left( \frac{p}{p+q} \right)^p \left( \frac{q}{p+q} \right)^q e^{-\frac{(p+q)^3 \mu^2}{2pq}} \right\}, \end{aligned}$$

en négligeant les puissances supérieures de $\mu$.

Nous aurons par suite

$$a'^{p+1}(1-a')^{q+1} = \frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2},$$

et

$$N = \frac{\frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2} z_{a'}^i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left\{1+\frac{p+q}{pq}\left[n(p-q)-p\right]\mu+\frac{(p+q)^2}{pq}\left[\frac{p+q}{i}+2n\right]\mu^2\right\}}}.$$

90. *Calcul de* D. Nous avons (n° 79) :

$$D = \int_0^1 y\,dx = y_a v_a \sqrt{\pi}.$$

Or dans le problème 2 (n° 79) nous avons trouvé :

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q$$

$$v_a = \frac{\sqrt{2}\sqrt{pq}}{(p+q)\sqrt{p+q}}$$

et, par conséquent,

$$D = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q\sqrt{\frac{pq}{p+q}}\sqrt{\frac{2\pi}{p+q}},$$

et enfin

$$P = \frac{N}{D} = \frac{z_{a'}^i e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}}}{\sqrt{\left\{1+\frac{p+q}{pq}\left[n(p-q)-p\right]\mu+\frac{(p+q)^2}{pq}\left[\frac{p+q}{i}+2n\right]\mu^2\right\}}}. \quad (C)$$

Exemple. Soit pour 1784, à Paris :

$$n = 963675;\ p = 393386;\ q = 377555;\ i = 100.$$

La formule (*a*) donne $\mu$; (*b*) donne $z_{a'}$ et enfin (*c*) donne $P = 0{,}782$.

Il y avait donc ainsi, à la fin de 1784, près de quatre à parier contre un que dans l'espace d'un siècle le nombre des naissances des garçons l'emporterait chaque année, à Paris, sur celui des filles.

## CHAPITRE VI.

### THÉORÈME INVERSE DE BERNOUILLI OU THÉORÈME DE BAYES.

—

91. *Si* x *et* 1 — x *désignent les probabilités inconnues de deux événements contraires* A *et* B, *et qu'après un très-grand nombre* $\mu = p + q$ *d'épreuves l'événement* A *soit arrivé* p *fois, l'événement* B,q *fois, on aura la probabilité :*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

*que* x *est compris entre*

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}.$$

Démonstration. Si nous posons $y = x^p (1 - x)^q$, la probabilité de l'hypothèse d'une valeur de $x$ sera (n° 70) :

$$\frac{ydx}{\int_0^1 ydx},$$

et la probabilité P que la valeur de $x$ est comprise entre $a$ et $b$ sera :

$$P = \frac{\int_a^b ydx}{\int_0^1 ydx} = \frac{N}{D}.$$

*Calcul de* N. Soit $x = \frac{p}{\mu} + z$, et $a'$, $b'$ les limites de $z$ répondant à celles $a$, $b$ de $x$; nous aurons :

$$N = \int_a ydx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \int_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 - \frac{\mu z}{q}\right)^q dz.$$

Développons les facteurs sous le signe $\int$ :

$$\left(1+\frac{\mu z}{p}\right)^p = e^{p\,l.\left(1+\frac{\mu z}{p}\right)} = e^{\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p^2} - \cdots}$$

$$\left(1-\frac{\mu z}{q}\right)^q = e^{q\,l.\left(1-\frac{\mu z}{q}\right)} = e^{-\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{q} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{q^2} - \cdots}$$

d'où :

$$N = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\int_{a'}^{b'} dz e^{-\frac{1}{2}\mu^2 z^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{3}\mu^3 z^3\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)-\cdots}.$$

Posons

$$\frac{\mu^2 z^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \text{ ou } \frac{\mu^3 z^2}{2pq} = t^2;$$

d'où

$$z = t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}},$$

et

$$x = \frac{p}{\mu} + z = \frac{p}{\mu} + t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}; \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

et désignons par $-c$ et $+c$ les limites de $t$ qui répondent à celles $a'$ et $b'$ de $z$, ou $a$ et $b$ de $x$ ; nous aurons à déterminer ces dernières en fonction de $c$.

L'expression de N deviendra par la substitution des valeurs précédentes

$$N = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}\int_{-c}^{c} dt e^{-t^2+\frac{4(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}}-\text{etc.}}$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}\int_{-c}^{c} dt e^{-t^2}\left\{1+\frac{4(q-p)t^3}{4\sqrt{2\mu pq}}-\text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}\int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt,$$

en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$.

*Calcul de* D. Appelons $l = \sqrt{\frac{q\mu}{2p}}$ et $l' = -\sqrt{\frac{p\mu}{2q}}$ les limites de $t$ correspondant à celles 1 et 0 de $x$ ; nous aurons :

$$D = \int_0^1 y dx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_{l'}^{l} e^{-t^2} dt;$$

pourvu que $l$ et $l'$ soient supérieurs à 4 en valeur absolue, on pourra étendre ces limites jusqu'à $\pm\infty$ ; et l'on aura :

$$D = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\sqrt{\pi}.$$

Par suite

$$P = \frac{N}{D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{c} e^{-t^2}dt;$$

probabilité que $x$ est compris entre $a$ et $b$, ou, d'après la formule $(a)$, entre

$$\frac{p}{\mu} \pm c\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}};$$ C. Q. F. D.

## THÉORÈME DE LAPLACE SUR LA PROBABILITÉ DES RÉSULTATS MOYENS DES OBSERVATIONS.

92. *Les valeurs observées en* $p + p_1 + \cdots + p_i = \mu$ *épreuves étant* p *fois* w, $p_1$ *fois* $w_1$, etc., $p_i$ *fois* $w_i$, *le résultat moyen approché des observations sera*

$$m = \frac{pw + p_1w_1 + \cdots + p_iw_i}{p + p_1 + \cdots + p_i} = \frac{\Sigma p_i w_i}{\mu};$$

*et si* x, $x_1$ ... $x_i$ *désignent les probabilités inconnues des événements exclusifs* w, $w_1$ ... $w_i$, *de telle sorte que*

$$x + x_1 + \cdots + x_i = 1,$$

*l'expression*

$$v = wx + w_1x_1 + \cdots + w_ix_i = \Sigma w_i x_i$$

*sera le résultat moyen vrai des observations; cela posé, il y aura une probabilité*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{c} e^{-t^2}dt$$

*que l'écart* v — m *sera compris entre les limites*

$$\pm\frac{c}{\mu}\sqrt{2\Sigma p_i (w_i - m)^2}$$

ou $$\pm c\sqrt{\frac{2}{\mu}\left\{\frac{\Sigma p_i w_i^2}{\mu}-\left(\frac{\Sigma p_i w_i}{\mu}\right)^2\right\}},$$

$\mu$, p, ... $p_i$ *étant de grands nombres du même ordre.*

*Premier cas.* — **Deux événements.**

Démonstration. Dans ce cas les données précédentes se réduisent à

$$p+p_1=\mu;\quad m=\frac{pw+p_1w_1}{\mu};\quad x+x_1=1;\quad v=wx+w_1x_1.$$

Soit $k$ le coefficient de $x^p x_1^{p_1}$ dans le développement du binôme $(x+x_1)^\mu$; la probabilité que l'événement $w$ arrive $p$ fois, $w_1$, $q$ fois sera

$$y\,kx^p x_1^{p_1}=kx^p(1-x)^{p_1};$$

ou, en remplaçant $x$ par $\frac{v-w_1}{w-w_1}$, $1-x$ par $\frac{w-v}{w-w_1}$:

$$y=k\left(\frac{v-w_1}{w-w_1}\right)^p\left(\frac{w-v}{w-w_1}\right)^{p_1}.$$

Supposons $w_1>w$; toutes les valeurs de $v$ seront comprises entre $w$ et $w_1$, et la probabilité d'une valeur de $v$ sera par conséquent :

$$\frac{k\left(\frac{v-w_1}{w-w_1}\right)^p\left(\frac{w-v}{w-w_1}\right)^{p_1}dv}{\int_w^{w_1}k\left(\frac{v-w_1}{w-w_1}\right)^p\left(\frac{w-v}{w-w_1}\right)^{p_1}dv}=\frac{(v-w_1)^p(v-w)^{p_1}dv}{\int_w^{w_1}(v-w_1)^p(v-w)^{p_1}dv};$$

et par suite, la probabilité P, que $v$ est compris entre $a$ et $b$, sera :

$$\mathrm{P}=\frac{\int_a^b(v-w_1)^p(w-v)^{p_1}dv}{\int_w^{w_1}(v-w_1)^p(w-v)^{p_1}dv}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}.$$

93. *Calcul de* N. Posons avec Laplace

$$v=m+z=\frac{pw+p_1w_1}{\mu}+z;$$

d'où

$$dv = dz; \quad z = v - m = v - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu},$$

écart entre la valeur vraie et la valeur moyenne; et soient $\alpha$, $\beta$ les limites de $z$ qui répondent à celles $a$, $b$ de $x$; nous aurons :

$$\mathrm{N} = \int_a^b (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv$$
$$= (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta \left[1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right]^p \left[1 - \frac{\mu z}{p_1 (w - w_1)}\right]^{p_1} dz.$$

Développons les facteurs sous le signe $\int$ :

$$\left[1 + \frac{\mu z}{p(w-w_1)}\right]^p = e^{p \mathrm{l}.\left[1 + \frac{\mu z}{p(w-w_1)}\right]} = e^{\frac{\mu z}{w-w_1} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p(w-w_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p^2 (w-w_1)^3} - \cdots}$$

$$\left[1 - \frac{\mu z}{p_1(w-w_1)}\right]^{p_1} = e^{p_1 \mathrm{l}.\left[1 - \frac{\mu z}{p_1(w-w_1)}\right]} = e^{-\frac{\mu z}{w-w_1} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p_1(w-w_1)^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p_1^2 (w-w_1)^3} - \cdots}$$

Substituant dans l'expression de N, nous aurons :

$$\mathrm{N} = (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta dz e^{-\frac{\mu^2 z^2}{2(w-w_1)}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) + \frac{\mu^3 z^3}{3(w-w_1)^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) - \cdots};$$

et si nous posons

$$\frac{\mu^2 z^2}{2(w - w_1)^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = t^2;$$

d'où

$$z = t\sqrt{\frac{2pp_1 (w - w_1)^2}{\mu^3}}; \quad dz = dt\sqrt{\phantom{x}},$$

et que nous désignions par $-c$, $c$ les limites de $t$ qui répondent à celles $\alpha$, $\beta$ de $z$, nous pourrons écrire, en supprimant les facteurs qui sortiront du signe $\int$, parce qu'ils se trouveront également dans D :

$$\mathrm{N} = \int_{-c}^{c} dt e^{-t^2} . e^{\frac{4(p_1 - p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}} t^3 - \cdots}$$
$$= \int_{-c}^{c} dt e^{-t^2} \left[1 + \frac{4(p_1 - p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}} t^3 - \cdots\right].$$

Les termes entre parenthèses sont au moins de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ : on a donc, à cet ordre près :

$$N = \int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt = 2 \int_{0}^{c} e^{-t^2} dt.$$

94. *Calcul de* D. Soient $l'$, $l$ les limites de $t$ qui répondent à celles $w$, $w_1$ de $v$ :

$$D = \int_{l'}^{l} e^{-t^2} dt.$$

Mais à

$$v = \begin{cases} w_1 \\ w \end{cases} \text{ répondent } z = \begin{cases} w_1 - \frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} = \frac{p(w_1 - w)}{\mu} \\ w - \frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} = \frac{p_1 (w - w_1)}{\mu} \end{cases},$$

et par suite, puisque

$$t = z \frac{\mu \sqrt{\mu}}{2 (w - w_1) \sqrt{p p_1}} \text{ on a : } t = \begin{cases} l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{p_1}} \sqrt{\mu} \\ l' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_1}{p}} \sqrt{\mu} \end{cases};$$

il s'ensuit que $l$ et $l'$ sont de très-grands nombres de l'ordre $\sqrt{\mu}$, et qu'on pourra les remplacer par $\pm \infty$, ce qui donnera

$$D = \sqrt{\pi}.$$

Par conséquent,

$$P = \frac{D}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{c} e^{-t^2} dt,$$

probabilité que $v$ est compris entre $a$ et $b$.

Mais nous avons désigné par $-c$ et $c$ les limites correspondantes de $t$, et comme

$$v = m + z = m + t \sqrt{\frac{2 p p_1 (w - w_1)^2}{\mu^5}},$$

il en résulte que

$$a = m - c \sqrt{\quad},$$

$$b = m + c \sqrt{\quad},$$

et que

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{c} e^{-t^2} dt,$$

est la probabilité que $v$ est compris entre

$$\frac{pw + p_1 w_1}{p + p_1} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1 (w - w_1)^2}{\mu^3}},$$

ou que l'écart $v - m$ est compris entre

$$\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{2 \{ p (w - m)^2 + p_1 (w_1 - m)^2 \}};$$

en effet, la fraction $\frac{pp_1 (w - w_1)^2}{\mu}$ se transforme aisément en :

$$\begin{aligned} \frac{pp_1^2 + p_1 p^2}{\mu^2} (w - w_1)^2 &= p \left[ \frac{p_1 (w - w_1)}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[ \frac{p (w - w_1)}{\mu} \right]^2 \\ &= p \left[ \frac{(\mu - p) w - p_1 w_1}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[ \frac{(\mu - p) w_1 - pw}{\mu} \right]^2 \\ &= p \left[ w - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu} \right]^2 + p_1 \left[ w_1 - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu} \right]^2. \end{aligned}$$

Première remarque. Si

$$w = 1, \quad w_1 = 0,$$

on a

$$m = \frac{p}{p + p_1}, \quad v = x;$$

alors

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

est la probabilité que $x$ est compris entre

$$\frac{p}{p + p_1} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1}{(p + p_1)^3}},$$

ce qui est le théorème inverse de Bernouilli.

Deuxième remarque. 1° Si $c$, et par suite P, restent constants, les limites se resserreront à mesure que $\mu$ augmente.

2° Si les limites $\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{\ }$ restent constantes, ce qui exige que $c$ augmente avec $\mu$, on voit que P s'approche de 1 à mesure que $\mu$ augmente.

*Deuxième cas.* — **Trois événements.**

95. M. Bienaymé a démontré ce théorème directement, et de la manière la plus générale, dans le tome V des *Mémoires des savants étrangers.*

Nous exposerons sa démonstration pour le cas de trois événements observés.

Dans ce cas nous avons

$$v = wx + w_1x_1 + w_2x_2$$
$$p + p_1 + p_2 = \mu$$
$$x + x_1 + x_2 = 1;$$

$x$ et $x_1$ seront des fonctions de $v$ et de $x_2$.

Nous supposerons $w < w_1 < w_2$, de sorte que toutes les valeurs possibles de $v$ seront comprises entre $w$ et $w_2$.

Soit $k$ le coefficient du terme en $x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ dans le développement du polynôme

$$(x + x_1 + x_2)^\mu;$$

la probabilité que $w$ arrive $p$ fois, $w_1$, $p_1$ fois, $w_2$, $p_2$ fois, sera, dans l'hypothèse d'une valeur certaine de $v$ :

$$kx^p x_1^{p_1} x_2^{p_2};$$

et par suite la probabilité de l'hypothèse d'une valeur de $v$ sera (n° 69)

$$\frac{x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sum_{w}^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}};$$

et la probabilité que $v$ est compris entre $a$ et $b$ sera

$$\frac{\sum_{a}^{b} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\sum_{w}^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}.$$

Pour passer au cas de la continuité, multiplions par $dx_2$ et $dv$,

et intégrons en sous-entendant les limites relatives à $x_2$ : nous aurons :

$$P = \frac{\iint_a^b x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} dx_2 dv}{\iint_w^{w_2} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2} dx_2 dv} = \frac{N}{D}.$$

Posons

$$x = \frac{p}{\mu} + z; \quad x_1 = \frac{p_1}{\mu} + z_1; \quad x_2 = \frac{p_2}{\mu} + z_2;$$

$$v = \frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} + u;$$

nous aurons :

$$z + z_1 + z_2 = 0, \quad wz + w_1 z_1 + w_2 z_2 = u;$$

d'où

$$z = \frac{u - z_2(w_2 - w_1)}{w - w_1}; \quad z_1 = \frac{u - z_2(w_2 - w_1)}{w_1 - w};$$

et si nous désignons par $a'$, $b'$ les limites de $u$ qui répondent à celles $a$, $b$ de $v$, nous aurons l'expression suivante de N.

96. *Calcul de* N.

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 + \frac{\mu z_1}{p_1}\right)^{p_1} \left(1 + \frac{\mu z_2}{p_2}\right)^{p_2} du dz_2,$$

ou en développant comme plus haut (n° 92).

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{\mu(z+z_1+z_2) - \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{z_2^2}{p_2} + \frac{z_1^2}{p_1} + \frac{z^2}{p}\right) + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right) - \text{etc.}},$$

et, éliminant $z_1$ et $z$ :

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left\{z_2^2\left[\frac{(w_1-w)^2}{p_2} + \frac{(w-w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2-w_1)^2}{p}\right]\right.}$$
$$\left. - 2uz_2\left(\frac{w_1-w}{p_1} + \frac{w_2-w}{p_2}\right) + u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right)\right\} + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right) - \text{etc.}$$

Faisons pour abréger

$$\frac{(w_1-w)^2}{p_2} + \frac{(w-w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2-w_1)^2}{p} = A^2; \quad u\left(\frac{w_2-w}{p_1} + \frac{w_2-w_1}{p}\right) = B;$$

$$u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = C;$$

N s'écrira :

$$N=\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\iint_{a'}^{b'} du dz_2 e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left[Az_2-\frac{B}{A}\right]^2} e^{-\frac{\mu^2}{2(w-w_1)^2}\left[C-\frac{B^2}{A^2}+\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^3}-\cdots\right)-\text{etc.}\right]},$$

et si nous posons

$$y=\frac{\mu}{(w-w_1)\sqrt{2}}\left(Az_2-\frac{B}{A}\right);$$

d'où

$$z_2=\frac{(w-w_1)\sqrt{2}}{\mu A}y+\frac{B}{A};\quad dz_2=\frac{(w-w_1)\sqrt{2}}{\mu A}dy;$$

nous aurons :

$$N=\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\frac{(w-w_1)\sqrt{2}}{\mu A}\int dy e^{-y^2}\int_{a'}^{b'} du e^{-\frac{\mu^2}{A^2}\left(\frac{CA^2-B^2}{A^2}\right)} e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^3}+\cdots\right)}.$$

Or le facteur

$$e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^3}+\cdots\right)}=1+\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^3}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{\mu^3}{3}\cdot y^3\frac{(w-w_1)^3(\sqrt{2})^3}{p_2^3\mu^3A^3}+\cdots=1+\frac{1}{3}y^3\frac{1}{p_2^3}\frac{(w-w_1)^3(\sqrt{2})^3}{A^3}+\cdots$$

peut être supprimé comme ne différant de 1 que de quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{p_2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, vu les valeurs de A et de $y$, qui sont respectivement de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ et $\sqrt{\mu}$.

Il résulte également de ceci qu'on peut étendre les limites de $y$, quelles qu'elles soient, de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et par suite $\int dy e^{-y^2}$ étant égal à $\sqrt{\pi}$, on aura

$$N=\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\frac{(w-w_1)\sqrt{2}}{\mu A}\sqrt{\pi}\int_{a'}^{b'} du e^{-\frac{\mu^2}{2A^2}\frac{CA^2-B^2}{(w-w_1)^2}}.$$

Développons la fraction $\frac{CA^2-B^2}{(w-w_1)^2}$.

Nous avons posé

$$A^2=\frac{(w_1-w)^2}{p^2}+\frac{(w-w_2)^2}{p_1}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p};\quad C=u^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)=u^2\frac{\mu-p_2}{pp_1};$$

d'où

$$CA^2=u^2\frac{\mu}{pp_1p_2}(w_1-w)^2-u^2\frac{(w_1-w)^2}{pp_1}+u^2\frac{\mu-p_2}{pp_1}\left[\frac{(w_2-w_1)^2}{p}+\frac{(w_2-w)^2}{p_1}\right].$$

De plus

$$B^2 = u^2\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1^2}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p^2}+2\frac{(w_2-w)(w_2-w_1)}{pp_1}\right]$$
$$= u^2\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1^2}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p^2}+\frac{(w_2-w)^2+(w_2-w_1)^2-(w_1-w)^2}{pp_1}\right]$$
$$= \frac{u^2}{pp_1}\left[\frac{(w_2-w)^2(p+p_1)}{p_1}+\frac{(w_2-w_1)^2(p+p_1)}{p}\right]-\frac{u^2}{pp_1}(w_1-w)^2$$
$$= \frac{(\mu-p_2)u^2}{pp_1}\left[\frac{(w_2-w)^2}{p_1}+\frac{(w_2-w_1)^2}{p}\right]-\frac{u^2}{pp_1}(w_1-w)^2;$$

et si nous faisons

$$t = u\sqrt{\frac{\mu^3}{2pp_1p_2A^2}},$$

d'où

$$u = t\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}; \quad du = dt\sqrt{\quad};$$

en prenant $-c$ et $c$ pour les limites de $t$ qui répondent à celles $a$ et $b$ de $v$, nous aurons

$$N = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\frac{w-w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{-c}^{c} e^{-t^2}dt.$$

97. *Calcul de* D. En appelant $l'$ et $l$ les limites de $t$ qui répondent à celles $w$ et $w_2$ de $v$, nous aurons

$$D = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu}\frac{w-w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{l'}^{l} e^{-t^2}dt.$$

Comme aux limites $w$ et $w_2$ de $v$, répondent celles

$$w_2 - \frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu} = \frac{p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)}{\mu}$$

et

$$w - \frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu} = -\frac{p_1(w_2-w)+p_2(w_2-w)}{\mu} \text{ de } u,$$

il en résulte que les limites correspondantes $l'$ et $l$ de $t$ seront

$$l' = -\frac{p_1(w_1-w)+p_2(w_2-w)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}}\sqrt{\mu}$$

$$l = \frac{p(w_2 - w) + p_1(w_2 - w_1)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}}\sqrt{\mu};$$

ces limites étant de l'ordre $\sqrt{\mu}$, on peut les étendre de $-\infty$ à $+\infty$, et alors

$$\int_{l'}^{l} e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi};$$

de sorte qu'en divisant N par D nous obtiendrons

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-c}^{c} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{c} e^{-t^2}dt :$$

probabilité que $v$ est compris entre (nos 95 et 96) :

$$\frac{pw + p_1w_1 + p_2w_2}{\mu} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}.$$

Il nous reste à donner à ces limites l'expression formulée dans l'énoncé.

En remplaçant $A^2$ par sa valeur, nous aurons :

$$\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{(p+p_1+p_2)\,pp_1(w-w_1)^2 + (p+p_1+p_2)\,p_1p_2(w_1-w_2)^2 + (p+p_1+p_2)(w_2-w)^2\right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p^2p_1(w-w_1)^2 + pp_1^2(w-w_1)^2 + pp_1p_2(w-w_1)^2 + pp_1p_2(w_1-w_2)^2 + p_1^2p_2(w_1-w_2)^2\right.}$$
$$\left. + p_1p_2^2(w_1-w_2)^2 + p^2p_2(w_2-w)^2 + pp_1p_2(w_2-w)^2 + p^2p(w_2-w)^2\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p\left[p_1(w-w_1) + p_2(w-w_2)\right]^2 - 2pp_1p_2(w-w_1)(w-w_2) + pp_1p_2(w-w_1)^2\right.}$$
$$+ p_1\left[p(w_1-w) + p_2(w_1-w_2)\right]^2 - 2pp_1p_2(w_1-w)(w_1-w_2) + pp_1p_2(w_1-w_2)^2$$
$$\left. + p_2\left[p(w_2-w) + p_1(w_2-w_1)\right]^2 - 2pp_1p_2(w_2-w)(w_2-w_1) + pp_1p_2(w_2-w)^2\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu^4}\left\{p\left[p_1(w-w_1) + p_2(w-w_2)\right]^2 + p_1\left[p(w_1-w) + p_2(w_1-w)\right]^2\right.}$$
$$\left. + p_2\left[p_2(w_2-w) + p_1(w_2-w_1)\right]^2 + \left[\sqrt{pp_1p_2}\,(\overline{w-w_1} + \overline{w_1-w_2} + \overline{w_2-w})\right]^2\right\}.$$

Le dernier terme est nul, chacun des premiers peut se mettre sous une forme plus simple de la manière suivante :

$$p\left[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)\right]^2 = p\left[\mu w-(pw+p_1w_1+p_2w_2)\right]^2$$
$$= p\mu^2(w-m)^2;$$

et de même des autres; de sorte que le radical se réduit à

$$\frac{1}{\mu}\sqrt{2\left\{p(w-m)^2+p_1(w_1-m)^2+p_2(w_2-m)^2\right\}},$$

ou

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}\left\{\frac{pw^2+p_1w_1^2+p_2w_2^2}{\mu}-\left[\frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu}\right]^2\right\}}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. 1° Si $c$, et par suite P, sont constants, les limites se resserreront de plus en plus à mesure que $\mu$ augmente;

2° Si les limites restent constantes, ce qui exige que $c$ augmente avec $\mu$, on voit que P approche de 1 à mesure que $\mu$ augmente.

## CHAPITRE VII.

### THÉORIE DES ERREURS DES OBSERVATIONS.

98. Nous admettrons que les causes des erreurs constantes sont éliminées.

Dans cette hypothèse, les erreurs fortuites existant seules, il n'y a pas de raison pour qu'une erreur positive $+a$ ait plus de chance que l'erreur négative $-a$.

Nous supposerons que les observations sont faites par les meilleures méthodes, au moyen des instruments les plus parfaits, et avec la plus grande habileté possible, de sorte que les erreurs des observations seront des quantités très-faibles.

La théorie des erreurs a pour objet de donner des règles pour obtenir les résultats les plus avantageux, et les moyens d'apprécier la précision de ces résultats.

Le nombre des observations est toujours supposé très-grand.

La probabilité d'une erreur est une fonction de cette erreur, et sera une quantité infiniment petite, parce que le nombre des chances est infiniment grand.

Si $p_x$ désigne la probabilité d'une erreur $x$, on aura donc

$$p_x = \varphi(x)\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

L'équation $y = \varphi x$ est celle de la courbe de probabilité des erreurs.

On doit admettre :

1° Que $\varphi(x)$ est très-petit quand $x$ est un peu grand ;

2° Que $\varphi(x)$ est un maximum quand $x$ est un minimum, ou quand $x = 0$ ;

3° Que $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ;

4° Que la valeur la plus avantageuse du résultat d'un grand nombre d'observations est celle que l'on déduit de leur moyenne arithmétique.

Car si dans un grand nombre $\mu$ d'observations on trouve que l'observation $w_1$ a lieu $p_1$ fois, ..., l'observation $w_i$, $p_i$ fois, les probabilités des valeurs éventuelles à attendre seront (n° 71) :

$$\frac{p_1}{\mu}, \ldots, \frac{p_i}{\mu};$$

et ces probabilités seront d'autant plus exactes que $\mu$ sera plus grand. On aura donc pour la valeur à espérer :

$$m = w_1 \frac{p_1}{\mu} + \cdots + w_i \frac{p_i}{\mu} = \frac{p_1 w_1 + \cdots + p_i w_i}{\mu};$$

et cette valeur sera la plus avantageuse, puisque, $\mu$ étant très-grand, les erreurs positives se produiront à peu près aussi fréquemment que les négatives, de sorte que ces erreurs se compenseront, et que $m$ différera peu de la valeur exacte.

Nous subdiviserons la théorie des erreurs de la manière suivante :

§ I. Expression de la probabilité d'une erreur $x$.

§ II. Calcul de la valeur la plus avantageuse d'une inconnue à déduire de plusieurs observations.

§ III. Calcul de la valeur d'une inconnue, lorsqu'une fonction de cette inconnue est donnée par un grand nombre d'observations.

§ IV. Calcul de plusieurs inconnues, lorsqu'une fonction de ces inconnues est donnée par un grand nombre d'observations.

### § Ier. — EXPRESSION DE LA PROBABILITÉ DE LA VALEUR $x$.

99. Théorème. *Les erreurs positives pouvant se produire avec la même facilité que les erreurs régulières de même valeur absolue, si nous désignons par* $p_x$ *la probabilité d'une erreur* x, *par* h *une constante indéterminée dépendant du genre des observations, je dis qu'on aura*

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Première démonstration (par le binôme). Si $p$ et $q$ désignent les probabilités de A et B, les termes du binôme $(p+q)^\mu$ seront les probabilités des diverses combinaisons avec répétition de A et B en $\mu$ épreuves. Soit D la combinaison la plus possible : elle aura pour probabilité le plus grand terme G du binôme, dont la valeur est (n° 51)

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\mu pq}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Les $l^{mes}$ termes, avant et après G, du binôme $(p+q)^\mu$ seront, en faisant $m = \mu p$, $n = \mu q$, (n° 51) :

$$G_{N-l} = Ge^{-\frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2m} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2n} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

$$G_{N+l} = Ge^{-\frac{l^2-\frac{1}{2}l}{2m} - \frac{l^3-\frac{1}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4-\frac{1}{3}l^3}{3m^3} - \frac{l^2+\frac{1}{2}l}{2n} + \frac{l^3+\frac{1}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4+\frac{1}{2}l^3}{3n^3}}$$

Quand $p = q = \frac{1}{2}$, on a par les formules (2) et (3) :

$$G' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$G'_{N-l} = G'e^{-\frac{l^2}{\frac{\mu}{2}}}, \quad G'_{N+l} = G'e^{-\frac{l^2}{\frac{\mu}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

donc

$$G'_{N-l} = G'_{N+l}.$$

La plus grande probabilité G′ est celle d'un écart nul; $G'_{N-l}$ est la probabilité d'un écart $l$, $G'_{N+l}$ celle d'un écart $-l$.

Pour passer au cas de la continuité, nous devons faire $\mu$ infiniment grand, et nous pourrons poser

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}} = h dx, \quad h \text{ étant fini,}$$

$$l dx = x, \quad l \text{ étant infiniment grand.}$$

Les formules (α) et (β) deviennent par là :

$$G' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,dx, \quad \text{probabilité d'un écart nul.}$$

$$G'_{N-l} = G'.e^{-h^2x^2}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x.$$

Actuellement si A et B sont les causes des erreurs positives et des négatives, agissant avec une même facilité, de sorte que $p = q = \frac{1}{2}$, les combinaisons de A et B dans un nombre infini d'épreuves donneront naissance à tous les écarts possibles : les probabilités de ces combinaisons étant en même temps celles des écarts, il est clair que la probabilité $p_x$ d'un écart ou d'une erreur $x$ sera

$$p_x = G'.e^{-h^2x^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}dx.$$

100. Deuxième démonstration (d'après Laplace et Encke). Soient

$x_1, x_2 \ldots x_\mu$ les erreurs des observations

$w_1, w_2 \ldots w_\mu$ ;

$\varphi x_1, \varphi x_2 \ldots, \varphi x_\mu$ les probabilités de ces erreurs considérées comme certaines; la probabilité que ces erreurs auront lieu simultanément sera

$$y = \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu ;$$

et la probabilité de l'une quelconque $x$ de ces valeurs $x_1 \ldots x_\mu$ sera

$$p_x = \frac{ydx}{\int_{-a}^{a} ydx} = \frac{\varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx}{\int_{-a}^{a} \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx} = H\varphi x_1 \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu dx,$$

en posant le dénominateur égal à $\frac{1}{H}$.

Si chacune des observations $w_1 \ldots w_\mu$ n'arrive qu'une fois en $\mu$ épreuves, l'observation la plus avantageuse sera

$$a = \frac{w_1 + w_2 + \cdots w_\mu}{\mu} ;$$

d'où

$$w_1 - a + w_2 - a + \cdots + w_\mu - a = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Les erreurs déduites de l'observation seront :

$$x_1 = w_1 - a\,; \quad x_2 = w_2 - a\,; \ldots x_\mu = w_\mu - a.$$

Pour ces valeurs les plus probables des erreurs, l'expression $p_x$ doit devenir un maximum :

$$y = \varphi x_1 . \varphi x_2 \ldots \varphi x_\mu = \text{max.}$$
$$\text{l. } y = \text{l. } \varphi x_1 + \text{l. } \varphi x_2 + \cdots + \text{l. } \varphi x_\mu = \text{max.}$$

Écrivons pour abréger

$$\frac{d\,\text{l. } \varphi x_1}{dx_1} = \varphi' x_1, \text{ etc.};$$

nous devrons avoir :

$$\varphi' x_1 + \varphi' x_2 + \cdots + \varphi' x_\mu = 0,$$

ou

$$(w_1 - a)\frac{\varphi'(w_1 - a)}{w_1 - a} + (w_2 - a)\frac{\varphi'(w_2 - a)}{w_2 - a} + \cdots + (w_\mu - a)\frac{\varphi'(w_\mu - a)}{w_\mu - a} = 0. \quad (5)$$

Pour que cette relation puisse subsister simultanément avec la relation (4), il faut que :

$$\frac{\varphi'(w_1 - a)}{w_1 - a} = \frac{\varphi'(w_2 - a)}{w_2 - a} = \text{etc.} = \text{const.};$$

ou, généralement, que

$$\frac{\varphi' x}{x} = \text{const.} = k;$$

ou

$$\frac{d\,\text{l. } \varphi x}{x dx} = k;$$

d'où en intégrant :

$$\varphi x = c e^{\frac{1}{2} k x^2}.$$

Comme $\varphi x$ doit être un maximum pour $x = 0$, il faut que $k$ soit négatif; posons donc

$$\frac{1}{2} k = -h^2,$$

nous aurons :

$$\varphi x = c e^{-h^2 x^2}.$$

De plus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi x dx = 1 = e \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{c}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{c}{h} \sqrt{\pi};$$

d'où $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, et par suite

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

101. Premier corollaire. La probabilité P que $x$ est compris entre $a$ et $b$ est

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt;$$

et par suite, la probabilité que $x$ est compris entre $\pm a$ sera

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{ah} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Cette valeur exprime aussi le nombre des erreurs comprises entre 0 et $a$, quand on prend pour unité le nombre total D de toutes les erreurs possibles; car toutes les erreurs étant supposées également possibles, la probabilité que l'erreur $x$ est une de celles qui sont comprises entre 0 et $a$ sera

$$P = \frac{N}{D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt;$$

d'où

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \times D = \theta . D.$$

Exemple. Soit D = 1000, et $h = 1$, il y aura entre 0 et 0,5; 0 et 1,0; 0 et 2,0 respectivement 10000 = 520; = 840; = 995 erreurs tant positives que négatives; donc

| | | | |
|---|---|---|---|
| de | 0 à 0,5 | il y en a | 520 |
| de | 0,5 à 1,0 | » | 840 — 520 = 320 |
| de | 1,0 à 2,0 | » | 995 — 840 = 155, etc. |

102. Deuxième corollaire. *Cherchons la limite supérieure* ρ

*qui correspond à* $P = \frac{1}{2}$. Nous aurons à déterminer la valeur de $\rho$ pour laquelle

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho} e^{-t^2} dt, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\int_0^{\rho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

d'où, en développant :

$$\rho - \frac{1}{3}\rho^3 + \frac{1}{5}\frac{\rho^5}{1.2} - \text{etc.} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

on en déduira $\rho = 0{,}476936$.

103. Troisième corollaire. *Cherchons la valeur* r *de* a *qui donne* $P = \frac{1}{2}$, *dans*

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a} e^{-h^2x^2} dx, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

En faisant $P = \frac{1}{2}$, $a = r$ et $h = xt$, nous aurons

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2} dt.$$

Nous en conclurons, par la formule (7), que

$$\rho = hr; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{\rho}{h} \quad \text{et} \quad h = \frac{\rho}{r}. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$r$ se nomme l'*erreur probable*.

En changeant dans la formule (8) $h$ en $\frac{\rho}{r}$, elle devient :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2} dt = \frac{N}{D};$$

d'où

$$N = D \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2} dt = D \times \theta\left(\rho \frac{a}{r}\right). \quad \ldots \quad (10)$$

Exemple. Soit

$$r = 0{,}2637; \quad D = 470;$$

$$a = 0{,}1; \quad 0{,}2; \quad 0{,}3; \ldots$$

$$\frac{a}{r} = 0{,}3792; \quad 0{,}7584; \quad 1{,}1376; \ldots$$

$\rho$ étant égal à 0,476936, on trouve :

$$\theta\left(\rho\frac{a}{r}\right) = 0{,}20186;\quad 0{,}39102,\quad 0{,}55705;\ \ldots$$

donc

entre 0",0 et 0",1 on a $N = 0{,}20186 \times 470 = 95$ erreurs,

» 0,1 et 0,2 » $N = 0{,}18916 \times 470 = 89$ »

» 0,2 et 0,3 » $N = 0{,}16603 \times 470 = 78$ »

104. Quatrième corollaire. La quantité $h$ est appelée, par Gauss, *mesure de précision*, par Laplace, *poids des observations*.

La probabilité des erreurs $x$ étant en effet

$$P_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2} dx,$$

si $x$ reste le même, $P_x$ décroît avec $h$ ; l'observation qui est affectée de l'erreur $x$ devient d'autant plus précise ou a d'autant plus de poids que $h$ est plus grand.

105. Cinquième corollaire. La probalité de $x$, dans un genre d'observations caractérisé par $h$ étant

$$P_x = \frac{h dx}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2} dx,$$

celle de $x'$, dans un autre genre d'observations caractérisé par $h'$, étant

$$P_{x'} = \frac{h' dx'}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h'^2x'^2},$$

si l'on a $P_x = P_{x'}$, on devra avoir

$$hx = h'x', \quad \text{ou} \quad h : h' = x' : x;$$

donc *lorsque deux erreurs sont également probables, elles sont inversement proportionnelles aux mesures de précision des observations.*

En outre comme

$$h = \frac{\rho}{r}, \quad h' = \frac{\rho}{r'},$$

on en conclut

$$h : h' = r' : r;$$

donc *les erreurs probables sont inversement proportionnelles aux mesures de précision.*

106. Sixième corollaire. Dans un même genre d'observations, on a, entre les probabilités de deux erreurs $x$ et $x'$, la proportion (voir form. ($a$), n° 100).

$$P_x : P_{x'} = e^{-h^2x^2} : e^{-h^2x'^2}.$$

Soit $x' = 0$; on aura :

$$P_x : P_0 = e^{-h^2x^2} : 1 ;$$

et réciproquement, si dans un genre d'observations, on a

$$P_x : P_0 = e^{-mx^2} : 1 ,$$

on aura $h = \sqrt{m}$ dans ce genre d'observations.

107. Septième corollaire. *Construction de la courbe de probabilité*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Pour construire cette courbe, il faut connaître $h$; et pour cela, il faut connaître, ou la valeur

$y = k$ qui répond à une valeur $x = a$ de $x$;

ou la valeur

$y = G$ » » $x = o$ »

ou la valeur

$y = L$ » » $x = r$ »

On peut encore déterminer $h$ si l'on connaît $r$, puisque $h = \frac{\rho}{r}$; ou si l'on connaît le rapport

$$\frac{P_x}{P_0} = e^{-mx^2};$$

d'où $h = \sqrt{m}$.

*Propriétés de la courbe.* 1° $\frac{dy}{dx} = 0$ donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \text{max.}$$

Le sommet de la courbe est donc sur l'axe des $y$ à une distance $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$; la courbe est symétrique par rapport à cet axe.

2° $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ donne

$$x = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}};$$

chaque moitié de la courbe a donc un point d'inflexion.

3° Pour $x = \infty$ on a $y = 0$ : l'axe des $x$ est donc une asymptote.

4° Les ordonnées diminuent rapidement quand $x$ devient un peu grand.

En prenant $h = 1$, on trouve

$$\text{pour } x = 3, \; y = 0{,}0000610,$$
$$\text{» } x = 5, \; y = 0{,}000000000009.$$

### § II. DÉTERMINATION DES LIMITES DE $h$ ET DE $r$ DANS UN GENRE D'OBSERVATIONS CARACTÉRISÉ PAR CES VALEURS.

108. 1° *Détermination des limites probables de* h. Soit $a$ la valeur moyenne d'un grand nombre d'observations $w_1 \ldots w_\mu$ d'une même inconnue $x$.

On pourra concevoir une erreur moyenne $m$ telle que chacune des erreurs vraies $x - w_1 = \varepsilon_1 \ldots x - w_\mu = \varepsilon_\mu$ puisse être remplacée par cette erreur moyenne, de sorte que la probabilité du concours de toutes les erreurs différentes soit la même que la probabilité du concours des $\mu$ erreurs égales à $m$.

Nous donnerons plus bas le moyen de calculer $m$ à l'aide des erreurs fournies par l'observation; nous pourrons donc supposer $m$ connu.

La probabilité d'une erreur $m$ étant

$$P_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2m^2} dm,$$

celle du concours de $\mu$ erreurs $m$ sera

$$P = \frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-\mu h^2 m^2} (dm)^\mu.$$

Si $h$ se change en $h+\Delta$ et P en P′, on aura :

$$P' = \frac{(h+\Delta)^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-\mu(h+\Delta)^2 m^2} (dm)^\mu ;$$

d'où

$$\frac{P'}{P} = \left(1 + \frac{\Delta}{h}\right)^\mu e^{-2\mu h m^2 \Delta - \mu m^2 \Delta^2},$$

et,

$$\text{l.}\frac{P'}{P} = \mu \text{ l.}\left(1 + \frac{\Delta}{h}\right) - 2\mu h m^2 \Delta - \mu m^2 \Delta^2$$
$$= \left(\frac{\mu}{h} - 2\mu h m^2\right)\Delta - \mu\Delta^2\left(\frac{1}{2h^2} + m^2\right),$$

en négligeant les puissances supérieures de $\Delta$.

Pour que P devienne un maximum, il faut que l. $\frac{P'}{P}$ soit négatif, donc que

$$\frac{\mu}{h} - 2\mu h m^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

Posant cette valeur égale à $h_0$, nous aurons

$$m = \frac{1}{h_0\sqrt{2}},$$

et

$$\text{l.}\left[\frac{P'}{P}\right] = -\frac{\mu\Delta^2}{h_0^2}; \quad \left[\frac{P'}{P}\right] = e^{-\frac{\mu\Delta^2}{h_0^2}},$$
$$[P] : [P'] = 1 : e^{-\frac{\mu\Delta^2}{h_0}}.$$

[P] est la probabilité qui répond à la valeur $h_0$ de $h$;
[P′] celle qui répond à la valeur $h_0 + \Delta$ de $h$.
La mesure de précision de [P′] est donc

$$h' = \frac{\sqrt{\mu}}{h_0},$$

et l'on peut écrire

$$[P'] = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} d\Delta.$$

L'erreur probable R de $\Delta$ est par conséquent $R = \pm \frac{\rho}{h'}$; c'est-

à-dire qu'on peut parier un contre un que $h$ est compris entre $h_0 \pm \mathrm{R}$.

La valeur probable de $h$ est comprise entre les limites

$$h_0 - \mathrm{R} < h < h_0 + \mathrm{R}.$$

Ces limites deviennent, en remplaçant $h_0$ et R par leurs valeurs

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad \mathrm{R} = \frac{\rho}{h'} = \frac{\rho h_0}{\sqrt{\mu}} = \frac{\rho}{m\sqrt{2\mu}}:$$

$$\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < h < \frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right); \quad . \quad . \quad (a)$$

et la probabilité de ces limites est égale à $\frac{1}{2}$.

109. 2° *Détermination des limites probables de* r, *ou de l'erreur probable d'une observation.* Nous avons trouvé $r = \frac{\rho}{h}$; et si nous substituons à $h$ ses limites probables, nous aurons une probabilité $\frac{1}{2}$ que

$$\frac{\rho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)} < r < \frac{\rho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

ou que,

$$\rho\sqrt{2}.m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right). \quad . \quad . \quad (b)$$

*Calcul de m.* Soient $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ les erreurs vraies des $\mu$ observations $w_1 \ldots w_\mu$ d'une inconnue $x$; les probabilités des erreurs

$$x - w_1 = \varepsilon_1 \text{ sont } \mathrm{P}_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1$$

. . . . . .

$$x - w_\mu = \varepsilon_\mu \qquad \mathrm{P}_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu.$$

La probabilité du concours de ces erreurs sera donc

$$\mathrm{P} = \frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2)} d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu;$$

et cette probabilité ne changera pas si l'on pose

$$\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2 = \mu m^2,$$

ou
$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

ou si l'on fait

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = m.$$

La formule (*c*) n'est pas propre au calcul de $m$; car on ne connaît pas les $\varepsilon$, $x$ étant inconnu; mais en prenant pour $x$ sa valeur la plus avantageuse

$$x = \frac{w_1 + \cdots + w_\mu}{\mu} = a,$$

on pourra calculer $m$.

On posera à cet effet

$$a - w_1 = \varepsilon_1' \ldots a - w_\mu = \varepsilon_\mu'; \quad x - a = \varepsilon.$$

et comme

$$x - w_1 = \varepsilon_1 \ldots x - w_\mu = \varepsilon_\mu,$$

il s'ensuivra :

$$\varepsilon_1' + \varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu' + \varepsilon = \varepsilon_\mu;$$

d'où

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 + 2\varepsilon \sum_1^\mu \varepsilon_i' + \mu\varepsilon^2 = \sum_1^\mu \varepsilon_i^2;$$

mais on a par définition $\sum_1^\mu \varepsilon_i' = 0$; donc

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 + \mu\varepsilon^2 = \sum_1^\mu \varepsilon_i^2 = \mu m^2.$$

Si nous posons $\varepsilon^2 = \frac{m^2}{\mu}$, nous aurons

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2 = (\mu - 1)\, m^2;$$

d'où
$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1'^2 + \cdots + \varepsilon_\mu'^2}{\mu - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

110. *Généralisation de la formule*

$$P_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Dans la démonstration de cette formule, nous avons supposé que les observations $w_1 \ldots w_\mu$ avaient la même probabilité $\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire la même précision.

Mais si ces valeurs $w_1 \ldots w_\mu$ se répètent respectivement $p_1 \ldots p_\mu$ fois, leurs probabilités ou leurs précisions seront respectivement

$$\frac{p_1}{p_1 + \cdots + p_\mu} \cdots \frac{p_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu};$$

dans ce cas la valeur la plus avantageuse ou la plus probable sera

$$a = \frac{p_1 w_1 + \cdots + p_\mu w_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu};$$

ce qui donne l'équitation

$$p_1 (w_1 - a) + \cdots + p_\mu (w_\mu - a) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

La formule (5) du n° 100 s'écrit alors

$$p_1 (w_1 - a) \frac{\varphi' (w_1 - a)}{p_1 (w_1 - a)} + \cdots + p_\mu (w_\mu - a) \frac{\varphi' (w_\mu - a)}{p_\mu (w_\mu - a)} = 0. \quad . \quad (5)$$

Et pour que ces deux équations aient lieu simultanément, il faut que

$$\frac{\varphi' x_1}{p_1 x_1} = \frac{\varphi' x_2}{p_2 x_2} = \cdots = \frac{\varphi' x_\mu}{p_\mu x_\mu};$$

d'où

$$\frac{\varphi' x}{px} = k, \quad \text{et} \quad \varphi x = c e^{-ph^2 x^2}.$$

La détermination de la constante donnera

$$c = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}};$$

d'où

$$\mathrm{P}_x = \varphi x dx = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} e^{-ph^2x^2} dx = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mathrm{H}^2x^2} dx,$$

en posant $h\sqrt{p} = \mathrm{H}$.

Les géomètres allemands nomment la quantité $p$, le poids de $x$ ou de l'observation correspondante $w$.

Ce poids exprime le nombre de répétitions d'une même observation $w$; c'est le numérateur de la fraction $\frac{p}{p_1 + \cdots + p_\mu}$ qui indique la probabilité approchée de $w$.

Donc si $h$ est la mesure de précision d'une observation sim-

ple $w$, ou de son erreur $x$, $\mathrm{H} = h\sqrt{p}$ sera celle de $x$ lorsque l'observation $w$ s'est répétée $p$ fois.

L'erreur probable R sera dans ce cas

$$\mathrm{R} = \frac{\rho}{\mathrm{H}} = \frac{\rho}{h\sqrt{p}} = \frac{r}{\sqrt{p}},$$

$r$ étant l'erreur probable d'une observation simple.

111. Premier corollaire. Pour deux séries d'observations du même genre, c'est-à-dire pour lesquelles $h$ est le même, on aura

$$\mathrm{H} = h\sqrt{p}; \quad \mathrm{H}' = h\sqrt{p'};$$

donc

$$\mathrm{H}^2 : \mathrm{H}'^2 = p : p' :$$

*les poids sont proportionnels aux carrés des mesures de précision.*

Dans la même hypothèse, on a

$$\mathrm{R} = \frac{\rho}{h}\frac{1}{\sqrt{p}}; \quad \mathrm{R}' = \frac{\rho}{h}\frac{1}{\sqrt{p'}};$$

donc

$$\mathrm{R}^2 : \mathrm{R}'^2 = p' : p :$$

*les poids sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs probables.*

Enfin on a également

$$\mathrm{P}_x = \frac{p\sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} e^{-ph^2x^2} dx; \quad \mathrm{P}_{x'} = \frac{p'\sqrt{h}}{\sqrt{p}} e^{-p'h^2x'^2} dx';$$

si donc $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_{x'}$, on aura

$$ph^2x^2 = p'h^2x'^2;$$

d'où

$$x' : x = \sqrt{p} : \sqrt{p'} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*les erreurs également probables sont inversement proportionnelles aux racines carrées des poids.*

112. Deuxième corollaire. La probabilité qu'une erreur $x$, qui se rapporte au poids $p$, est comprise entre $\pm a$ est :

$$\mathrm{P} = \frac{p\sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ph^2x^2} dx,$$

ou, par une transformation bien connue :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah\sqrt{p}} e^{-t^2} dt;$$

pour une erreur qui se rapporte au poids $p'$ on aurait de même

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h\sqrt{p'}} e^{-t^2} dt.$$

$P'$ sera égal à $P$ si

$$ah\sqrt{p} = a'h\sqrt{p'},$$

ou si

$$a : a' = \sqrt{p'} : \sqrt{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ce qui s'accorde avec la formule (1).

Si nous posons $y = y_1 y_2 \ldots y_\mu$, la probabilité Y d'une valeur de $x$ sera

$$Y = \frac{ydx}{\int_{-\infty}^{\infty} ydx};$$

ou en posant

$$\int_{-\infty}^{\infty} ydx = \frac{1}{K} :$$

$$Y = Kydx;$$

et, en remplaçant $y$ par sa valeur :

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les observations $w$ sont d'autant meilleures qu'elles diffèrent moins de $x$, ou que les erreurs $\varepsilon$ sont plus faibles, ou que les probabilités $P_\varepsilon$ de ces erreurs sont plus grandes.

La probabilité (1) est la plus grande possible quand on a

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 = \sum_1^\mu p_i (x - w_i)^2 = \text{min.}$$

d'où

$$\sum_1^\mu p_i (x - w_i) = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i} = a.$$

Démontrons que cette valeur de $x$ est la plus avantageuse. Posons $x = a + u$, $u$ sera l'erreur de la moyenne arithmétique $a$; et l'on aura :

$$a + u - w_1 = \varepsilon_1 \ldots a + u - w_\mu = \varepsilon_\mu ;$$

et par suite, puisque $dx = du$ :

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i (a - w_i + u)^2} du$$

$$= K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ \left( \sum_1^\mu p_i \right) u^2 + 2u \sum_1^\mu p_i (a - w_i) + \sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 \right\}} du ;$$

et comme $\Sigma p_i (a - w_i) = 0$ :

$$Y = \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ u^2 \sum_1^\mu p_i + \sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 \right\}} du.$$

Or, si nous développons $\sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2$, nous trouverons

$$\sum_1^\mu p_i (a - w_i)^2 = \sum_1^\mu p_i a^2 - 2a \sum_1^\mu p_i w_i + \sum_1^\mu p_i w_i^2$$

$$= \frac{\sum_1^\mu (p_i w_i)^2}{\left( \sum_1^\mu p_i \right)^2} \sum_1^\mu p_i - 2 \frac{\left( \sum_1^\mu p_i w_i \right)^2}{\sum_1^\mu (p_i)^2} \sum_1^\mu p_i + \sum_1^\mu p_i w_i^2$$

$$= \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left( \sum_1^\mu p_i w_i \right)^2}{\Sigma p_i} ;$$

et par suite

$$Y = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \ldots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 u^2 \sum_1^\mu p_i} . e^{-h^2 \left\{ \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left( \sum_1^\mu p_i w_i \right)^2}{\sum_1^\mu p_i} \right\}} du.$$

Pour déterminer K reprenons la valeur de Y

$$Y = \frac{y dx}{\int_{-\infty}^{\infty} y dx},$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y dx = 1.$$

Nous aurons par suite

$$1 = K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i} \right\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i u^2} du$$

$$= K \frac{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2 \left\{ \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i} \right\}} \frac{1}{h \sum_1^\mu p_i} \sqrt{\pi};$$

d'où

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h \sqrt{\sum_1^\mu p_i} \frac{(\sqrt{\pi})^\mu}{h^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}} e^{-h^2 \left\{ \sum_1^\mu p_i w_i^2 - \frac{\left(\sum_1^\mu p_i w_i\right)^2}{\sum_1^\mu p_i} \right\}};$$

et substituant cette valeur dans l'expression précédente de Y, nous aurons :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h \sum_1^\mu p_i e^{-h^2 u^2 \sum_1^\mu p_i} du :$$

probabilité que $u$ est l'erreur commise en prenant

$$x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}.$$

On voit que le maximum de Y répond à $u = 0$, et par suite que

$$x = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}$$

est la valeur la plus avantageuse; ce maximum est

$$Y = \frac{h \sum_1^\mu p_i}{\sqrt{\pi}} du.$$

113. Corollaire. Si dans la formule

$$P_x = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu p_i} du$$

qui exprime la probabilité de l'erreur de

$$x = a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i},$$

on pose

$$H = h\sqrt{\sum_1^\mu p_i},$$

on aura

$$P_u = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2u^2} du.$$

Donc : 1° la mesure de précision de la moyenne

$$a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i}$$

est

$$h\sqrt{\sum_1^\mu p_i} = h\sqrt{p_1 + \cdots + p_\mu}.$$

2° Le poids de $x = a$ est

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = \sum_1^\mu p_i;$$

la précision de $a$ est donc proportionnelle à la racine carrée du poids.

3° L'erreur probable de la moyenne $a$ est

$$R = \frac{\rho}{H} = \frac{\rho}{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} = \frac{r}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}};$$

c'est-à-dire qu'on peut parier un contre un que

$$-\frac{r}{\sqrt{\Sigma p_i}} < u < \frac{r}{\sqrt{\Sigma p_i}}$$

ou que

$$a - \mathrm{R} < x < a + \mathrm{R}.$$

114. 2° Les observations ont la même précision. Dans ce cas on peut poser

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_\mu = 1 ;$$

d'où

$$\sum_1^\mu p_i = \mu ; \quad \sum_1^\mu p_i w_i = \sum_1^\mu w_i .$$

Le résultat le plus avantageux sera

$$x = a' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} .$$

La probabilité de l'erreur $u'$ de ce résultat sera

$$\mathrm{P}' = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du',$$

ou

$$\mathrm{P}' = \frac{\mathrm{H}'}{\sqrt{\pi}} e^{-\mathrm{H}'^2 u'^2} du',$$

en posant $\mathrm{H}' = h\sqrt{\mu}$.

Donc :

1° La mesure de précision de la moyenne $a' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu}$ est $h\sqrt{\mu}$.

2° Le poids de $x = a'$ est $\mu$. La précision de $a'$ est donc proportionnelle à la racine carrée du poids.

3° L'erreur probable de la moyenne $a'$ est

$$\mathrm{R}' = \frac{\rho}{\mathrm{H}'} = \frac{\rho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}} ;$$

on a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ que

$$a' - \mathrm{R}' < x < a' + \mathrm{R}'.$$

Remarque. L'erreur moyenne $m = \pm\sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$ déduite d'une série d'observations $w_1 \ldots w_\mu$ exprime que l'erreur à craindre dans une nouvelle observation est comprise entre $\pm m$, ou que cette observation est comprise entre $a \pm m$. Soit $w$ cette nouvelle

observation; $\varepsilon$ son erreur; on aura, pour la probabilité que cette erreur est comprise entre $\pm m$ :

$$P_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-m}^{m} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{m} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{hm} e^{-t^2} dt.$$

Pour une autre série d'observations on aurait

$$P_{\varepsilon'} = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{m'} e^{-h'^2\varepsilon'^2} d\varepsilon' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h'm'} e^{-t^2} dt;$$

Si donc $P_\varepsilon = P_{\varepsilon'}$, on aura $hm = h'm'$, ou

$$m : m' = h' : h;$$

donc, toutes choses égales d'ailleurs, les erreurs moyennes sont inversement proportionnelles aux mesures de précision.

Ainsi les observations faites avec un instrument B, dont l'erreur moyenne est double de celle qui est relative aux observations de la même inconnue par un instrument A, sont de moitié moins précises que ces dernières.

### Calcul approximatif de $u$ et de $u'$.

115. *Calcul de $u'$.* Nous avons posé

$$x = a' + u' = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} + u';$$

et nous avons trouvé pour la probabilité de l'erreur $u'$ commise en prenant pour $x$ la moyenne arithmétique $a'$ :

$$p_{u'} = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du'; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

et pour la probabilité de l'erreur moyenne

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$$

à craindre dans une observation future :

$$p_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2m^2} dm.$$

Or on peut supposer que la valeur moyenne $a'$ se rencontre dans les observations futures; alors $u'$ aura la même probabilité que $m$, et de $p_{u'} = p_m$ on conclura

$$\mu h^2 u'^2 = h^2 m^2;$$

d'où

$$u' = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

et par conséquent :

$$a' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < x < a' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

116. 2° *Calcul de u.* Une observation dont le poids est $p_i$, et l'erreur $\varepsilon_i$, prise parmi les observations $w_1 \ldots w_\mu$, peut être considérée comme étant la moyenne arithmétique

$$w_i = \frac{o_1 + o_2 + \cdots + o_{p_i}}{p_1}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

des $p_i$ observations fictives $o$ d'une même précision, ou ayant pour poids 1; car la probabilité de l'erreur $\varepsilon_i$ de $w_i$ est

$$p_{\varepsilon_i} = \frac{h\sqrt{p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_i h^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$$

qui est de même forme que l'expression ($\beta$).

Soit $u$ l'erreur moyenne d'une observation $o$, ou d'une observation dont le poids est 1; $u'_i$ l'erreur de la moyenne (1); on aura, par la formule ($a$) :

$$u'_i = \pm \frac{K}{\sqrt{p_i}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

A l'aide de cette formule, on trouve aisément une valeur approchée de K; car on peut d'abord, sans erreur sensible, remplacer $u_i$ par $\varepsilon_i$, ce qui donne, au lieu de ($b$) :

$$p_i \varepsilon_i^2 = K^2;$$

d'où l'on tire, en faisant successivement $i = 1, 2 \ldots \mu$, et ajoutant

$$\mu K^2 = \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2;$$

d'où

$$K = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dans cette formule, $\varepsilon_i = x - w_i$ est encore inconnu; mais en prenant pour $x$ la moyenne

$$a = \frac{\sum_1^\mu p_i w_i}{\sum_1^\mu p_i},$$

on connaîtra $\varepsilon_i' = a - w_i$, et il s'agira d'exprimer K en fonction de $\varepsilon_i'$.

Posons à cet effet $x - a = u$; d'où

$$\varepsilon_i' = a - w_i = x - w_i - u = \varepsilon_i - u;$$

nous aurons

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 = p_1 \varepsilon_1'^2 + \cdots + p_\mu \varepsilon_\mu'^2 = p_1 (\varepsilon_1 - u)^2 + \cdots + p_\mu (\varepsilon_\mu - u)^2$$
$$= \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 - 2u \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i + u^2 \sum_1^\mu p_i.$$
$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i = p_1 \varepsilon_1 + \cdots + p_\mu \varepsilon_\mu = p_1 (x - w_1) + \cdots + p_\mu (x - w_\mu)$$
$$= x \sum_1^\mu p_i - \sum_1^\mu p_i w_i = x \sum_1^\mu p_i - a \sum_1^\mu p_i = (x - a) \sum_1^\mu p_i = u \sum_1^\mu p_i.$$

Et par suite $$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 = \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2 - u^2 \sum_1^\mu p_i.$$

Nous pourrons poser approximativement

$$u^2 \sum_1^\mu p_i = K^2;$$

car K et $u$ sont à peu près inversement proportionnels à leurs poids 1 et $\sum_1^\mu p_i$; alors, en tenant compte de la formule (2), nous aurons :

$$\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2 = K^2 (\mu - 1); \quad \text{d'où} \quad K = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu p_i \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}} \quad \ldots \quad (c)$$

K est l'erreur moyenne à craindre sur $\mu$ observations $o$ de même précision dont le poids est pris pour unité.

La probabilité de K est

$$p_k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2k^2} dk;$$

mais en supposant que la moyenne $a$ se rencontre parmi les $\mu$ observations fictives $o$ à venir, la probabilité de l'erreur $u$ commise sur $a$, qui est

$$p_u = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu p_i} du$$

sera égale à $p_k$, et l'on aura, par suite :

$$h^2u^2 \sum_1^\mu p_i = h\mathrm{K}^2,$$

d'où

$$u = \pm \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

$\sum_1^\mu p_i$ est le poids P de $u$; on peut donc écrire

$$u = \pm \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\mathrm{P}}}.$$

La formule $(b)$ donne

$$p_i = \pm \frac{\mathrm{K}^2}{u_i'^2};$$

et par suite

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_1^\mu \frac{1}{u'^2}}}.$$

**Résumé des formules précédentes.**

117. I. *Observations d'égale précision.*

$x = \frac{\sum_1^\mu w_i}{\mu} = a'$, valeur la plus avantageuse.

$m = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$, erreur moyenne à craindre sur chaque nouvelle observation $w$;

elle exprime que

$$a' - m < w < a' + m.$$

$$x' = a' + u'.$$

$u' = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}}$, erreur de la moyenne arithmétique $a'$;

elle exprime que

$$a' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < x < a' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

$\mu$ est le poids de $a'$.

La précision de $a'$ est proportionnelle à $\sqrt{\mu}$.

Les limites de l'erreur probable $r$ d'une observation sont données par :

$$\rho\sqrt{2}m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right).$$

L'erreur probable de la moyenne $a'$ est

$$R' = \frac{\rho}{H'} = \frac{\rho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}};$$

c'est-à-dire qu'on pourra parier un contre un que

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\rho\sqrt{2}m\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) < R' < \frac{1}{\sqrt{\mu}}\rho\sqrt{2}m\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right);$$

et que

$$a' - R' < x < a' + R'.$$

118. II. *Observations de précisions diverses.*

$x = \dfrac{\sum_1^{\mu} p_i w_i}{\sum_1^{\mu} p_i} = a$, valeur la plus avantageuse.

$K = \pm \sqrt{\dfrac{\sum_1^{\mu} p_i \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}}$, valeur moyenne des observations o de même précision dont le poids est pris pour unité;

de sorte que

$$o - \mathrm{K} < w < o + \mathrm{K}.$$

$u'_i = \pm \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{p_i}}$, erreur de $w_i$, en regardant $w_i$ comme une moyenne arithmétique de $p_i$ observations $o$ d'égale précision ;

elle exprime que

$$w_i - u'_i < x < w_i + u'_i.$$

$u = \pm \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}$, erreur de $a$;

elle exprime que

$$a - \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}} < x < a + \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\sum_1^\mu p_i}}.$$

119. Premier exemple. *Observations d'égale précision.* Un angle a été mesuré, sans répétition, quatorze fois avec le même théodolite, et par le même observateur. Voici le tableau des observations :

| Nos d'ordre. | $w$. | $\varepsilon'$ $a' - w$. | $\varepsilon'^2$. |
|---|---|---|---|
| 1 | 17°56′45″,00 | — 5″,37 | 28″,84 |
| 2 | 31,25 | + 8,38 | 70,22 |
| 3 | 42,50 | — 2,87 | 8,24 |
| 4 | 45,00 | — 5,37 | 28,84 |
| 5 | 37,50 | + 2,13 | 4,54 |
| 6 | 38,33 | + 1,30 | 1,69 |
| 7 | 27,50 | + 12,13 | 147,14 |
| 8 | 43,33 | — 3,70 | 13,69 |
| 9 | 40,63 | — 1,00 | 1,00 |
| 10 | 36,25 | + 3,38 | 11,42 |
| 11 | 42,50 | — 2,87 | 8,24 |
| 12 | 39,17 | + 0,46 | 0,21 |
| 13 | 45,00 | — 5,37 | 28,84 |
| 14 | 40,83 | — 1,20 | 1,44 |
| | $\Sigma w_i = 554,79$ | + 27,78<br>— 27,75 | $\Sigma \varepsilon'^2 = 354,35$ |

1° $$a' = \frac{\sum_1^{\mu} w_i}{\mu} = \frac{554'',79}{14} = 39'',65.$$

2° $\varepsilon' = a' - w_i.$ } se trouvent dans le tableau.

3° $\varepsilon'^2.$ }

4° $$m = \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon'^2}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{354,35}{13}} = 5'',22;$$

l'erreur à craindre dans une nouvelle observation est donc comprise entre

$$39,63 - 5,22 = 34'',41$$

et

$$39,63 + 5,22 = 44'',85.$$

5° $$u' = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}} = \pm \frac{5,22}{\sqrt{14}} = \pm 1'',40;$$

la vraie valeur de l'angle est donc comprise entre

$$39,63 - 1,40 = 38'',23$$

et

$$39,63 + 1,40 = 41'',03.$$

6° On trouvera, par les formules relatives aux limites de $r$ et de R′, qu'on peut parier un contre un que

$$r \text{ est entre } \pm 3'',52,\ R' \text{ entre } \pm 0'',94;$$

ou qu'une observation future sera comprise entre

$$39,63 - 3,52 = 36'',11$$

et

$$39,63 + 3,52 = 43'',15.$$

et que la vraie valeur de $x$ est entre

$$39,63 - 0,94 = 38'',69$$

et

$$39,63 + 0,94 = 40'',57.$$

120. Deuxième exemple. *Observations d'inégale précision.* Le

même angle a été observé, avec répétition, quatorze fois; on a formé le tableau suivant des observations :

| Nos d'ordre. | $p$. | $w$. | $pw$. | $\varepsilon'$. | $p\varepsilon'$. | $\varepsilon'^2$. | $p\varepsilon'^2$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 17°56′45″,00 | 225,00 | — 5,22 | — 26,10 | 27,248 | 136,24 |
| 2 | 4 | 31,35 | 125,00 | 8,53 | 34,12 | 72,761 | 291,04 |
| 3 | 5 | 42,50 | 212,50 | — 2,72 | — 13,60 | 7,398 | 36,99 |
| 4 | 3 | 45,00 | 135,00 | — 5,22 | — 15,66 | 27,248 | 81,74 |
| 5 | 3 | 37,50 | 112,50 | 2,28 | 6,84 | 5,198 | 15,59 |
| 6 | 3 | 38,33 | 115,00 | 1,45 | 4,35 | 2,103 | 6,31 |
| 7 | 3 | 27,50 | 82,50 | 12,28 | 36,84 | 150,798 | 452,39 |
| 8 | 3 | 43,33 | 130,00 | — 3,55 | — 10,65 | 12,603 | 37,81 |
| 9 | 4 | 40,63 | 162,50 | — 0,85 | — 3,40 | 0,723 | 2,89 |
| 10 | 2 | 36,25 | 72,50 | 3,53 | 7,06 | 12,461 | 24,92 |
| 11 | 3 | 42,50 | 127,50 | — 2,72 | — 8,16 | 7,398 | 22,19 |
| 12 | 3 | 39,17 | 117,50 | 0,61 | 1,83 | 0,372 | 1,12 |
| 13 | 2 | 45,00 | 90,00 | — 5,22 | — 10,44 | 27,248 | 54,49 |
| 14 | 3 | 40,83 | 122,50 | — 1,05 | 3,15 | 1,103 | 3,31 |
| | 46 | | 1830,00 | | 91,04 | | 1167,03 |
| | | | | | — 91,16 | | |

1° $a = \dfrac{\sum_1^{\mu} p_i \omega_i}{\sum_1^{\mu} p_i} = \dfrac{1830}{46} = 39''78$ ;

2° $\varepsilon' = a - \omega_i$ ;

3° $p\varepsilon'$ ; pour la vérification, il faut que $\sum_1^{\mu} p_i \varepsilon'_i = 0$

4° $\varepsilon'^2$ et $p\varepsilon'^2$ ;

} Ces valeurs sont données dans le tableau.

5° $K = \sqrt{\dfrac{\sum_1^{\mu} p_i \varepsilon_i'^2}{\mu - 1}} = \sqrt{\dfrac{1167,03}{13}} = \pm 9''475$ ;

6° $u = \dfrac{\pm K}{\sqrt{\sum_1^{\mu} p_i}} = \dfrac{\pm 9,475}{\sqrt{46}} = \pm 1''397$ ;

$$7^\circ\ u_i' = \pm \frac{K}{\sqrt{p_i}}$$

donnera :

$$u_1' = u_5' = \pm \frac{9{,}475}{\sqrt{5}} = \pm 4''24,$$

$$u_2' = u_9' = \pm 4''74,$$

$$u_4' = u_5' = u_6' = u_7' = u_8' = u_{11}' = u_{12}' = u_{14}' = \pm 5''47,$$

$$u_{10}' = u_{13}' = \pm 6''70.$$

## § 3. — VALEUR LA PLUS AVANTAGEUSE D'UNE INCONNUE DONT UNE FONCTION EST DONNÉE PAR UN GRAND NOMBRE D'OBSERVATIONS.

**121. I.** *Équations de condition.*

Soit $\varphi$ une fonction $f(X)$ de l'inconnue X, donnée par $\mu$ observations $\varphi_1 \dots \varphi_\mu$; A une valeur très-approchée de X; $x$ sa correction très-petite, de sorte que

$$X = A + x.$$

Soient $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\mu$ les erreurs des observations; les valeurs exactes seront $\varphi_1 + \varepsilon_1 \dots \varphi_\mu + \varepsilon_\mu$; et l'on aura

$$\varphi_1 + \varepsilon_1 = f_1(A + x) = f_1A + f_1'A.x + \frac{f_1''A}{1.2}x^2 + \dots = f_1A + f_1'Ax,$$

$x$ étant très-petit,

. . . . . .

$$\varphi_\mu + \varepsilon_\mu = f_\mu A + f_\mu' A x.$$

Ou, si nous posons $f_1A = \alpha_1 \dots f_\mu A = \alpha_\mu$ ; $f_1'A = a_1 \dots f_\mu'A = a_\mu$ :

d'où

$$\varphi_1 + \varepsilon_1 = \alpha_1 + a_1 x \dots \varphi_\mu + \varepsilon_\mu = \alpha_\mu + a_\mu x ;$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \varphi_1 + a_1 x \dots \varepsilon_\mu = \alpha_\mu - \varphi_\mu + a_\mu x ;$$

ou enfin, en faisant $\alpha_1 - \varphi_1 = n_1 \dots \alpha_\mu - \varphi_\mu = n_\mu$ :

$$\varepsilon_1 = n_1 + a_1 x \dots \varepsilon_\mu = n_\mu + a_\mu x.$$

122. II. *Valeur la plus avantageuse de* x.

1° Les observations sont supposées de même précision.

Les probabilités des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ seront respectivement

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1 \ldots\ldots p_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu ;$$

et la probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs sera

$$\mathrm{P} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2 \sum_1^\mu \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu .$$

Cette probabilité sera un maximum pour

$$\sum_1^\mu \varepsilon_i^2 = \text{min.}; \quad \text{ou} \quad (n_1 + a_1 x)^2 + \cdots + (n_\mu + a_\mu x)^2 = \text{min.}$$

d'où :

$$a_1(n_1 + a_1 x) + \cdots + a_\mu (n_\mu + a_\mu x) = o,$$

et par suite

$$x = -\frac{\sum_1^\mu n_i a_i}{\sum_1^\mu a_i^2} = a.$$

Démontrons que cette valeur est la plus avantageuse.

Soit $u$ l'erreur commise en prenant $x$ pour la valeur $a$; de sorte que $x = a + u$, et cherchons la valeur la plus probable de $x$.

Si nous représentons par Y l'expression

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2 \sum_1^\mu (n_i + a_i x)^2}$$

qui est, au facteur $d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_\mu$ près, la probabilité de l'existence simultanée des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$, la probabilité d'une valeur de $x$ sera

$$\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{Y}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Y}dx} = \frac{e^{-h^2 \sum_1^\mu (n_i + a_i x)^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_1^\mu (n_i + a_i x)^2} dx} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} .$$

123. *Calcul de* N. Appelons $u$ l'erreur commise en prenant $x$ égal à $a$, nous aurons

$$x = -\frac{\sum_1^\mu n_i a_i}{\sum_1^\mu a_i^2} + u;$$

et

$$\mathrm{N} = e^{-h^2 \sum_1^\mu (n_i + a_i x)^2} dx$$

$$= e^{-h^2 \left\{ \left[ n_1 + a_1 u - a_1 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right]^2 + \cdots + \left[ n_\mu + a_\mu u - a_\mu \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right]^2 \right\}} du$$

$$= du \cdot e^{-h^2 \left\{ a_1^2 u^2 + 2a_1 u \left( n_1 - a_1 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right) + \left( n_1 - a_1 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right)^2 + \cdots \right.}$$

$$\left. + a_\mu^2 u^2 + 2a_\mu u \left( n_\mu - a_\mu \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right) + \left( n_\mu - a_\mu \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right)^2 \right\}$$

$$= du \cdot e^{-h^2 \left\{ \left( n_1 - a_1 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right)^2 + \cdots + \left( n_\mu - a_\mu \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right)^2 \right\}}$$

$$\times e^{-2h^2 u \left\{ a_1 \left( n_1 - a_1 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right) + \cdots + a_\mu \left( n_\mu - a_\mu \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} \right) \right\}}$$

$$\times e^{-h^2 u^2 (a_1^2 + \cdots + a_\mu^2)}.$$

Le premier facteur de $du$ étant constant disparaîtra comme commun à N et à D; le second est égal à l'unité, car son exposant se réduit à $\Sigma n_i a_i - \Sigma a_i^2 \frac{\Sigma n_i a_i}{\Sigma a_i^2} = 0$; il reste donc:

$$\mathrm{N} = e^{-h^2 u^2 \sum_1^\mu a_i^2} du.$$

124. *Calcul de* D. En laissant de côté les deux facteurs énumérés précédemment, l'expression de D se réduit à

$$\mathrm{D} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 u^2 \sum_1^\mu a_i^2} du,$$

qu'on ramène aisément à celle-ci

$$\mathrm{D} = \frac{1}{h \sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \frac{1}{h \sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}} \sqrt{\pi}.$$

Et par suite

$$P_x = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu a_i^2} du .$$

Cette probabilité est la plus grande possible quand $u = 0$ ; et par suite la valeur

$$x = -\frac{\sum_1^\mu n_i a_i}{\sum_1^\mu a_i^2}$$

est la plus avantageuse.

Le poids de cette détermination de $x$ est

$$\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}.$$

La probabilité que $u$ est compris entre $\pm\delta$ sera :

$$P = \frac{h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-h^2u^2\sum_1^\mu a_i^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta h\sqrt{\sum_1^\mu a_i^2}} e^{-t^2} dt .$$

2° En supposant que les observations soient d'inégale précision, on trouvera :

$$x = -\frac{\sum_1^\mu p_i n_i a_i}{\sum_1^\mu p_i a_i^2} .$$

§ 4. — DÉTERMINATION DES VALEURS LES PLUS PROBABLES DE PLUSIEURS INCONNUES, UNE FONCTION DE CES INCONNUES ÉTANT DONNÉE PAR PLUSIEURS OBSERVATIONS.

**Observations de même précision.**

125. I. *Équations de condition.* Supposons une fonction de six inconnues

$$\varphi = F(X, Y, Z, U, V, T),$$

donnée par les $\mu$ observations d'égale précision $h$ : $\varphi_1 \ldots \varphi_\mu$.

Soient $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ les erreurs des observations, de sorte que les vraies valeurs de la fonction seront

$$\varphi_1 + \varepsilon_1 \ldots\ldots \varphi_\mu + \varepsilon_\mu .$$

Représentons par $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, $U_0$, $V_0$, $T_0$ des valeurs très-approchées des inconnues, et par $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $t$ leurs corrections très-petites; de sorte que

$$X = X_0 + x, \text{ etc.}$$

Posons

$$F_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, T_0) = F_1; \text{ etc; } F_\mu(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, T_0) = F_\mu$$

$$\frac{dF_1}{dX_0} = a_1, \frac{dF_1}{dY_0} = b_1, \frac{dF_1}{dZ_0} = c_1, \frac{dF_1}{dU_0} = d_1, \frac{dF_1}{dV_0} = e_1, \frac{dF_1}{dT_0} = f_1, \text{ etc.}$$

$$\frac{dF_\mu}{dX_0} = a_\mu, \text{ etc.}$$

En remplaçant la fonction et les inconnues par leurs valeurs dans la première équation, nous aurons

$$\varepsilon_1 + \varphi_1 = F_1(X_0 + x, \ldots, T_0 + t), \text{ etc.; } \varepsilon_\mu + \varphi_\mu = F_\mu(X_0 + x, \ldots, T_0 + t);$$

ou, en développant et négligeant les termes d'ordres supérieurs :

$$\varepsilon_1 + \varphi_1 = F_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + e_1 v + f_1 t, \text{ etc.;}$$
$$\varepsilon_\mu + \varphi_\mu = F_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu u + e_\mu v + f_\mu t.$$

ou bien, en posant $F_1 - \varphi_1 = n_1$, etc., nous aurons les équations de condition

$$\varepsilon_1 = n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + e_1 v + f_1 t, \text{ etc.;}$$
$$\varepsilon_\mu = n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu u + e_\mu v + f_\mu t.$$

126. II. *Valeurs les plus probables des inconnues* x, y, ... t.
Les probabilités des erreurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ sont (n° 99) :

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1 \ldots\ldots p_{\varepsilon_\mu} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu ;$$

et la probabilité de leur concours :

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2 \sum_1^{\mu} \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_\mu .$$

Cette probabilité est un maximum lorsque

$$\Omega = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i^2 = \text{min.};$$

c'est-à-dire quand $x$, $y$ ... $t$ seront déterminés par les équations :

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dx} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dx} = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_\mu\varepsilon_\mu ,$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dy} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dy} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dy} = b_1e_1 + \dots + b_\mu\varepsilon_\mu , \text{ etc.};$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 = \sum_1^{\mu} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \dots + e_\mu \frac{d\varepsilon_\mu}{dt} = f_1\varepsilon_1 + \dots + f_\mu\varepsilon_\mu .$$

Si nous substituons aux $\varepsilon$ leurs valeurs, et que nous posions, pour abréger :

$$a_1^2 + \dots + a_\mu^2 = [aa]; \quad a_1b_1 + \dots + a_\mu b_\mu = [ab], \text{ etc},$$

nous aurons les six équations :

$$\begin{aligned}
&[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [ae]\,v + [af]\,t + [an] = 0,\\
&[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,u + [be]\,v + [bf]\,t + [bn] = 0,\\
&[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,u + [ce]\,v + [cf]\,t + [cn] = 0,\\
&[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,u + [de]\,v + [df]\,t + [dn] = 0,\\
&[ae]\,x + [be]\,y + [ce]\,z + [de]\,u + [ee]\,v + [ef]\,t + [en] = 0,\\
&[af]\,x + [bf]\,y + [cf]\,z + [df]\,u + [ef]\,v + [ff]\,t + [fn] = 0.
\end{aligned}$$

Ces six équations serviront à déterminer les six inconnues $x, y \dots t$.

127. III. *Élimination (par substitution).*

De la première équation nous tirerons $x$ que nous substituerons dans les cinq autres;

De la première de celles-ci, nous tirerons $y$, que nous substituerons dans les quatre autres;

De la première de celles-ci, nous tirerons $z$, que nous substituerons dans les trois autres, et ainsi de suite.

La première des six équations donne

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}u - \frac{[ae]}{[aa]}v - \frac{[af]}{[aa]}t - \frac{[an]}{[aa]}.$$

Substituons cette valeur dans les cinq autres, et posons, pour abréger :

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = (bb\,.\,1); \qquad [cc] - \frac{[ad]}{[aa]}[ac] = (cc\,.\,1);$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = (bc\,.\,1); \qquad [cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = (cd\,.\,1);$$

$$[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = (bd\,.\,1); \qquad [ce] - \frac{[ac]}{[aa]}[ae] = (ce\,.\,1);$$

$$[be] - \frac{[ab]}{[aa]}[ae] = (be\,.\,1); \qquad [cf] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = (cf\,.\,1);$$

$$[bf] - \frac{[ab]}{[aa]}[af] = (bf\,.\,1);$$

$$[ee] - \frac{[ae]}{[aa]}[ae] = (ee\,.\,1);$$

$$[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = (dd\,.\,1); \qquad [ef] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = (ef\,.\,1);$$

$$[de] - \frac{[ad]}{[aa]}[ae] = (de\,.\,1);$$

$$[df] - \frac{[ad]}{[aa]}[af] = (df\,.\,1); \qquad [ff] - \frac{[af]}{[aa]}[af] = (ff\,.\,1);$$

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = (bn\,.\,1);$$

$$[cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = (cn\,.\,1);$$

$$[dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = (dn\,.\,1);$$

$$[en] - \frac{[ae]}{[aa]}[an] = (en\,.\,1);$$

$$[fn] - \frac{[af]}{[aa]}[an] = (fn\,.\,1).$$

Nous aurons ainsi les cinq équations :

$$(bb.1)\,y+(bc.1)\,z+(bd.1)\,u+(be.1)\,v+(bf.1)\,t+(bn.1)=0,$$
$$(bc.1)\,y+(cc.1)\,z+(cd.1)\,u+(ce.1)\,v+(cf.1)\,t+(cn.1)=0,$$
$$(bd.1)\,y+(cd.1)\,z+(dd.1)\,u+(de.1)\,v+(df.1)\,t+(dn.1)=0,$$
$$(be.1)\,y+(ce.1)\,z+(de.1)\,u+(ee.1)\,v+(ef.1)\,t+(en.1)=0,$$
$$(bf.1)\,y+(cf.1)\,z+(df.1)\,u+(ef.1)\,v+(ff.1)\,t+(fn.1)=0.$$

128. On tire de la première de ces équations :

$$y=-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}z-\frac{(bd.1)}{(bb.1)}u-\frac{(be.1)}{(bb.1)}v-\frac{(bf.1)}{(bb.1)}t-\frac{(bn.1)}{(bb.1)}.$$

Substituons cette valeur dans les quatre autres équations, et posons :

$$(cc.1)-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bc.1)=(cc.2);\qquad (dd.1)-\frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bd.1)=(dd.2);$$
$$(cd.1)-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bd.1)=(cd.2);\qquad (de.1)-\frac{(bd.1)}{(bb.1)}(be.1)=(de.2);$$
$$(ce.1)-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(be.1)=(ce.2);\qquad (df.1)-\frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bf.1)=(df.2);$$
$$(cf.1)-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bf.1)=(cf.2);$$

$$(ee.1)-\frac{(be.1)}{(bb.1)}(be.1)=(ee.2);\qquad (ff.1)-\frac{(bf.1)}{(bb.1)}(bf.1)=(ff.2);$$
$$(ef.1)-\frac{(be.1)}{(bb.1)}(bf.1)=(ef.2);$$

$$(cn.1)-\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bn.1)=(cn.2);$$
$$(dn.1)-\frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bn.1)=(dn.2);$$
$$(en.1)-\frac{(be.1)}{(bb.1)}(bn.1)=(en.2);$$
$$(fn.1)-\frac{(bf.1)}{(bb.1)}(bn.1)=(fn.2);$$

nous aurons les quatre équations :

$$(cc.2)z+(cd.2)u+(ce.2)v+(cf.2)t+(cn.2)=0,$$
$$(cd.2)z+(dd.2)u+(de.2)v+(df.2)t+(dn.2)=0,$$
$$(ce.2)z+(de.2)u+(ee.2)v+(ef.2)t+(en.2)=0,$$
$$(cf.2)z+(df.2)u+(ef.2)v+(ff.2)t+(fn.2)=0,$$

129. De la première on tire :

$$z=-\frac{(cd.2)}{(cc.2)}u-\frac{(ce.2)}{(cc.2)}v-\frac{(cf.2)}{(cc.2)}t-\frac{(cn.2)}{(cc.2)}.$$

Substituons cette valeur dans les trois autres équations, et posons pour abréger :

$$(dd.2)-\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cd.2)=(dd.3);\qquad (ee.2)-\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(ce.2)=(ee.3);$$
$$(de.2)-\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(ce.2)=(de.3);\qquad (ef.2)-\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cf.2)=(ef.3);$$
$$(df.2)-\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cf.2)=(df.3);$$
$$(ff.2)-\frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cf.2)=(ff.3);$$

$$(dn.2)-\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cn.2)=(dn.3);$$
$$(en.2)-\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cn.2)=(en.3);$$
$$(fn.2)-\frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cn.2)=(fn.3);$$

nous aurons les trois équations :

$$(dd.3)u+(de.3)v+(df.3)t+(dn.3)=0,$$
$$(de.3)u+(ee.3)v+(ef.3)t+(en.3)=0,$$
$$(df.3)u+(ef.3)v+(ff.3)t+(fn.3)=0,$$

130. De la première on tire :

$$u = -\frac{(de.3)}{(dd.3)}v - \frac{(df.3)}{(dd.3)}t - \frac{(dn.3)}{(dd.3)}.$$

Substituons dans les deux autres, et posons, pour abréger :

$$(ee.3) - \frac{(de.3)}{(dd.3)}(de.3) = (ee.4), \quad (ff.3) - \frac{(de.3)}{(dd.3)}(df.3) = (ff.4)$$

$$(ef.3) - \frac{(de.3)}{(dd.3)}(df.3) = (ef.4), \qquad ——$$

$$(en.3) - \frac{(de.3)}{(dd.3)}(dn.3) = (en.4),$$

$$(fn.3) - \frac{(df.3)}{(dd.3)}(dn.3) = (fn.4);$$

nous aurons :

$$(ee.4)\,v + (ef.4)\,t + (en.4) = 0,$$

$$(ef.4)\,v + (ff.4)\,t + (fn.4) = 0.$$

131. On tire de la première :

$$v = -\frac{(ef.4)}{(ee.4)}t - \frac{(en.4)}{(ee.4)}.$$

Substituons dans la seconde, et posons

$$(ff.4) - \frac{(ef.4)}{(ee.4)}(ef.4) = (ff.5),$$

$$(fn.4) - \frac{(ef.4)}{(ee.4)}(en.4) = (fn.5);$$

nous aurons

$$(ff.5)\,t + (fn.5) = 0,$$

d'où

$$t = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)}.$$

132. Résumé :

$$x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[ad]}{[aa]}u+\frac{[ae]}{[aa]}v+\frac{[af]}{[aa]}t+\frac{[an]}{[aa]}=0,$$

$$y+\frac{(bc.1)}{(bb.1)}z+\frac{(bd.1)}{(bb.1)}u+\frac{(be.1)}{(bb.1)}v+\frac{(bf.1)}{(bb.1)}t+\frac{(bn.1)}{(bb.1)}=0,$$

$$z+\frac{(cd.1)}{(cc.2)}u+\frac{(ce.2)}{(cc.2)}v+\frac{(cf.2)}{(cc.2)}t+\frac{(cn.2)}{(cc.2)}=0,$$

$$u+\frac{(de.3)}{(dd.3)}v+\frac{(df.3)}{(dd.3)}t+\frac{(dn.3)}{(dd.3)}=0,$$

$$v+\frac{(ef.4)}{(ee.4)}t+\frac{(en.4)}{(ee.4)}=0,$$

$$t+\frac{(fn.5)}{(ff.5)}=0.$$

133. Théorème. *Je dis actuellement que si l'on pose :*

$$A=[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]u+[ae]v+[af]t+[an],$$

$$B'=(bb.1)y+(bc.1)z+(bd.1)u+(be.1)v+(bf.1)t+(bn.1),$$

$$C''=(cc.2)z+(cd.2)u+(ce.2)v+(cf.2)t+(cn.2),$$

$$D'''=(dd.3)u+(de.3)v+(df.3)t+(dn.3),$$

$$E^{iv}=(ee.4)v+(ef.4)t+(en.4),$$

$$F^{v}=(ff.5)t+(fn.5);$$

1° *La valeur de* $\Omega$ *ou* $\sum_1^\mu \varepsilon_i^2$ *sera donnée par une expression de la forme*

$$\Omega=\frac{A^2}{[aa]}+\frac{B'^2}{(bb.1)}+\frac{C''^2}{(cc.2)}+\frac{D'''^2}{(dd.3)}+\frac{E^{iv2}}{(ee.4)}+\frac{F^{v2}}{(ff.5)}+(nn.6);$$

2° *Les dénominateurs* [aa], (bb.1), ... (ff.5) *seront tous positifs.*

Démonstration. 1° Reprenons la valeur de $\Omega$ (n$^{os}$ 125-126)

$$\Omega=(a_1x+b_1y+\cdots+f_1t+n_1)^2+\cdots+(a_\mu x+b_\mu y+\cdots+f_\mu t+n_\mu)^2;$$

développons les carrés, et ordonnons, nous trouverons :

$$\begin{aligned}\Omega &= [aa]\,x^2 + 2\,\{\,[ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [ae]\,v + [af]\,t + [an]\,\}\,x \\ &\quad + [bb]\,y^2 + 2\,\{\,[bc]\,z + [bd]\,u + [be]\,v + [bf]\,t + [bn]\,\}\,y \\ &\quad + [cc]\,z^2 + 2\,\{\,[cd]\,u + [ce]\,v + [cf]\,t + [cn]\,\}\,z \\ &\quad + [dd]\,u^2 + 2\,\{\,[de]\,v + [df]\,t + [dn]\,\}\,u \\ &\quad + [ee]\,v^2 + 2\,\{\,[ef]\,t + [en]\,\}\,v \\ &\quad + [ff]\,t^2 + 2\,\,[fn]\,t + [nn]. \\ &= \mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}x + \mathrm{R} = \frac{(\mathrm{P}x + \mathrm{Q})^2}{\mathrm{P}} + \mathrm{R} - \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}},\end{aligned}$$

en faisant pour abréger :

$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= [aa] \\ \mathrm{Q} &= [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,u + [ae]\,v + [af]\,t + [an];\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{P}x + \mathrm{Q} = \mathrm{A}.$$

134. Mais on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{P}} &= \frac{[ab]^2}{[aa]}y^2 + 2\left\{\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\,z + \frac{[ab]}{[aa]}[ad]\,u + \frac{[ab]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ab]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ab]}{[aa]}[an]\right\}y \\ &\quad + \frac{[ac]^2}{[aa]}z^2 + 2\left\{\frac{[ac]}{[aa]}[ad]\,u + \frac{[ac]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ac]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ac]}{[aa]}[an]\right\}z \\ &\quad + \frac{[ad]^2}{[aa]}u^2 + 2\left\{\frac{[ad]}{[aa]}[ae]\,v + \frac{[ad]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ad]}{[aa]}[an]\right\}u \\ &\quad + \frac{[ae]^2}{[aa]}v^2 + 2\left\{\frac{[ae]}{[aa]}[af]\,t + \frac{[ae]}{[aa]}[an]\right\}v \\ &\quad + \frac{[af]^2}{[aa]}t^2 + 2\,\,\frac{[af]}{[aa]}[an]\,t + \frac{[an]^2}{[aa]}.\end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = (nn.1),$$

nous trouverons

$$R - \frac{Q^2}{P} = \Omega - \frac{(Px+Q)^2}{P} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]}$$

$$= (bb.1)y^2 + 2\{(bc.1)z + (bd.1)u + (be.1)v + (bf.1)t + (bn.1)\}y$$
$$+ (cc.1)z^2 + 2\{(cd.1)u + (ce.1)v + (cf.1)t + (cn.1)\}z$$
$$+ (dd.1)u^2 + 2\{(de.1)v + (df.1)t + (dn.1)\}u$$
$$+ (ee.1)v^2 + 2\{(ef.1)t + (en.1)\}v$$
$$+ (ff.1)t^2 + 2\ (fn.1)t + (nn.1)$$
$$= P'y^2 + 2Q'y + R' = \frac{(P'y+Q')^2}{P'} + R' - \frac{Q'^2}{P'},$$

en posant

$$P' = (bb.1),$$
$$Q' = (bc.1)z + (bd.1)u + (be.1)v + (bf.1)t + (bn.1),$$

d'où

$$P'y + Q' = B',$$

et

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} = R' - \frac{Q'^2}{P'}.$$

135. Mais on a :

$$\frac{Q'^2}{P'} = \frac{(bc.1)^2}{(bb.1)}z^2 + 2\left\{\frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bd.1)u + \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(be.1)v + \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bf.1)t + \frac{(bc.1)}{(bb.1)}(bn.1)\right\}z$$
$$+ \frac{(bd.1)^2}{(bb.1)}u^2 + 2\left\{\frac{(bd.1)}{(be.1)}(be.1)v + \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bf.1)t + \frac{(bd.1)}{(bb.1)}(bn.1)\right\}u$$
$$+ \frac{(be.1)^2}{(bb.1)}v^2 + 2\left\{\frac{(be.1)}{(bb.1)}(bf.1)t + \frac{(be.i)}{(bb.1)}(bn.1)\right\}v$$
$$+ \frac{(bf.1)^2}{(bb.1)}t^2 + 2\ \frac{(bf.1)}{(bb.1)}(bn.1)t + \frac{(bn.1)^2}{(bb.1)};$$

et si nous faisons

$$(nn.1) - \frac{(bn.1)^2}{(bb.1)} = (nn.2),$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}
\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} &= R' - \frac{Q'^2}{P'} = \\
&(cc.2)z^2 + 2\{(cd.2)u + (ce.2)v + (cf.2)t + (cn.2)\}z \\
&+ (dd.2)u^2 + 2\{(de.2)v + (df.2)t + (dn.2)\}u \\
&+ (ee.2)v^2 + 2\{(df.2)t + (dn.2)\}v \\
&+ (ff.2)t^2 + 2\ (fn.2)t + (nn.2) \\
&= P''z^2 + 2Q''z + R'' = \frac{(P''_2 + Q'')^2}{P''} + R'' - \frac{Q''^2}{P''},
\end{aligned}$$

en faisant

$$\begin{aligned}
P'' &= (cc.2) \\
Q'' &= (cd.2)u + (ce.2)v + (cf.2)t + (cn.2);
\end{aligned}$$

d'où

$$P''z + Q = C''$$

et

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} = R'' - \frac{Q''^2}{P''}.$$

156. Mais on a

$$\begin{aligned}
\frac{Q''^2}{P''} = &\frac{(cd.2)^2}{(cc.2)}u^2 + 2\left\{\frac{(cd.2)}{(cc.2)}(ce.2)v + \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cf.2)t + \frac{(cd.2)}{(cc.2)}(cn.2)\right\}u \\
&+ \frac{(ce.2)^2}{(cc.2)}v^2 + 2\left\{\frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cf.2)t + \frac{(ce.2)}{(cc.2)}(cn.2)\right\}v \\
&+ \frac{(cf.2)^2}{(cc.2)}t^2 + 2\ \frac{(cf.2)}{(cc.2)}(cn.2)t + \frac{(cn.2)^2}{(cc.2)};
\end{aligned}$$

et si l'on pose

$$(nn.2) - \frac{(cn.2)^2}{(cc.2)} = (nn.3),$$

on aura

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} = R'' - \frac{Q''^2}{P''}$$
$$= (dd.3)\,u^2 + 2\left\{(de.3)\,u + (df.3)\,t + (dn.3)\right\}u$$
$$+ (ee.3)\,v^2 + 2\left\{(ef.3)\,t + (en.3)\right\}v$$
$$+ (ff.3)\,t^2 + 2\,(fn.3)\,t + (nn.3)$$
$$= P'''\,u^2 + 2\,Q'''\,u + R''' = \frac{(P'''\,u + Q''')^2}{P'''} + R''' - \frac{Q'''^2}{P'''},$$

en posant

$$P''' = (dd.3)$$
$$Q''' = (de.3)\,v + (df.3)\,t + (dn.3);$$

d'où

$$P'''u + Q''' = D''',$$

et

$$R''' - \frac{Q'''^2}{P'''} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} - \frac{D'''^2}{(dd.3)}.$$

157. Or on a

$$\frac{Q'''^2}{P'''} = \frac{(de.3)^2}{(dd.3)}v^2 + 2\left\{\frac{(de.3)}{(dd.3)}(df.3)\,t + \frac{(de.3)}{(dd.3)}(dn.3)\right\}v$$
$$+ \frac{(df.3)^2}{(dd.3)}t^2 + 2\,\frac{(df.3)}{(dd.3)}(dn.3)\,t + \frac{(dn.3)^2}{(dd.3)};$$

et si l'on pose

$$(nn.3) - \frac{(dn.3)^2}{(dd.3)} = (nn.4),$$

on trouvera

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)} - \frac{C''^2}{(cc.2)} - \frac{D'''^2}{(dd.3)} = R''' - \frac{Q'''^2}{P'''}$$
$$= (ee.4)\,v^2 + 2\left\{(ef.4)\,t + (en.4)\right\}v$$
$$+ (ff.4)\,t^2 + 2\,(fn.4)\,t + (nn.4)$$
$$= P^{IV}u^2 + 2Q^{IV}u + R^{IV} = \frac{(P^{IV}u + Q^{IV})^2}{P^{IV}} + R^{IV} - \frac{Q^{IV2}}{P^{IV}},$$

en faisant

$$P^{IV} = (ee\,.\,4),$$
$$Q^{IV} = (ef\,.\,4)\,t + (en\,.\,4),$$
$$R^{IV} = (ff\,.\,4)\,t^2 + 2\,(fn\,.\,4)\,t + (nn\,.\,4);$$

d'où

$$P^{IV}v + Q^{IV} = E^{IV}$$

et

$$R^{IV} - \frac{Q^{IV2}}{P^{IV}} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} - \frac{C''^2}{(cc\,.\,2)} - \frac{D'''^2}{(dd\,.\,3)} - \frac{E^{IV}}{(ee\,.\,4)}.$$

138. Mais on a

$$\frac{Q^{IV2}}{P^{IV}} = \frac{(ef\,.\,4)}{(ee\,.\,4)}\,t^2 + 2\,\frac{(ef\,.\,4)}{(ee\,.\,4)}\,(en\,.\,4)\,t + \frac{(en\,.\,4)^2}{(ee\,.\,4)},$$

et si l'on pose

$$(nn\,.\,4) - \frac{(en\,.\,4)^2}{(ee\,.\,4)} = (nn\,.\,5),$$

on trouvera

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} - \frac{C''^2}{(cc\,.\,2)} - \frac{D'''^2}{(dd\,.\,3)} - \frac{E^{IV2}}{(ee\,.\,4)} = R^{IV} - \frac{Q^{IV2}}{P^{IV}}$$
$$= (ff\,.\,5)\,t^2 + 2\,(fn\,.\,5)\,t + nn\,.\,5$$
$$= P^V t^2 + 2\,Q^V t + R^V = \frac{(P^V t + Q^V)^2}{P^V} + R^V - \frac{Q^{V2}}{P^V},$$

en posant

$$P^V = (ff\,.\,5); \quad Q^V = (fn\,.\,5); \quad R^V = (nn\,.\,5);$$

d'où

$$P^V t + Q^V = F^V,$$

et

$$R^V - \frac{Q^{V2}}{P^V} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} - \frac{C''^2}{(cc\,.\,2)} - \frac{D'''^2}{(dd\,.\,3)} - \frac{E^{IV2}}{(ee\,.\,4)} - \frac{F^{V2}}{(ff\,.\,5)}.$$

Mais

$$\frac{Q^{V2}}{P^V} = \frac{(fn\,.\,5)^2}{(ff\,.\,5)};$$

donc

$$R^V - \frac{Q^{V2}}{P^V} = (nn\,.\,5) - \frac{(fn\,.\,5)^2}{(ff\,.\,5)};$$

posant

$$(nn.5) - \frac{(fn.5)^2}{(ff.5)} = (nn.6),$$

nous aurons enfin :

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{(bb.1)} + \frac{C''^2}{(cc.2)} + \frac{D'''^2}{(dd.3)} + \frac{E^{IV2}}{(ee.4)} + \frac{F^{V2}}{(ff.5)} + (nn.6), \text{ C.Q.F.D.}$$

2° Démontrons que les dénominateurs $[aa]$, $(bb, 1)$, ... $(ff, 5)$ sont tous positifs.

*a*). Pour le premier, c'est évident, puisque

$$[aa] = a_1^2 + \cdots + a_\mu^2.$$

*b*). Remarquons que la fonction $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ ne renferme pas $x$; si donc dans $\Omega$ on substitue la valeur de $x$ provenant de $A = 0$, on obtiendra $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$; et par suite, si dans chacun des $\varepsilon$, on avait substitué à $x$ sa valeur provenant de $A = 0$, la somme des carrés des $\varepsilon$ aurait donné (n° 133) $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$; mais, dans ce cas, le coefficient de $y^2$, qui est $(bb.1)$, est une somme de carrés; $(bb.1)$ est donc positif.

*c*). La fonction $\Omega = \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{(bb.1)}$ ne renferme ni $x$, ni $y$; si donc on substitue dans $\Omega$ à $x$ sa valeur tirée de $A = 0$, et à $y$ sa valeur tirée de $B' = 0$, on obtiendra la fonction précédente; ou bien encore si l'on substitue ces deux valeurs dans chacun des $\varepsilon$ et qu'on fasse la somme des carrés; dans ce cas, le coefficient de $z^2$, qui est $(cc.1)$, est une somme de carrés; il est donc positif, et ainsi de suite.

139. Remarque. Si nous faisons

$$\Omega' = \frac{B'^2}{(bb.1)} + \frac{C''^2}{(cc.2)} + \frac{D'''^2}{(dd.3)} + \frac{E^{IV2}}{(ee.4)} + \frac{F^{V2}}{(ff.5)} + (nn.6),$$

$$\Omega'' = \frac{C''^2}{(cc.2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega''' = \frac{D'''^2}{(dd.3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega^{IV} = \frac{E^{IV2}}{(ee.4)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega^{V} = \frac{F^{V2}}{(ff.5)} + (nn.6),$$

nous aurons

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \Omega', \text{ où le premier terme seul renferme } x;$$

$$\Omega' = \frac{B'^2}{(bb.1)} + \Omega'', \quad \text{» » » } y;$$

$$\Omega'' = \frac{C''^2}{(cc.2)} + \Omega''', \quad \text{» » » } z;$$

$$\Omega''' = \frac{D'''^2}{(dd.3)} + \Omega^{IV}, \quad \text{» » » } u;$$

$$\Omega^{IV} = \frac{E^{IV2}}{(ee.4)} + \Omega^{V}, \quad \text{» » » } v;$$

$$\Omega^{V} = \frac{F^{V2}}{(ff.5)} + (nn.6), \quad \text{» » » } t;$$

140. IV. *Démontrer que les valeurs obtenues par la méthode des moindres carrés sont les plus probables.*

Nous venons de trouver, par cette méthode

$$t = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)}.$$

Appelons $\tau$ l'erreur de cette détermination; la vraie valeur de $t$ sera

$$t = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)} + \tau,$$

d'où

$$\tau = t + \frac{(fn.5)}{(ff.5)}.$$

Cherchons la probabilité de $\tau$.

Si $t$ est constant, la probabilité des valeurs simultanées de $x$, $y$, $z$, $u$, $v$ sera

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2\Omega}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv;$$

en effet, soient $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$, $u = d_0$, $v = e_0$, $t = f_0$ les valeurs de $x \ldots t$ déterminées par les équations normales

(n° 126); et $\xi, \eta, \xi, \upsilon, \nu, \tau$ les erreurs de ces déterminations; on aura

$$x = a_0 + \xi, \quad y = b_0 + n, \ldots\ldots t = f_0 + \tau;$$

d'où

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta, \quad \ldots\ldots \quad dt = d\tau;$$

$$\varepsilon_1 = a_1\xi + b_1\eta + \cdots + f_1\tau,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_\mu = a_\mu\xi + b_\mu\eta + \cdots + f_\mu\tau;$$

la probabilité de l'existence simultanée des erreurs $\xi, \eta \ldots \tau$, en regardant $t$ comme constant, sera

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2\Omega} d\xi \ldots d\nu,$$

ou

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2\Omega} dx \ldots dv.$$

Les limites des valeurs $x \ldots v$ étant en général $\pm\infty$, la probabilité de toutes les valeurs simultanées de $x \ldots v$, $t$ étant constant, sera :

$$\mathrm{Y} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu {}_5\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, dz\, du\, dv.$$

On aura donc pour la probabilité d'une valeur de $t$ :

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{Y}dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Y}dt} = \frac{dt\ {}_5\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv}{{}_6\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dt} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}.$$

141. *Calcul de* N. On a $\Omega = \frac{\mathrm{A}^2}{[aa]} + \Omega'$, A seul renfermant $x$. L'expression de A étant (n° 133)

$$\mathrm{A} = [aa]\, x + [ab]\, y + \cdots + [an],$$

il s'ensuit

$$\frac{d\mathrm{A}}{[aa]} = dx.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de N, on obtient

$$\mathrm{N} = dt\ {}_4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'}\, dy\, dz\, du\, dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\frac{\mathrm{A}^2}{[aa]}} \frac{d\mathrm{A}}{[aa]},$$

ou, par une transformation connue :

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'}\,dy\,dz\,du\,dv.$$

On a de même (n° 139) :

$$\Omega' = \frac{B'^2}{(bb\,.\,1)} + \Omega'', \text{ B' seul renfermant } y.$$

L'expression de B' étant (n° 133) :

$$B' = (bb\,.\,1)\,y + (bc\,.\,1)\,z + (bd\,.\,1)\,u + (be\,.\,1)\,v + (bf\,.\,1)\,t + (bn\,.\,1),$$

il s'ensuit

$$\frac{dB'}{(bb\,.\,1)} = dy.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière expression de N, on obtient

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''}\,dz\,du\,dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2B'^2}{(bb\,.\,1)}} \frac{dB'}{(bb\,.\,1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^2}{h^2\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''}\,dz\,du\,dv\,.$$

On trouvera de même :

$$N = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\,(cc\,.\,2)}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'''}\,du\,dv.$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^4}{h^4\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\,(cc\,.\,2)\,(dd\,.\,3)}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega^{IV}}\,dv.$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^5}{h^5\sqrt{[aa]\,(bb\,.\,1)\,(cc\,.\,2)\,(dd\,.\,3)\,(ee\,.\,4)}}\,e^{-h^2\left\{\frac{F^V}{(ff\,.\,5)} + (nn\,.\,6)\right\}}\,dt.$$

142. *Calcul de* D. En intégrant l'expression précédente entre $\pm\infty$, on aura

$$D = \frac{(\sqrt{\pi})^5}{h^5\sqrt{\ldots.}}\,e^{-h^2(nn\,.\,6)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\frac{F^V}{(ff\,.\,5)}}\,dt;$$

et comme (n° 133) :

$$F^{v} = (ff.5)\,t + (fn.5),$$

en effectuant l'intégration, on aura :

$$D = \frac{(\sqrt{\pi})^{6}}{h^{6}\sqrt{[aa](bb.1)\ldots(ee.4)(ff.5)}}\, e^{-h^{2}(nn.6)};$$

et par suite, la probabilité de $t$, ou de $\tau$, sera :

$$\begin{aligned} Q = \frac{N}{D} &= \frac{h\sqrt{(ff.5)}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^{2}\frac{F^{v2}}{(ff.5)}}\, dt, \\ &= \frac{h\sqrt{(ff.5)}}{\sqrt{\pi 2}}\, e^{-h^{2}\left\{t+\frac{(fn.5)}{(ff.5)}\right\}^{2}(ff.5)}\, dt, \\ &= \frac{h\sqrt{(ff.5)}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^{2}(ff.5)\tau^{2}}\, d\tau. \end{aligned}$$

Cette probabilité est un maximum pour $\tau = 0$; donc pour

$$t = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)};$$

telle est donc la valeur la plus probable.

Le poids de cette valeur de $t$ est $(ff.5)$, $h$ étant considéré comme unité de poids.

Remarque. Soit P la probabilité que $\tau$ est compris entre $\pm c$; nous aurons

$$P = \frac{h\sqrt{(ff.5)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-h^{2}(ff.5)\tau^{2}}\, d\tau.$$

Si nous changeons l'exposant en $-k^{2}$, nous aurons

$$\tau = \frac{k}{h\sqrt{(ff.5)}};$$

et à $r = c$ répondra $k = ch\sqrt{(ff.5)}$ que nous ferons égal à $g$.

Nous aurons ainsi :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{g} e^{-k^{2}}\, dk\,;$$

probabilité que $t$ est compris entre

$$f_0 \pm g = f_0 \pm ch\sqrt{(ff.5)} = -\frac{(fn.5)}{(ff.5)} \pm ch\sqrt{ff.5)}.$$

**Observations d'inégales précisions.**

143. Supposons que les observations $\varphi_1 \dots \varphi_\mu$ soient de précisions différentes, et soient $p_1 \dots p_\mu$ leurs poids respectifs, $h$ étant pris pour unité de poids; nous aurons pour la probabilité des erreurs $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\mu$ (n° 126) :

$$p_{\varepsilon_1} = \frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 p_1 \varepsilon_1^2} d\varepsilon_1$$

. . . . . .

$$p_\mu = \frac{h\sqrt{p_\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 p_\mu \varepsilon_\mu^2} d\varepsilon_\mu;$$

la probabilité du concours de ces erreurs sera donc

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu \sqrt{p_1 \dots p_\mu}\, e^{-h^2 \sum_1^\mu p_i \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_\mu;$$

nous aurons donc à rendre minimum $\Sigma p_i \varepsilon_i^2$, ce qui conduit aux équations normales :

$$[aap]\, x + [abp]\, y + \dots + [anp] = 0,$$

. . . . . .

$$[afp]\, x + [bfp]\, y + \dots + [fnp] = 0.$$

## CHAPITRE VIII.

### PROBABILITÉS RELATIVES A LA VIE HUMAINE.

—

144. La probabilité qu'a un enfant d'arriver à l'âge $x$ est une fraction dont le numérateur est le nombre des chances de vie favorables à cet âge, et le dénominateur le nombre total des chances; ce dernier étant infini, l'on voit que la probabilité relative à l'âge $x$ est infiniment petite; on pourra donc la représenter par

$$p_x = f(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Considérons un nombre très-grand $\mu$ d'enfants nés à la même époque; la probabilité qu'a l'enfant $i$ d'arriver à l'âge $x$ sera

$$p_{ix} = f_i(x)\,dx.$$

La probabilité qu'il arrivera à un âge compris entre 0 et $x$ sera la somme des probabilités relatives à tous les âges intermédiaires croissant par intervalles égaux à $dx$ de 0 à $x$; elle sera donc

$$\int_0^x f_i(x)\,dx.$$

Soit $\omega$ la limite supérieure de la vie humaine; il est clair que

$$\int_0^\omega f_i(x)\,dx = 1;$$

et par suite

$$\int_x^\omega f_i(x)\,dx = \int_0^\omega - \int_0^x = 1 - \int_0^x f_i(x)\,dx :$$

cette formule exprime la probabilité que l'enfant $i$ dépasse $x$ ans.

On nomme vie probable la valeur de $x$ pour laquelle

$$\int_x^\omega f_i(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot$$

Assimilons la durée de la vie à un gain éventuel : la somme de toutes les valeurs possibles de $x$, multipliées par leurs probabilités respectives, c'est-à-dire

$$\varepsilon_i = \int_0^\omega x f_i(x)\,dx$$

sera le *sort* de cet enfant, ou son espérance de vivre (voir n° 57).

La vie moyenne $v_m$ est la somme de toutes les valeurs de $\varepsilon_i$ relatives aux $\mu$ enfants, divisée par le nombre de ceux-ci; c'est-à-dire

$$v_m = \frac{\sum_1^\mu \varepsilon_i}{\mu} = \frac{1}{\mu}\sum_1^\mu \int_0^\omega x f_i(x)\,dx.$$

Tous les problèmes sur la probabilité de la vie dépendent de la fonction inconnue $f_i(x)$, qui est différente pour chaque enfant; mais la fonction moyenne $\frac{1}{\mu}\sum_1^\mu f_i(x)$, et par suite la vie moyenne $v_m$ ne varient qu'avec lenteur par l'extinction des maladies et le perfectionnement de la société.

La fonction $f_i(x)$ ne pouvant être déterminée à priori, on doit avoir recours à l'observation, afin de rendre le calcul des formules *vraies* qui précèdent possible approximativement. Les observations qui font la base de ces calculs approximatifs constituent les tables de mortalité.

### CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITÉ ET LOIS EMPIRIQUES QUI LES RÉGISSENT.

145. Une table de mortalité indique, sur un grand nombre $\mu$ d'enfants nés à la même époque et dans le même pays, combien il y en a qui survivent après la 1re, la 2me, etc., année.

A. *Formation des tables de mortalité.* Supposons qu'en dépouillant des registres de l'état civil, on ait observé que 1000

individus décédés en une année aient donné lieu au classement suivant :

500 sont morts de 0 à 20 ans.
200 » » 20 à 50 »
300 » » 50 à 90 »

On en conclura que la date de la naissance de ces personnes précède l'année de l'observation,

Pour 500 de 1 à 20 ans.
» 200 de 20 à 50 »
» 300 de 50 à 90 »

ou bien, que, de 1000 enfants nés dans la même année

500 sont morts dans les 20 premières années.
700 » » 50 » »
1000 » » 90 » »

Donc, de 1000 individus nés en même temps

500 vivent encore à la fin de la 20$^{me}$ année.
300 » » 50$^{me}$ »
0 » » 90$^{me}$ »

Ce sont ces nombres 500, 300, 0 qui constituent la table de mortalité.

Généralisons l'exemple ci-dessus : supposons que l'on ait extrait d'un registre de l'état civil un nombre A décès dans une période de 100 ans; et que ces décès se répartissent comme suit :

$a$ décès entre 0 et 1 an.
$a'$ » » 1 et 5 ans.
$a''$ » » 5 et 10 ans.
$a'''$ » » 10 et 15 ans, etc.

On en conclura que, de A enfants nés à la même époque

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A - a$ | vivront encore à | | 1 an. |
| $A - a - a'$ | » | » | 5 ans. |
| $A - a' - a''$ | » | » | 10 ans. |
| $A - a' - a'' - a'''$ | » | » | 15 ans, etc. |

Si l'on applique à ces données premières la formule d'interpolation aux différences premières, secondes, troisièmes, etc., on obtiendra les nombres de survivants à 2, 3, 4, 6, etc., ans.

Ce mode de construction des tables de mortalité suppose que la population reste stationnaire, et il exprimerait exactement la loi de mortalité si le nombre A des individus qui ont servi à les former était infini; car alors une telle table pourrait être représentée par une courbe continue dont les ordonnées seraient les nombres de survivants, et les abscisses les âges correspondant à ces survivances.

En général une table de mortalité est d'autant plus exacte que le nombre A est plus grand, et que la population est elle-même plus grande et plus proche de l'état stationnaire.

On doit avoir soin, pour la construction de ces tables, d'exclure les années signalées par une mortalité extraordinaire, comme les années d'épidémies, de guerre, etc.

Les principales tables de mortalité sont les suivantes :

De Witt, grand pensionnaire de Hollande, a construit la première table de ce genre; elle est très-rare.

Halley, contemporain de Newton, en a construit une d'après les registres de l'état civil de Breslau. Elle n'est plus en usage.

Süssmilch a construit pour l'Allemagne une table exécutée avec soin, reposant sur un grand nombre d'observations. Retouchée et perfectionnée par Baumann, elle est encore d'un grand usage, surtout en Allemagne.

Wargentin a publié une bonne table d'après les observations recueillies en Suède.

Deparcieux a construit la première table publiée en France, d'après les décès observés dans des compagnies de tontines et de rentes viagères. Elle a été corrigée par Florencourt.

Simpson a donné une bonne table pour la ville de Londres.

Baumann, pour la province de Brandebourg.

Duvillard a donné pour la France une table qui repose sur des observations très-étendues.

Price a donné pour la ville de Northampton une table très-estimée.

Kerseboom en a construit une sur des documents pris dans les établissements de rentes viagères de la Hollande et de la Frise occidentale.

La table pour la Belgique fait la distinction entre la mortalité dans les villes et la mortalité dans les campagnes; et de plus entre la mortalité des hommes et celle des femmes.

La table de Monferrand, pour la France, est la plus récente et la plus soigneusement construite (voir son Mémoire sur les lois de la population et de la mortalité en France, *Journal de l'École polytechnique*, 26$^{me}$ cahier, t. XVI). Cette table, dans laquelle on a tenu compte de la variation de la population et de la correction relative aux mort-nés, est divisée en deux parties pour les deux sexes. Chacune contient sept colonnes, sous les titres : âge, décès, population, danger annuel, survivances, vie moyenne, vie probable. Nous verrons plus bas la formation des nombres rangés sous ces divers titres. La première colonne contient les âges de mois en mois jusqu'à un an, puis d'année en année jusqu'à la limite de la vie, qui est de 105 ans dans cette table (*).

(*) Nous ne pouvons passer ici sous silence les nombreux et importants travaux par lesquels M. Ad. Quetelet, directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles, secrétaire perpétuel de l'Académie de Belgique, a contribué aux progrès de la statistique, dont il a été l'un des plus zélés promoteurs.

Les principaux travaux qu'il a publiés relativement à cette science, et dont plusieurs ont été traduits en différentes langues, sont, outre sa *Correspondance mathématique et physique* (1825-1839), les *Annales* et l'*Annuaire de l'Observatoire royal* (1833-1874) :

*Recherches sur la population, etc., dans le royaume des Pays-Bas*, in-8°, Bruxelles, 1827. — *Météorologie de la Belgique comparée à celle du globe*, in-8°, Bruxelles, 1832; 2$^{e}$ éd., 1867. — *Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, in-8°, 1846. — *Du système social et des lois qui le régissent*, in-12, 1848. — *Sur la physique du globe*, in-4°, 1861. — *Physique sociale, ou essai sur le développement des facultés de l'homme*, 2 v. in-8°, 1835; 2$^{e}$ éd. 1869. — *Anthropométrie, ou mesure des différentes facultés de*

## *Table de mortalité de Süssmilch et Baumann.*

| AGE. $m$ | SURVIVANTS. $A_m$ | DÉCÉDÉS. $B_m$ | SOMME des vivants. $C_m$ | AGE $m$ | SURVIVANTS. $A_m$ | DÉCÉDÉS. $B_m$ | SOMME de vivants. $C_m$ | AGE. $m$ | SURVIVANTS. $A_m$ | DÉCÉDÉS. $B_m$ | SOMME des vivants. $C_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 000 | 250 | 28 988 | 33 | 421 | 6 | 11 464 | 66 | 152 | 10 | 1 520 |
| 1 | 750 | 89 | 27 988 | 34 | 415 | 6 | 11 043 | 67 | 142 | 10 | 1 368 |
| 2 | 661 | 43 | 27 238 | 35 | 409 | 7 | 10 628 | 68 | 132 | 10 | 1 226 |
| 3 | 618 | 25 | 26 577 | 36 | 402 | 7 | 10 219 | 69 | 122 | 10 | 1 094 |
| 4 | 593 | 14 | 25 959 | 37 | 395 | 7 | 9 817 | 70 | 112 | 9 | 972 |
| 5 | 579 | 12 | 25 366 | 38 | 388 | 7 | 9 422 | 71 | 103 | 9 | 860 |
| 6 | 567 | 11 | 24 787 | 39 | 381 | 7 | 9 034 | 72 | 94 | 9 | 757 |
| 7 | 556 | 9 | 24 220 | 40 | 374 | 7 | 8 653 | 73 | 85 | 8 | 663 |
| 8 | 547 | 8 | 23 664 | 41 | 367 | 7 | 8 279 | 74 | 77 | 8 | 578 |
| 9 | 539 | 7 | 23 117 | 42 | 360 | 7 | 7 912 | 75 | 69 | 7 | 508 |
| 10 | 532 | 5 | 22 578 | 43 | 353 | 7 | 7 552 | 76 | 62 | 7 | 432 |
| 11 | 527 | 4 | 22 046 | 44 | 346 | 7 | 7 199 | 77 | 55 | 6 | 370 |
| 12 | 523 | 4 | 21 519 | 45 | 339 | 7 | 6 853 | 78 | 49 | 6 | 315 |
| 13 | 519 | 4 | 20 996 | 46 | 332 | 8 | 6 514 | 79 | 43 | 6 | 266 |
| 14 | 515 | 4 | 20 477 | 47 | 324 | 8 | 6 182 | 80 | 37 | 5 | 223 |
| 15 | 511 | 4 | 19 962 | 48 | 316 | 8 | 5 858 | 81 | 32 | 4 | 186 |
| 16 | 507 | 4 | 19 451 | 49 | 308 | 8 | 5 542 | 82 | 28 | 4 | 154 |
| 17 | 503 | 4 | 18 944 | 50 | 300 | 9 | 5 234 | 83 | 24 | 4 | 126 |
| 18 | 499 | 4 | 18 441 | 51 | 291 | 9 | 4 934 | 84 | 20 | 3 | 102 |
| 19 | 495 | 4 | 17 942 | 52 | 282 | 9 | 4 643 | 85 | 17 | 3 | 82 |
| 20 | 491 | 5 | 17 447 | 53 | 273 | 9 | 4 361 | 86 | 14 | 2 | 65 |
| 21 | 486 | 5 | 16 956 | 54 | 264 | 9 | 4 088 | 87 | 12 | 2 | 51 |
| 22 | 481 | 5 | 16 470 | 55 | 255 | 9 | 3 824 | 88 | 10 | 2 | 39 |
| 23 | 476 | 5 | 15 989 | 56 | 246 | 9 | 3 569 | 89 | 8 | 2 | 29 |
| 24 | 471 | 5 | 15 513 | 57 | 237 | 9 | 3 323 | 90 | 6 | 1 | 21 |
| 25 | 466 | 5 | 15 042 | 58 | 228 | 9 | 3 086 | 91 | 5 | 1 | 15 |
| 26 | 461 | 5 | 14 576 | 59 | 219 | 9 | 2 858 | 92 | 4 | 1 | 10 |
| 27 | 456 | 5 | 14 115 | 60 | 210 | 9 | 2 639 | 93 | 3 | 1 | 6 |
| 28 | 451 | 6 | 13 659 | 61 | 201 | 9 | 2 429 | 94 | 2 | 1 | 3 |
| 29 | 445 | 6 | 13 208 | 62 | 192 | 10 | 2 228 | 95 | 1 | 0 | 1 |
| 30 | 439 | 6 | 12 763 | 63 | 182 | 10 | 2 036 | 96 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | 433 | 6 | 12 324 | 64 | 172 | 10 | 1 854 | | | | |
| 32 | 427 | 6 | 11 891 | 65 | 162 | 10 | 1 682 | | | | |

*l'homme*, in-8°, 1871. — *Congrès international de statistique*, in-4°, 1873. — *Tables de mortalité et leur développement*, in-4°, 1872.

Ces dernières tables sont relatives à huit pays différents, et la concordance des résultats qui y sont rapportés est vraiment remarquable. C'est la première fois, pensons-nous, qu'il se publie un travail aussi complet sur cette matière. Nous en donnerons un extrait à la fin de l'ouvrage. F. F.

146. B. *Lois empiriques.* Divers auteurs, entre autres Lambert et Duvillard, ont donné des formules empiriques qui représentent plus ou moins bien les chiffres des tables de mortalité pour lesquelles elles avaient été construites. Mais aucune de ces formules n'est comparable, pour l'exactitude et la simplicité, à celle que Moser a donnée pour représenter les nombres de la table de Kerseboom, et d'après laquelle on a, jusqu'à l'âge de 30 ans,

$$y = a\sqrt[4]{x}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$x$ exprime l'âge, et $y$ le nombre des décès jusqu'à cet âge; $a$ se détermine au moyen de la table; ainsi, en représentant par l'unité le nombre des enfants nés à la même époque, on trouverait

$$a = 0,2 = \frac{1}{5};$$

car, d'après les tables de Kerseboom, sur 1 enfant nouveau-né, il y en a 0,627 qui atteignent 12 ans; et puisque $1 - a\sqrt[4]{x}$ exprime le nombre des survivants à l'âge $x$, on a

$$1 - a\sqrt[4]{12} = 0,627$$

d'où

$$a = \frac{0,373}{\sqrt[4]{12}} = 0,2004.$$

Pour les âges qui dépassent 30 ans, la formule $(a)$ ne concorde plus avec les chiffres des tables. Moser donne pour ce cas la formule

$$y = 1 - 0,2\sqrt[4]{x} - \frac{0,7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9} - \frac{0,1570}{10^8}\sqrt[4]{x^7},$$

qui représente fort bien la loi de mortalité de 30 à 60 ans.

147. C. *Quelques rapports remarquables reposant sur les tables de mortalité :*

$\frac{\text{Nombre des décès des hommes}}{\text{Nombre des décès des femmes}} = \frac{100}{98}$ (pour la France, d'après Mathieu).

$$\frac{\text{Nombre des naissances des garçons}}{\text{Nombre des naissances des filles}} = \frac{100}{94} \text{ (id. pour les enfants légitimes).}$$

$$= \frac{100}{105} \text{ (id. pour les enfants naturels).}$$

$$\frac{\text{Nombre des naissances}}{\text{Nombre des mariages}} = \frac{100}{22}$$

$$\frac{\text{Nombre des mariages}}{\text{Nombre des habitants}} = \frac{1}{133} \text{ dans les grandes villes.}$$

$$= \frac{1}{105} \text{ dans les petites villes.}$$

$$= \frac{1}{115} \text{ dans les campagnes.}$$

$$\frac{\text{Nombre des hommes veufs}}{\text{Nombre des femmes veuves}} = \frac{100}{335}$$

$$\frac{\text{Nombre des premiers mariages}}{\text{Nombre des seconds mariages}} = \frac{100}{29} \text{ chez les hommes.}$$

$$= \frac{100}{19} \text{ chez les femmes}$$

$$\frac{\text{Nombre des enfants légitimes}}{\text{Nombre des enfants naturels}} = \frac{15}{1} \text{ pour la France.}$$

$$\frac{\text{Nombre des décès en une année}}{\text{Nombre des vivants en cette année}} = \frac{1}{24} \text{ dans les grandes villes.}$$

$$= \frac{1}{32} \text{ dans les petites villes.}$$

$$= \frac{1}{40} \text{ dans les campagnes.}$$

Ce rapport exprime la mesure de la mortalité, ou le danger de mourir dans l'année.

$$\frac{\text{Nombre des naissances annuelles}}{\text{Nombre des vivants}} = \frac{1}{29} \text{ ou } \frac{1}{31} \text{ dans les grandes villes.}$$

$$= \frac{1}{24} \text{ ou } \frac{1}{25} \text{ dans les petites villes.}$$

$$= \frac{1}{22} \text{ ou } \frac{1}{23} \text{ dans les campagnes.}$$

Ce rapport exprime la mesure de la fécondité.

NATURE ET USAGE DES TABLES DE MORTALITÉ.

148. Les assurances sur la vie, les caisses des veuves et orphelins, etc., reposent sur les tables de mortalité, comme nous le verrons plus bas.

Pour le moment, nous nous bornons à l'usage immédiat de ces tables; nos exemples seront choisis dans celle de Süssmilch.

a.) *Description de la table.* Elle se compose de quatre colonnes portant en tête les indications $m$, $A_m$, $B_m$, $C_m$ et contenant respectivement l'âge, les survivants, les décès, et la somme des vivants.

La première colonne $m$ donne les âges des individus de la colonne $A_m$ depuis 0 jusqu'à 96 ans, d'année en année.

La deuxième colonne $A_m$ donne le nombre des survivants de l'âge correspondant à la première. Ainsi l'on voit que 593 individus sur 1000 sont encore vivants à l'âge de 4 ans.

La troisième colonne $B_m$ indique le nombre des décès annuels; ainsi

250 est le nombre des décès de 0 à 1 an.
89 » » » 1 à 2 ans.

Ces nombres s'obtiennent par des soustractions consécutives entre ceux de la colonne $A_m$.

Premier exemple :

$$250 = 1000 - 750$$
$$89 = 750 - 661, \text{ etc.}$$

En général

$$B_m = A_m - A_{m+1}.$$

Deuxième exemple : De 1000 enfants nés à la même époque,

374 arriveront à 40 ans.

et dans l'année suivante

7 de ces 374 personnes mourront.

La quatrième colonne $C_m$ se compose de la somme de tous les nombres de la deuxième colonne, depuis le nombre correspondant à celui de la quatrième jusqu'au dernier; ainsi

$$\begin{aligned}
C_0 &= A_0 + A_1 + \cdots + A_{96}, \\
C_1 &= A_1 + \cdots + A_{96} = C_0 - A_0, \\
C_2 &= A_2 + \cdots + A_{96} = C_1 - A_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_m &= A_m + \cdots + A_{92} = C_{m-1} - A_{m-1}.
\end{aligned}$$

Ces nombres indiquent donc combien d'individus survivent, à l'âge $m$ ou à un âge plus avancé, aux 1000 enfants nés à la même époque.

Exemple. Le nombre 17,447 est celui des individus âgés de 20 à 96 ans qui, après 20 ans, survivront aux 1000 enfants nés en même temps.

b.) *Usage immédiat de la table.*

#### α. Probabilités simples relatives à la vie humaine.

149. Premier problème. Chercher la probabilité qu'une personne de l'âge $m$ vivra encore après 1, 2, etc., $n$ ans.

Solution. Soient

$A_m$ le nombre des vivants du même âge que la personne A.

$A_{m+1} \ldots A_{m+n}$ le nombre des vivants qui ont $1 \ldots n$ ans de plus.

Le nombre des cas favorables à ce que la personne A arrive à l'âge $m + 1$ est $A_{m+1}$; le nombre de tous les cas possibles est $A_m$; la probabilité que cette personne vivra encore après 1 an sera donc

$$p_1 = \frac{A_{m+1}}{A_m}.$$

De même, la probabilité qu'elle vivra encore après $2 \ldots n$ ans sera :

$$p_2 = \frac{A_{m+2}}{A_m} \ldots p_n = \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Premier exemple. Quelle est la probabilité qu'une personne de 18 ans vivra encore au moins 13 ans?

La table donne

$$A_{18} = 499 \,.\, A_{18+13} = A_{31} = 455$$

donc

$$p_{13} = \frac{455}{499} = 0{,}86.$$

Deuxième exemple. Dans une société d'assurances sur la vie le dépouillement des registres a fourni les indications suivantes :

$a_0$ personnes de 20 ans inscrites pendant la 1re année; $a_1$ pendant la 2me, etc.

$b_0$ » 21 » » » $b_1$ » »

$c_0$ » 22 » » » $c_1$ » »

. . . . . .

$\alpha_0$ personnes de 20 ans mortes pendant la 1re année; $\alpha_1$ pendant la 2me, etc.

$\beta_0$ » 21 » » » $\beta_1$ » »

$\gamma_0$ » 22 » » » $\gamma_1$ » »

1° Quelle est la probabilité que l'une des personnes de 20 ans arrivera à 21 ans?

Le nombre des personnes de 20 ans est $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

» » décès de 20 à 21 ans est $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$

la probabilité cherchée est donc

$$p_{20} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots}.$$

2° Quelle est la probabilité qu'une des personnes âgées de 21 ans atteindra sa 22me année?

Le nombre des personnes de 21 ans se compose :

Des personnes admises à cet âge et dont le nombre est

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots;$$

Des personnes admises à 20 ans, qui ont atteint leur 21me année, et dont le nombre est

$$(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + (a_2 - \alpha_2) + \ldots$$

Nous aurons donc

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + (a_0 - \alpha_3) + (a_1 - \alpha_4) + \ldots$$

pour le nombre des personnes de 21 ans.

Le nombre des décès de 21 à 22 ans est

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots;$$

la probabilité cherchée sera donc

$$p_{21} = \frac{(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + (b_1 - \beta_1) + \ldots}{(a_0 - \alpha_0) + \cdots + b_0 + b_1 + \ldots}.$$

3° Quelle est la probabilité qu'une des personnes âgées de 22 ans atteindra sa 23$^{me}$ année?

On trouvait par des raisonnements analogues aux précédents

$$p_{22} = \frac{(a_0 - \alpha_3) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + \cdots + (c_0 - \gamma_0) + \ldots}{(a_0 - \alpha_0) + \cdots + (b_0 - \beta_0) + \cdots + c_0 + c_1 + \ldots}.$$

150. Deuxième problème. Chercher la probabilité qu'une personne de l'âge $m$ mourra avant la fin de la 1$^{re}$, 2$^{me}$, ... $n^{me}$ année.

Solution. Soient $q_1 \ldots q_n$ les probabilités cherchées; $p_1 \ldots p_n$ celles des événements contraires; nous aurons

$$p_1 + q_1 = 1 \ldots p_n + q_n = 1;$$

donc

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}; \quad q_n = 1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Corollaire I. Quelle est la probabilité que cette personne mourra dans le courant de la 2$^{me}$ ..., $n^{me}$ année?

$\frac{A_{m+1}}{A_{m+1}}$ est la probabilité, à la fin de la 1$^{re}$ année, que A vit encore à la fin de la 2$^{me}$; donc $1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}$ est la probabilité qu'elle mourra pendant cette 2$^{me}$ année.

$\frac{A_{m+1}}{A_m}$ est la probabilité que A vivra à la fin de la 1$^{re}$ année.

La probabilité cherchée sera donc

$$\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right) \frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{A_{m+1} - A_{m+2}}{A_m}.$$

De même la probabilité que A mourra dans le courant de la 3me année sera

$$\left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\right)\frac{A_{m+2}}{A_m} = \frac{A_{m+2} - A_{m+3}}{A_m}.$$

Corollaire II. Chercher la probabilité que cette personne mourra dans l'intervalle de la $p^{me}$ à la $(p+q)^{me}$ année.

Comme $A_m$ personnes ont $m$ ans, $A_{m+p}$, $p$ ans de plus, $A_{m+p+q}$, $p+q$ ans de plus, il s'ensuit que $A_{m+p} - A_{m+p+q}$ mourront dans l'intervalle donné; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m}.$$

La probabilité contraire sera

$$1 - \frac{A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m} = \frac{A_m - A_{m+p} - A_{m+p+q}}{A_m}.$$

Exemple. Quelle est la probabilité qu'une personne de 20 ans mourra entre 50 et 60 ans?

Cette probabilité sera

$$\frac{A_{50} - A_{60}}{A_{20}} = \frac{500 - 210}{491} = \frac{90}{491} = 0{,}18.$$

151. Troisième problème. De $l$ personnes âgées de $m$ années, combien en meurt-il à l'âge de $m+1$ ans?

La table des mortalités montre que sur $A_m$ personnes de l'âge $m$, il en meurt un nombre $B_m$ de $m$ à $m+1$ ans. On a donc la proportion

$$A_m : B_m = l : x;\ x = \frac{l.B_m}{A_m}.$$

Exemple : Si $l = 1000$, $m = 40$, on trouve $A_m = 374$, $B_m = 7$, donc

$$x = \frac{7.1000}{374} = 19.$$

Remarque. La quantité $\frac{1}{x}$ est appelée vitalité, ou le pouvoir de vivre relatif à l'âge $m$. Pour les personnes de 11 à 18 ans, on a $x = 8$; pour cet âge la vitalité est donc $\frac{1}{8}$.

Si l'on prend cette vitalité pour unité, elle sera $\frac{8}{x}$ pour tout autre âge; et $x$ se détermine par la proportion ci-dessus.

En construisant une table d'après cette formule, on trouve que la vitalité est très-petite, dans les deux premières années, qu'elle augmente rapidement jusqu'à 10 ans, où elle est à son maximum. Elle reste alors stationnaire jusqu'à 20 ans; à partir de cet âge elle diminue, et après 80 ans elle redevient aussi faible que dans les premières années de l'existence.

Voici cette table :

*Table de vitalité.*

| AGE. | NOMBRE de DÉCÈS par an. | Vitalité. | AGE. | NOMBRE de DÉCÈS par an. | Vitalité. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 250 | 0,03 | 16 | 8 | 1,00 |
| 1 | 199 | 0,04 | 17 | 8 | 1,00 |
| 2 | 65 | 0,12 | 18 | 8 | 1,00 |
| 3 | 40 | 0,20 | 20 | 9 | 0,99 |
| 4 | 24 | 0,33 | 25 | 11 | 0,73 |
| 5 | 21 | 0,36 | 30 | 14 | 0,57 |
| 6 | 19 | 0,42 | 35 | 17 | 0,47 |
| 7 | 16 | 0,50 | 40 | 19 | 0,42 |
| 8 | 15 | 0,53 | 45 | 21 | 0,39 |
| 9 | 13 | 0,62 | 50 | 30 | 0,27 |
| 10 | 9 | 0,99 | 55 | 35 | 0,23 |
| 11 | 8 | 1,00 | 60 | 43 | 0,19 |
| 12 | 8 | 1,00 | 65 | 62 | 0,13 |
| 13 | 8 | 1,00 | 70 | 80 | 0,10 |
| 14 | 8 | 1,00 | 75 | 102 | 0,08 |
| 15 | 8 | 1,00 | 80 | 135 | 0,06 |

152. Quatrième problème. De $l$ individus nés ensemble, combien en survit-il après $m$ années?

D'après la table ci-dessus, de $A_0 = 1000$ individus nés en même temps, $A_m$ survivent après $m$ ans, on a donc :

$$A_0 : A_m = l : x, \quad x = \frac{lA_m}{A_0}.$$

Cinquième problème. De $l$ personnes âgées de $m$ ans, combien survivront après $p$ années?

On a la proportion

$$A_m : A_{m+p} = l : x, \quad x = l \cdot \frac{A_{m+p}}{A_m}.$$

Sixième problème. De $l$ personnes âgées de $m$ ans, combien en meurt-il dans $p$ années?

Ce nombre sera $l - l\frac{A_{m+p}}{A_m} = l \cdot \frac{A_m - A_{m+p}}{A_m}$.

Donc de $l$ individus de l'âge $m$, il en meurt dans l'année suivante

$$l \cdot \frac{A_m - A_{m+1}}{A_m} = l\,\frac{B_m}{A_m}.$$

153. Définition. La *durée moyenne* de ce qui reste à vivre, à une personne de l'âge $m$, est le nombre qui indique combien d'années chacune des $l$ personnes, ayant $m$ ans actuellement, auraient encore à vivre, si toutes arrivaient au même âge.

Septième problème. Chercher la durée moyenne $F_m$ de ce qui reste à vivre à une personne âgée de $m$ ans?

Solution. Soient $m$, $m+1$, $m+2$, $m+3$, etc., les âges consécutifs; $A_m$, $A_{m+1}$, $A_{m+2}$, $A_{m+3}$, etc., les survivants à ces âges; $A_m - A_{m+1}$, $A_{m+1} - A_{m+2}$, $A_{m+2} - A_{m+3}$, etc., les individus décédés de chaque année;

$\frac{2m+1}{2}$, $\frac{2m+3}{2}$, $\frac{2m+5}{2}$, etc., la durée moyenne de la vie de chaque décédé;

$$\frac{2m+1}{2}(A_m - A_{m+1}),$$

$$\frac{2m+3}{2}(A_{m+1} - A_{m+2}),$$

$$\frac{2m+5}{2}(A_{m+2} - A_{m+3}), \text{ etc.,}$$

sont les durées moyennes de la vie de tous les décédés.

Les durées à partir de l'âge $m$ seront :

$$\frac{1}{2}(A_m - A_{m+1}),$$

$$\frac{3}{2}(A_{m+1} - A_{m+2}),$$

$$\frac{5}{2}(A_{m+2} - A_{m+3}), \text{ etc.}$$

La somme de toutes ces durées sera :

$$\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + \text{etc.}$$

Donc la durée moyenne de ce qui reste à vivre, à la personne de l'âge $m$ est

$$F_m = \frac{\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m}. \quad (1)$$

Exemple. Quelle est la durée moyenne de la vie d'une personne de 30 ans?

La table donne $A_m = 439$, $C_{m+1} = 12324$, donc

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{12324}{439} = 28^{\text{ans}},57.$$

Remarque. I. Comme on a

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left[1 + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_{m+1}}\right].$$

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_m}\left[1 + \frac{A_{m+3} + \cdots}{A_{m+2}}\right].$$

$$F_{m+2} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+3} + A_{m+4} + \cdots}{A_m} = \text{etc.},$$

on trouvera :

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left[F_{m+1} + \frac{1}{2}\right],$$

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left[F_{m+2} + \frac{1}{2}\right], \text{ etc.}$$

Au moyen de ces formules on peut donc déduire $F_{m+1}$ de $F_m$, $F_{m+2}$ de $F_{m+1}$, ainsi de suite, et former une table de la durée moyenne du temps qui reste encore à vivre.

La table ci-dessous a été construite de cette manière.

*Table de la durée moyenne de la vie.*

| $m$ | $F_m$ | $m$ | $F_m$ | $m$ | $F_m$ | $m$ | $F_m$ | $m$ | $F_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 28,49 | 19 | 37,57 | 38 | 23,78 | 57 | 13,52 | 76 | 6,74 |
| 1 | 36,72 | 20 | 35,03 | 39 | 23,21 | 58 | 13,04 | 77 | 6,23 |
| 2 | 40,71 | 21 | 34,39 | 40 | 22,64 | 59 | 12,55 | 78 | 5,93 |
| 3 | 42,50 | 22 | 33,74 | 41 | 22,06 | 60 | 12,07 | 79 | 5,69 |
| 4 | 43,28 | 23 | 33,09 | 42 | 21,48 | 61 | 11,58 | 80 | 5,53 |
| 5 | 43,31 | 24 | 32,44 | 43 | 20,89 | 62 | 11,10 | 81 | 5,31 |
| 6 | 43,22 | 25 | 31,78 | 44 | 20,31 | 63 | 10,69 | 82 | 5,00 |
| 7 | 43,06 | 26 | 31,12 | 45 | 19,72 | 64 | 10,28 | 83 | 4,75 |
| 8 | 42,76 | 27 | 30,45 | 46 | 19,12 | 65 | 9,88 | 84 | 4,60 |
| 9 | 42,39 | 28 | 29,79 | 47 | 18,58 | 66 | 9,50 | 85 | 4,32 |
| 10 | 41,94 | 29 | 29,18 | 48 | 18,04 | 67 | 9,13 | 86 | 4,14 |
| 11 | 41,33 | 30 | 28,57 | 49 | 17,49 | 68 | 8,79 | 87 | 3,75 |
| 12 | 40,65 | 31 | 27,96 | 50 | 16,95 | 69 | 8,47 | 88 | 3,40 |
| 13 | 39,96 | 32 | 27,35 | 51 | 16,46 | 70 | 8,18 | 89 | 3,12 |
| 14 | 39,26 | 33 | 26,73 | 52 | 15,96 | 71 | 7,85 | 90 | 3,00 |
| 15 | 38,56 | 34 | 26,11 | 53 | 15,48 | 72 | 7,55 | 91 | 2,50 |
| 16 | 37,86 | 35 | 25,49 | 54 | 14,98 | 73 | 7,30 | 92 | 2,00 |
| 17 | 37,16 | 36 | 24,92 | 55 | 14,50 | 74 | 7,01 | 93 | 1,50 |
| 18 | 36,46 | 37 | 24,35 | 56 | 14,01 | 75 | 6,76 | 94 | 1,00 |

**Remarque II.** Soient

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = p_{m+1}, \qquad \frac{A_{m+2}}{A_m} = p_{m+2}, \text{ etc.;}$$

ces rapports expriment les probabilités d'atteindre $m + 1$, $m + 2$, etc., ans; la formule (1) devient, en les employant :

$$F_m = \frac{1}{2} + p_{m+1} + p_{m+2} + p_{m+3} + \text{etc.}$$

Comme

$$F_{m+1} = \frac{1}{2} + p_{m+2} + p_{m+3} + \text{etc.},$$

on aura

$$F_m = \frac{1}{2} + p_{m+1}\left(F_{m+1} + \frac{1}{2}\right),$$

donc

$$p_{m+1} = \frac{F_m - \frac{1}{2}}{F_{m+1} + \frac{1}{2}}.$$

Donc, à l'aide d'une table de la durée moyenne de la vie, on peut former une table de mortalité, car puisque

$$p_{m+1} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

il en résulte

$$A_{m+1} = A_m p_{m+1}.$$

154. Définition. *La vie probable* ou la durée probable de ce qui reste à vivre à une personne de l'âge $m$, est le laps de temps pendant lequel la moitié des personnes de cet âge sont mortes. Si $G_m$ désigne la vie probable, on pourra parier 1 contre 1, qu'une personne de $m$ ans, vivra encore $G_m$ ans, ou mourra avant d'avoir atteint ce terme.

Huitième problème. Trouver la vie probable $G_m$ d'une personne âgée de $m$ ans.

Il faut prendre le nombre $A_m$ correspondant à l'âge $m$, chercher, dans la colonne $m$, le nombre $k$ correspondant au nombre $\frac{1}{2} A_m$ pris dans la colonne $A_m$; la vie probable, à partir de l'âge $m$, sera

$$G_m = k - m.$$

Exemple. Chercher la vie probable d'une personne de 50 ans. La colonne $A_m$ donne 300; donc $\frac{1}{2} A_m = 150$; ce dernier nombre correspond à $k = 66{,}2$. Donc

$$G_m = 66{,}2 - 50 = 16{,}2.$$

155. Définition. Le danger annuel de mourir est égal au rapport du nombre des décès de chaque âge à la population correspondante.

Le complément arithmétique de ce rapport est la probabilité d'arriver à la période suivante.

### β. Probabilités composées relatives à la vie humaine.

156. Premier problème. Deux personnes A et B âgées de $m$ et de $n$ ans, sont associées pour un terme de $t$ ans; quelles sont les probabilités que ces personnes vivront, ou seront mortes après ce terme ?

La probabilité $p_1$ que A vit après $t$ années $= \dfrac{A_{m+t}}{A_m}$

» $p_2$ » B » $t$ » $= \dfrac{A_{n+t}}{A_n}$

» $q_1$ » A soit mort après $t$ » $= 1 - \dfrac{A_{m+t}}{A_m}$

» $q_2$ » B » $t$ » $= 1 - \dfrac{A_{n+t}}{A_n}$.

1° La probabilité composée $p_1 p_2$ que les deux personnes existent encore après $t$ ans, est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n};$$

2° La probabilité que A et B, ou l'un au moins, n'existe plus après $t$ ans, est

$$1 - \frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n};$$

3° La probabilité $p_1 q_2$ que A vit et que B est mort après $t$ ans, est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right);$$

4° La probabilité $p_2 q_1$ que B vit et que A est mort après $t$ ans, est

$$\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right);$$

5° La probabilité $q_1 q_2$ que A et B sont morts ensemble après $t$ ans, est

$$\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+p}}{A_n}\right).$$

Remarque I. Les probabilités désignées sous les numéros 1°, 3°, 4°, 5°, sont fournies par les termes du produit

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) = 1.$$

Remarque II. Les probabilités composées relatives à trois personnes associées pour un certain terme, sont données par le produit

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) = 1.$$

157. Deuxième problème. Soit M un nombre de couples mariés, les hommes ayant tous $m$ ans, et les femmes $n$; quels sont les nombres de couples vivants ou morts après $t$ années?

1° Après $t$ ans, un nombre $M \cdot \frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n}$ de ces couples vivront encore;

2° Après $t$ ans, un nombre $M \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)$ de veuves vivront encore;

3° Après $t$ ans, un nombre $M \frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$ de veufs vivront encore;

4° Après $t$ ans, un nombre de couples

$$M\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$$

n'existeront plus.

Exemple. De 1000 couples, dont les maris ont 30 ans, et les femmes 20 ans,

$1000 \cdot \frac{A_{30+10}}{A_{20}} = 762$ couples vivront encore après 10 ans;

$1000 \cdot \frac{A_{20+10}}{A_{20}}\left(1 - \frac{A_{30+10}}{A_{30}}\right) = 132$ veuves vivent » » 10 ans;

$1000 \cdot \frac{A_{30+10}}{A_{30}}\left(1 - \frac{A_{20+10}}{A_{20}}\right) = 90$ veufs » » » 10 ans;

$1000\left(1 - \frac{A_{30+10}}{A_{30}}\right)\left(1 - \frac{A_{20+10}}{A_{20}}\right) = 16$ couples n'existeront plus » 10 ans;

Total. . . 1000

158. Définition. La durée moyenne du mariage est le nombre moyen des années pendant lesquelles un couple donné vit ensemble, jusqu'au décès de l'un des époux.

Troisième problème. Chercher la durée moyenne des mariages.

Soient M couples dont les maris ont $m$ ans, les femmes $n$ ans; de ces couples, il y en aura :

$$M.\frac{A_{m+1}}{A_m}.\frac{A_{n+1}}{A_n} \text{ vivant ensemble après la } 1^{re} \text{ année;}$$

$$M.\frac{A_{m+2}}{A_m}.\frac{A_{n+2}}{A_n} \quad \text{» » } 2^{me} \text{ »}$$

$$M.\frac{A_{m+3}}{A_m}.\frac{A_{n+3}}{A_n} \quad \text{» » } 3^{me} \text{ » etc.}$$

Cette suite doit être prolongée jusqu'à ce que, d'après la table de mortalité, l'un des facteurs $\frac{A_{m+p}}{A_m}$ ou $\frac{A_{n+p}}{A_n}$ devienne zéro.

Soit $k$ la durée moyenne des mariages, on a

$$K = \frac{\frac{M\,[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+2}A_{n+2} + A_{m+3}A_{n+3} + \cdots]}{A_mA_n}}{M}$$

$$= \frac{\text{somme des nombres de couples survivants jusqu'à la mort d'un des conjoints}}{\text{nombre des couples primitifs}}$$

$$= \frac{1}{A_mA_n}\cdot[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+2}A_{n+2} + \text{etc.}]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

159. Quatrième problème. Chercher la durée moyenne du veuvage des femmes.

Soit L cette durée moyenne; on aura

$$L = \frac{\text{somme des nombres de veuves survivantes jusqu'à la mort de la dernière}}{\text{nombre des couples primitifs}}$$

$$= \frac{M\left[A_{n+1}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + A_{n+2}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \frac{A_{n+3}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_m}\right) + \cdots\right]}{M.A_n}$$

$$= \frac{A_{n+1}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + A_{n+2}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \text{etc.}}{A_n}.$$

Et comme

$$A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + \cdots = C_{n+1},$$

on trouvera, en tenant compte de la formule $(a)$, n° 158 :

$$L = \frac{C_{n+1}}{A_n} - K.$$

Remarque I. On trouve de même pour durée moyenne H du veuvage des hommes

$$H = \frac{A_{m+1}\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + A_{m+2}\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right) + \text{etc.}}{A_m} = \frac{C_{m+1}}{A_n} - K.$$

Remarque II. Soit G la durée moyenne d'un nombre donné M de couples. En faisant $t = 1, 2$, etc., dans

$$M\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right), \text{ nombre de couples morts après } t \text{ ans},$$

on a

$$G = \left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + \left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right) + \text{etc.}$$

Et si N est le nombre de termes de cette suite,

$$G = N - \frac{C_{m+1}}{A_m} - \frac{C_{n+1}}{A_n} + K.$$

Remarque III. Dans les quatre formules K, L, H, G, on a supposé que les séparations des couples avaient lieu au commencement de chaque année; mais il est plus exact de supposer que ces séparations aient lieu uniformément pendant tout le cours de l'année : ce qui revient à en transporter l'origine au milieu. Mais alors il faut ajouter $^1/_2$ aux quatre formules trouvées, par la même raison que l'on a ajouté $^1/_2$ ci-dessus à la durée de la vie moyenne.

Exemple. Cherchons 1° la durée moyenne K du mariage; 2° la durée moyenne L du veuvage de la femme; 3° la durée moyenne H du veuvage du mari, d'un couple dont le mari a 90 ans, et la femme 80 ans.

La table de mortalité donne

$$\begin{array}{lll} A_{91} = 5 & A_{81} = 32 & \text{produit} = 160 \\ A_{92} = 4 & A_{82} = 28 & \text{»} = 112 \\ A_{93} = 3 & A_{83} = 24 & \text{»} = 72 \\ A_{94} = 2 & A_{84} = 20 & \text{»} = 40 \\ A_{95} = 1 & A_{85} = 17 & \text{»} = 17 \\ A_{96} = 0 & A_{86} = 14 & \text{»} = 0 \\ & & \text{Somme} = 401 \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} A_m &= A_{90} = 6 \\ A_n &= A_{80} = 37 \\ C_{n+1} &= C_{81} = 186 \\ C_{m+1} &= C_{91} = 15 \end{aligned}$$

Donc

$$K = \frac{1}{2} + \frac{401}{222} = 2{,}31 \text{ ans.}$$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{C_{n+1}}{A_n} - K = \frac{1}{2} + \frac{186}{37} - 2{,}31 = 3{,}22 \text{ ans.}$$

$$H = \frac{1}{2} + \frac{C_{m+1}}{A_m} - K = \frac{1}{2} + \frac{15}{6} - 2{,}31 = 0{,}69 \text{ ans.}$$

160. Cinquième problème. On connaît la durée moyenne K du mariage d'un couple dont le mari a $m$ ans, et la femme $n$ ans, en conclure la durée moyenne K′ du mariage d'un autre couple, dont le mari a $m + p$ ans, et la femme $n + p$ ans.

Solution. On a

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+1}A_{n+1} + A_{m+p}A_{n+p}\right] + \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + \text{etc.}\right] \\ &= Q + \frac{1}{A_m A_n}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + A_{m+p+2}A_{n+p+2} + \text{etc.}\right], \end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{A_{m+p}A_{n+p}}\left[A_{m+p+1}A_{n+p+1} + A_{m+p+2}A_{n+p+2} + \cdots\right] \\ &= \left[K - Q\right]\frac{A_m A_n}{A_{m+p}A_{n+p}}. \end{aligned}$$

Exemple. Soient $m = 40$, $n = 30$, d'où $K = 17{,}11$
$m + p = 41$, $n + p = 31$; chercher K′.

On a $p = 1$, donc

$$Q = \frac{A_{41} \cdot A_{31}}{A_{40} \cdot A_{30}} = 0{,}968\,,$$

donc

$$K' = (17{,}11 - 0{,}968)\,\frac{574}{567} \cdot \frac{439}{433} = 16{,}66 \text{ ans.}$$

161. Durée moyenne des mariages. Soit $n$ mariages entre $n$ garçons de l'âge $a$, et $n$ filles de l'âge $a'$.

Soit $\varphi$ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge $a$ parvienne à l'âge $a + x$; on a par la table

$$\varphi = \frac{A_{a+x}}{A_a}\,;$$

soit

$$A_a = p', \quad A_{a+x} = q',$$

on aura :

$$\varphi = \frac{q'}{p'}\,,$$

d'où

$$n\varphi = \frac{nq'}{p'},$$

nombre des maris vivants à l'âge de $a + x$ ans.

Soit $\psi$ la probabilité qu'une fille se marie à l'âge $a'$ parvienne à l'âge $a' + x$; on a par la table

$$\psi = \frac{A_{a'+x}}{A_{a'}},$$

et si l'on fait $A_{a'} = p''$, $A_{a'+x} = q''$

$$\psi = \frac{q''}{p''}, \quad n\psi = \frac{nq''}{p''}$$

nombre des femmes vivantes à l'âge $a' + x$.

$\varphi\psi$ est la probabilité que leur mariage subsiste après $x$ ans.

$n\mathrm{C}_i\,(\varphi\,.\,\psi)^i\,(1 - \varphi\psi)^{n-i}$ est la probabilité que sur les $n$ mariages il en subsiste encore $i$ après la $x^{ième}$ année. (Voir n° 20).

Le plus grand terme de $[\varphi\psi + (1 - \varphi\psi)]^n$, est celui dans lequel on a

$$\varphi\psi : 1 - \varphi\psi = i : n - i$$

d'où

$$i = n\varphi\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Donc le nombre des mariages qui subsiste le plus probablement après $x$ ans est

$$i = n\varphi\psi = n\frac{A_{a+x}}{A_a}\frac{A_{a'+x}}{A_{a'}} = \frac{nq'q''}{p'p''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A l'aide de cette formule (2) on pourra former d'année en année une table des valeurs de $i$. En faisant la somme de tous les nombres de cette table, et en la divisant par $n$, on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge $a$ pour les garçons, et à l'âge $a'$ pour les filles.

Faisons pour simplifier $a = a'$, $\varphi = \psi$, $q'' = q'$, $p'' = p'$, ce qui revient à supposer que les conjoints sont du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes : la formule (2) devient

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

la formule (1) devient

$$i = n\varphi^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

162. Problème. Chercher la probabilité que l'erreur de $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ est comprise entre $\pm s$.

Si de $p$ individus de l'âge $a$, $q$ parviennent à l'âge $a + x$, en supposant que $p$ et $q$ soient infinis, on aura exactement :

$$\varphi = \frac{q}{p},$$

d'où

$$\frac{p - q}{p} = 1 - \varphi.$$

Pour un grand nombre $p'$ d'individus, on aura $q' = \frac{p'q}{p}$.

Si $z$ est l'erreur de cette détermination, on aura exactement

$$q' = \frac{p'q}{p} + z,$$

donc

$$\frac{q}{p} = \varphi = \frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'}, \quad i = n\varphi^2 = n\left(\frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'}\right)^2 = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} \quad (5)$$

en négligeant le dernier terme qui est de l'ordre de $\frac{z^2}{p'}$; et la probabilité $\Pi$ de $z$ sera (n° 112) :

$$\Pi = \sqrt{\left\{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}\right\}} e^{-\frac{p^3 z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{2\pi \frac{q}{p} p' \frac{p-q}{p}\left(1+\frac{p'}{p}\right)\right\}}} e^{-\frac{z^2}{2\frac{qp'}{p}\left(\frac{p-q}{p}\right)\left(1+\frac{p'}{p}\right)}} dz.$$

Négligeons $\frac{p'}{p}$ vis-à-vis de 1, nous aurons

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi p'(1-\varphi)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\varphi p'(1-\varphi)}} dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

C'est aussi la probabilité de la valeur (5), qui est la vraie valeur de $i$.

Maintenant cherchons :

1° La probabilité de $l$ dans l'expression

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = n\varphi^2 + l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Comme $i = n\varphi\psi$ est l'exposant de $\varphi\psi$ du plus grand terme de $\left[\varphi\psi + (1-\varphi\psi)\right]^n$, il est clair que $n\varphi^2$ est l'exposant du plus grand terme de $\left[\varphi^2 + (1-\varphi^2)\right]^n$. Donc la probabilité de $l$, dans l'expression (7), sera le $l^{ème}$ terme de $\left[\varphi^2 + (1-\varphi^2)\right]^n$ après le plus grand terme de ce binôme.

Or, d'après le théorème de Bernouilli, le plus grand terme G du binôme $(p+q)^k$ est (n° 51)

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot$$

Si $G_{n-l}$, $G_{n+l}$ désignant respectivement le $l^{ème}$ terme avant, et le $l^{ème}$ terme après le plus grand G, on a (n° 51)

$$G_{n-l} + G_{n+l} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}.$$

Cela posé, en prenant approximativement

$$G_{n+l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{l^2}{2\mu pq}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

on n'aura qu'à faire $p = \varphi^2$, $q = 1 - \varphi^2$, $\mu = n$, et la probabilité $\Pi'$ de $l$, dans l'expression $i = n\varphi^2 + l$, sera

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1-\varphi^2)}} e^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} dl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

donc la probabilité $\Pi_1$ de l'existence simultanée de $z$ et de $l$, dans l'expression

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

sera

$$\Pi_1 = \Pi \cdot \Pi' = \frac{e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} - \frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}} dzdl \quad . \quad (10)$$

Mais si $s$ est l'erreur de $i$, dans $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$, la valeur de $i$ sera

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

donc pour que $(\alpha)$ soit aussi la vraie valeur de $i$, on doit avoir

$$\frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = \frac{nq'^2}{p'^2} + s,$$

ou

$$l = s + \frac{2nq'z}{p'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

donc

$$\Pi_1 = \frac{e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} - \frac{\left(s+\frac{2nq'z}{p'^2}\right)^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}} dzds. \quad . \quad . \quad (13)$$

est la probabilité de $s$ dans l'expression

$$i = n\varphi^2 + l = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l = \frac{nq'^2}{p'^2} + s.$$

2° Cherchons la probabilité P que l'erreur de $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ est comprise entre $\pm s$.

Pour cela il faut intégrer (13) par rapport à $z$ entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, et par rapport à $s$, entre $-s$ et $+s$; on trouvera ainsi :

$$P = \frac{1}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}} \int_{-s}^{+s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2\varphi(1-\varphi)\varphi'} - \frac{\left(s+\frac{2nq'}{p'}\right)^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}$$

soit

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi^2)(1+\varphi)}},$$

alors

$$P = c\int_{-s}^{+s} ds e^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\left[\left\{\frac{1}{2\varphi(1-\varphi)} + \frac{4n^2q'^2}{2np'^4\varphi^2(1-\varphi^2)}\right\} z + \frac{4nq'sz}{2np'^2\varphi^2(1-\varphi)^2}\right]}$$

comme $\varphi = \frac{q'}{p'}$ approximativement, d'où $q' = \varphi p'$, on a :

$$P = c\int_{-s}^{+s} ds e^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\left[\frac{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)} z^2 + \frac{2sz}{p'\varphi(1-\varphi^2)}\right]}.$$

Posons :

$$h = \frac{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)}, \quad g = \frac{2p's}{p'^2(1+\varphi)+4n\varphi},$$

alors

$$P = c\int_{-s}^{+s} ds e^{-\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}} \int_{-z}^{+z} dz e^{-h(z^2+2gz)}$$

$$= c\int_{-s}^{+s} ds e^{-\left[\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2\right]} \int_{-z}^{+z} dz e^{-h(z+g)^2}$$

et comme

$$\int_{-z}^{+z} dz e^{-h(z+g)^2} = \frac{1}{h}\sqrt{\pi},$$

on aura

$$P = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} c\int_{-s}^{+s} ds e^{-\left\{\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2\right\}} =$$

$$\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{2\pi\left[p'^2(1+\varphi)+4n\varphi\right]n\varphi^2(1+\varphi)}} \int_{-s}^{+s} ds e^{-\left\{\frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)\left[p'^2(1+\varphi)+4n\varphi\right]}\right\} s^2}$$

ou bien, en posant :

$$k^2 = \frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)\left[p'^2+(p'^2+4n)\varphi\right]}$$

$$P = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_{-s}^{+s} dse^{-k^2s^2} = \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^s dse^{-k^2s^2}.$$

## DURÉE MOYENNE D'UNE ASSOCIATION QUELCONQUE DE $n$ INDIVIDUS.

163. Soient $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ les âges respectifs de ces $n$ personnes;

» $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ leurs probabilités respectives de vivre encore $x$ années; on aura :

$$p_1 = \frac{A_{a_1+x}}{A_{a_1}}, \quad p_2 = \frac{A_{a_2+x}}{A_{a_2}}, \ldots p_n = \frac{A_{a_n+x}}{A_{a_n}}.$$

Soit $i$ le nombre des associations existantes après $x$ ans, écoulés depuis l'origine de l'association, on a :

$$i = n \cdot p_1 p_2 \ldots p_n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Remarque. Si les associés sont du même âge, et que $r$ soit leur nombre, on a

$$i = np_1^r. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La somme des valeurs de (1) ou de (2) correspondantes à toutes les valeurs de $x$, divisée par $n$, sera la durée moyenne de ce genre d'association.

## DURÉE MOYENNE DE LA VIE.

164. Premier problème. Soit $\omega = l + n\mu$, déterminer la probabilité $P_\omega$ que la somme des âges auxquels parviendront $n$ individus, nés à la même époque, est égale à $\omega$.

Soit $a$ l'âge le plus élevé;

Soient $o, da, 2da, 3da \ldots x \ldots a$ les âges respectifs des $n$ personnes;

Soient $\varphi(o), \varphi(da), \varphi(2da) \ldots \varphi(x) \ldots \varphi(a)$, les probabilités correspondantes.

On aura :

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \cdots + \varphi(a) = 1,$$

c'est-à-dire que la probabilité que les $n$ individus auront ou $o$, ou $da$, ou $2da$ ... ou $a$ années, est une *certitude;*

$$\int_0^a x\varphi(x)\,dx = o\varphi(o) + da\varphi(da) + 2da\varphi(2da) + \cdots$$

somme des produits des âges par les probabilités correspondantes, sera la vraie durée de la vie moyenne;

$$\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx = o^2\varphi(o) + da^2\varphi(da) + (2da)^2\varphi(2da) + \text{etc.}$$

somme des produits des carrés des âges par les probabilités correspondantes;

$$\int_0^a x^3\varphi(x)\,dx = o^3\varphi(o) + da^3\varphi(da) + (2da)^3\varphi(2da) + \cdots \text{etc.}$$

somme des produits des cubes des âges par les probabilités correspondantes;

(1)

et ainsi de suite.

Posons $\qquad x = ax', \quad \varphi(ax') = \psi(x'),$

$$\int_0^1 \psi x'dx' = k, \quad \int_0^1 x'\psi x'dx' = k_1, \quad \int_0^1 x'^2\psi(x')\,dx' = k_2, \text{ etc.}$$

Il vient

$$\left.\begin{aligned} \int_0^a \varphi(x)\,dx &= a\int_0^1 \psi x'\,dx' = ak = 1, \\ \int_0^a x\varphi(x)\,dx &= a^2\int_0^1 x'\psi x'dx' = a^2k_1, \\ \int_0^a x^2\varphi(x)\,dx &= a^3\int_0^1 x\psi x'dx' = a^3k_2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les termes du produit

$$\left\{\varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \cdots + \varphi(a)\right\}^n = 1.$$

exprimeront toutes les probabilités composées possibles des âges simultanés des $n$ individus.

Soit

$$X = \left\{\varphi(o) + \varphi(da)\,t^{da} + \varphi(2da)\,t^{2da} + \cdots\right\}^n = \Sigma P_\omega t^\omega,$$

alors $P_\omega$ sera la probabilité que la somme des âges auxquels les $n$ enfants parviendront est $\omega$.

Pour trouver $P_\omega$, posons $t = e^{-\varpi\sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \left\{\varphi(o) + \varphi(da)\, e^{-\omega da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\, e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\right\}^n = \Sigma P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}}$$
$$= P_0 + P_1 e^{-da\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.} + P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}} + P_{\omega+1} e^{-\varpi(\omega+da)\sqrt{-1}} + \text{etc.} \quad (3)$$

On a
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\varpi m\sqrt{-1}} d\varpi = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi = 2\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Donc en multipliant (3) par $e^{\varpi\omega\sqrt{-1}} d\varpi$, et en intégrant entre les limites $\varpi = -\pi$ et $\varpi = \pi$, tous les termes du second membre disparaissent à l'exception du terme en $P_\omega$, et l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}} d\varpi = P_\omega \cdot 2\pi,$$

d'où
$$P_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}} d\varpi,$$

et comme $\omega = l + n\mu$

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}} \left\{ e^{\mu\varpi\sqrt{-1}} \left[\varphi(o) + \varphi(da)\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\, e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\right]\right\}^n.$$

Soit

$$A = \left\{ e^{\mu\varpi\sqrt{-1}} \left[\varphi(o) + \varphi(da)\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\, e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \cdots\right]\right\}^n, \quad (5)$$

nous aurons :
$$P_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Or on a :

$$\text{l. } A = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.} \left\{\varphi(o) + \varphi(da)\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da) e^{-2\varpi da\sqrt{-1}} + \text{etc.}\right\}$$
$$= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.} \left\{\varphi(o) + \varphi(da)\left[1 - \varpi da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 da^2}{2} + \frac{\varpi^3 da^3}{2.3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$+ \varphi(2da)\left[1 - \varpi 2da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 \overline{2da}^2}{2} + \frac{\varpi^3 \overline{2da}^3}{2.3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \varphi(3da)\left[1 - \varpi 3da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 \overline{3da}^2}{2} + \frac{\varpi^3 \overline{3da}^3}{2.3}\sqrt{-1} + \text{etc.}\right]$$
$$\left. + \text{etc.}\right\}$$
$$= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.} \left\{\left[\varphi(o) + \varphi(da) + \varphi(2da) + \varphi(3da) + \text{etc.}\right]\right.$$
$$- \varpi\sqrt{-1}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\, da + \varphi(2da)\, da + \cdots\right]$$
$$- \frac{\varpi^2}{2}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\, da^2 + \varphi(2da)\, da^2 + \text{etc.}\right]$$
$$\left. + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\left[\varphi(o) + \varphi(da)\, da^3 + \varphi(2da)\, da^3 + \text{etc.}\right] + \text{etc.}\right\}.$$

On a ajouté $\varphi(o) = 0$ dans les polynômes entre parenthèses, et à cause des équations (1) et (2), on pourra écrire :

$$\text{l. A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.}\left\{\int_0^a \varphi x dx - \varpi\sqrt{-1}\int_0^a x\varphi x dx - \frac{\varpi^2}{2}\int_0^a x^2\varphi x dx + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\int_0^a x^3\varphi x dx + \text{etc.}\right\}$$

$$\text{l. A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.}\left\{1 - \varpi\sqrt{-1}\,a^2k_1 - \frac{\varpi^2}{2}a^3k_2 + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\,a^4k_3 + \text{etc.}\right\}$$

$$= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\,\text{l.}\left\{1 - \varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k} - \frac{\varpi^2}{2}\frac{a^2k_2}{k} + \frac{\varpi^3}{2.3}\sqrt{-1}\,\frac{a^3k_3}{k} + \text{etc.}\right\}$$

Si l'on développe le logarithme en série on trouvera :

$$\text{l. A} = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\left\{-\varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k} - \frac{\varpi^2}{2}\frac{a^2k_2}{k} + \frac{1}{2}\varpi^2\frac{a^2k_1}{k^2} - \text{etc.}\right\}$$

$$= \left(\mu - \frac{ak_1}{k}\right)n\varpi\sqrt{-1} - na^2\varpi^2\left(\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}\right) - \text{etc.}$$

$\mu$ étant quelconque, on fait disparaître le premier terme imaginaire en posant (v. page 292) :

$$\mu = \frac{ak_1}{k} = \frac{a^2k_1}{ak} = a^2k_1 = \int_0^a x\varphi x dx,$$

vraie durée de la vie moyenne. Alors

$$\text{l. A} = -n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2 - \text{etc.}$$

Passant aux nombres :

$$\text{A} = e^{-n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2};$$

$n$ étant très-grand, on peut négliger tous les autres termes de l'exposant de $e$, d'où

$$\text{P}_\omega = \frac{1}{2\mu}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}}\,e^{-n\frac{kk_2 - k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2},$$

on peut étendre les limites à $\pm\infty$, et poser

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{l\varpi\sqrt{-1}-n\frac{kk_2-k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2} \quad \ldots\ldots (6)$$

Pour effectuer l'intégration de (6), il faut faire en sorte que l'exposant de $e$ devienne un carré; on a :

$$l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk_2-k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2 = -n\frac{kk_2-k_1^2}{2k^2}a^2\left\{\varpi^2 - \frac{2k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2-k_1^2)}\varpi\right\}$$

$$= -n\frac{kk_2-k_1^2}{2k^2}a^2\left\{\left[\varpi - \frac{k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2-k_1^2)}\right]^2 - \left[\frac{k^2l\sqrt{-1}}{na^2(kk_2-k_1^2)}\right]^2\right\}.$$

Soit $$\beta^2 = \frac{k^2}{2(kk_2-k_1^2)},$$

il viendra

$$l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk_2-k_1^2}{2k^2}a^2\varpi^2 = -\left(\frac{a\sqrt{n}}{2\beta}\right)^2\left\{\left[\varpi - \frac{2\beta^2}{na^2}l\sqrt{-1} + \frac{4\beta^4l^2}{n^2a^4}\right]\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta} - \frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right\}^2 - \frac{\beta^2l^2}{na^2},$$

donc $$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-\left\{\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta}-\frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right\}^2} e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}.$$

Soit $$\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta} - \frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}} = t,$$

d'où $$d\varpi = \frac{2\beta}{a\sqrt{n}}dt;$$

on aura $$P_\omega = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}\cdot\frac{2\beta}{a\sqrt{n}}\int_{-a}^{\infty} e^{-t^2dt},$$

mais $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2dt} = \sqrt{\pi},$$

donc $$P_\omega = \frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

probabilité que la somme des âges auxquels parviendront un très-grand nombre $n$ d'enfants, est :

$$\omega = l + n\mu = l + na^2k_1 = l + n\int_0^a x_1 x dx,$$

c'est-à-dire que cette somme est égale à $l$, plus $n$ fois la durée de la vie moyenne.

165. Deuxième problème. Chercher la probabilité P que la somme des âges auxquels parviendront les $n$ individus, est comprise entre

$$n\mu \pm l = na^2k_1 \pm ar\sqrt{n} = n\left[a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}\right].$$

En faisant varier $l$ d'une manière continue depuis $-l$ jusqu'à $+l$, on a

$$\mathrm{P} = \frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\beta}{a\sqrt{n}}\int_0^l e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r \beta e^{-\beta^2 r^2}\,dr \quad (8)$$

P est donc aussi la probabilité que le rapport de la somme des âges auxquels parviendront les $n$ individus, au nombre des individus, est compris entre $a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}$ ou entre la vraie durée de la vie moyenne augmentée ou diminuée de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$.

Remarque. Quand $n$ est très-grand, on a à peu près :

$$\int_0^a x\varphi x\,dx = a^2k_1 = \mathrm{G}$$

rapport de la somme des âges auxquels parviennent les $n$ personnes, à ce nombre $n$, ou durée de la vie moyenne;

$$\int_0^a x^2\varphi x\,dx = \frac{a^2k_2}{k} = \mathrm{H}$$

rapport de la somme des carrés de ces âges, au nombre $n$.

On a donc (voir p. 292)

$$k_1 = \frac{\mathrm{G}}{a^2} = \frac{\mathrm{G}ak}{a^2} = \frac{\mathrm{G}k}{a},$$

$$k_1^2 = \frac{\mathrm{G}^2k^2}{a^2},$$

$$k_2 = \frac{\mathrm{H}k}{a^2};$$

$$\beta^2 = \frac{k^2}{2(kk_2 - k_1^2)} = \frac{a^2k^2}{2(k^2\mathrm{H} - \mathrm{G}k^2)} = \frac{a^2}{2(\mathrm{H} - \mathrm{G}^2)}$$

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{2}(\mathrm{H} - \mathrm{G}^2)}, \text{ et } \frac{1}{2\beta} = \frac{\sqrt{\mathrm{H} - \mathrm{G}^2}}{a\sqrt{2}}.$$

166. Troisième problème. Chercher l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur la durée moyenne G de la vie.

La probabilité de $r$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta e^{-\beta^2 r^2}dr;$$

donc la valeur moyenne de $r$ est

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \beta r dr e^{-\beta^2 r^2}.$$

La valeur moyenne de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ est

$$\pm\frac{a}{\sqrt{n\pi}}\int_0^\infty \beta r dr e^{-\beta^2 r^2},$$

mais

$$\int \beta e^{-\beta^2 r^2} r dr = -\frac{e^{-\beta^2 r^2}}{2\beta} + C, \quad \int_0^\infty \beta e^{-\beta^2 r^2} r dr = \frac{1}{2\beta},$$

donc la valeur moyenne de $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ est

$$\pm\frac{a}{2\beta\sqrt{n\pi}} = \pm\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}},$$

mais

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \beta dr e^{-\beta^2 r^2}$$

est la probabilité que le rapport de la somme des âges auxquels parviendront $n$ personnes, au nombre $n$, est compris entre la vraie durée de la vie moyenne $\pm\frac{ar}{\sqrt{n}}$, ou bien, que G est compris entre la vraie durée de la vie moyenne augmentée ou diminuée de

$$\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}};$$

donc en prenant G pour la vraie durée moyenne de la vie, on risque de commettre une erreur comprise entre

$$\pm\frac{\sqrt{H-G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Remarque. Ces résultats sont encore vrais relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsqu'au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

167. Quatrième problème. Déterminer la durée moyenne de la vie dans le cas où une des causes A de mortalité venait à disparaître.

Il suffit de connaître le nombre de survivants de l'âge $x$, si la cause A n'existait pas; car alors on pourrait former une table de mortalité pour ce cas, et en déduire la durée de la vie moyenne, en comparant cette durée à celle que l'on conclut des tables de mortalité ordinaires, dans lesquelles on n'a pas fait abstraction de A. On aura l'influence de la cause A sur la durée de la vie moyenne.

Soient Y, le nombre des individus qui, sur $n$ naissances, vivraient à l'âge $x$, si la cause A disparaissait;

$y$, le nombre des individus qui, sur $n$ naissances, vivraient encore à l'âge $x$, dans le cas où la cause A subsiste;

$\varphi(x)\,dx$, la probabilité qu'un individu de l'âge $x$ périra de la cause A dans l'intervalle de temps $dx$.

$y\varphi x dx$, le nombre des individus qui périront par cette cause dans ce même intervalle de temps $dx$.

$\mathrm{Y}\psi x dx$ le nombre des individus de l'âge $x$, qui périraient dans l'intervalle $dx$, si la cause A ne subsistait plus.

On a donc, en remarquant que $y$ et Y diminuent, lorsque $x$ augmente :

$$y dx \{\varphi x + \psi x\} = - dy,$$

et

$$\mathrm{Y}\psi(x)\,dx = - d\mathrm{Y}.$$

Éliminant $\psi(x)$, on trouve :

$$\frac{d\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}} = \frac{dy}{y} + \varphi(x)\,dx$$

$$\mathrm{l.Y} = \mathrm{l.}\,y e^{\int \varphi x dx}, \quad \mathrm{Y} = y e^{\int \varphi x dx}.$$

L'intégrale $\int \varphi x dx$ se trouve approximativement par les tables de mortalité, car en faisant $dx = 1$ an, on peut considérer $\int \varphi x dx$

comme étant le rapport du nombre des individus que la cause A fait périr chaque année, au nombre $n$ de ceux qui vivent encore au milieu de cette année.

## DE LA POPULATION.

168. Théorème. Si dans un pays les rapports de la population aux naissances et aux décès annuels sont des nombres constants, les naissances, les décès et la population à la fin de la première, de la seconde, de la troisième, etc., année, à partir d'une époque donnée $a$, constitueront trois séries de nombres en progression géométrique.

Démonstration. Soient :

$P$, $D$, $N$ respectivement la population, les nombres des décès et des naissances à l'époque $a$;

$P_1$, $D_1$, $N_1$, les mêmes nombres à la fin de la première année à partir de l'époque $a$;

$P_2$, $D_2$, $N_2$, » » seconde année » »

$P_3$, $D_3$, $N_3$, » » troisième année » » etc.

On a par hypothèse

$$\frac{P}{N} = n, \quad \frac{P}{D} = d \quad \text{d'où} \quad N = \frac{P}{n}, \quad D = \frac{P}{d}, \quad \frac{D}{N} = \frac{n}{d}$$

$$\frac{P_1}{N_1} = n, \quad \frac{P_1}{D_1} = d \quad \text{d'où} \quad N_1 = \frac{P_1}{n}, \quad D_1 = \frac{P_1}{d}, \quad \frac{D_1}{N_1} = \frac{n}{d}, \text{ etc.}$$

Soient

$$r = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{d};$$

et $\Sigma$, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ ... les excès annuels des naissances sur les décès.

On a

1°
$$\Sigma = N - D = \frac{P}{n} - \frac{P}{d} = P\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\Sigma_1 = N_1 - D_1 = \ldots \quad P_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\Sigma_2 = \ldots \quad P_2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right), \text{ etc.}$$

$$P = nN$$

$$P_1 = P + \Sigma = P\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{d}\right) = Pr$$

$$P_2 = P_1 + \Sigma_1 = \ldots\ldots\ldots P_1 r$$

$$\vdots$$

$$P_i = P_{i-1} + \Sigma_{i-1} = \ldots\ldots\ldots P_{i-1} r,$$

multipliant par ordre et réduisant, on trouve :

$$P_i = nNr^i = Pr^i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

donc

$$P_{i+1} = Pr^{i+1}$$

d'où

$$r = \frac{P_{i+1}}{P_i}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

2°

$$N_i = \frac{P_i}{n},$$

donc

$$N_i = \frac{nNr^i}{n},$$

d'où

$$N_i = Nr^i, \quad N_{i+1} = Nr^{i+1},$$

et

$$r = \frac{N_{i+1}}{N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

3°

$$D_i = \frac{P_i}{d},$$

et par suite de $(a)$,

$$D_i = \frac{nNr^i}{d},$$

et puisque

$$\frac{D}{N} = \frac{n}{d},$$

$$D_i = Dr^i, \quad D_{i+1} = Dr^{i+1}. \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

et

$$r = \frac{D_{i+1}}{D_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Par les formules

$$P_i = Pr^i \quad r = \frac{P_{i+1}}{P_i}$$

$$N_i = Nr^i \quad r = \frac{N_{i+1}}{N_i}$$

$$D_i = Dr^i \quad r = \frac{D_{i+1}}{D_i}$$

il est clair que la population, les naissances et les décès forment des progressions géométriques dont la raison sera connue, si l'on connaît deux termes consécutifs de l'une quelconque de ces progressions.

169. Problème I. Les naissances et les décès annuels étant proportionnels à la population, trouver le nombre $i$ d'années nécessaires, pour que la population soit devenue égale à $m$ fois la population primitive.

Solution. P étant la population actuelle,

$Pr^i$ est la population après la première année;

donc

$$Pr^i = mP, \text{ et } i = \frac{\log. m}{\log. r}.$$

Problème II. Les naissances et les décès annuels étant proportionnels à la population; et $\Sigma$ exprimant l'excès des naissances sur les décès pendant la période de $i$ années, trouver la raison de la progression géométrique qui exprime la population à partir d'une époque donnée.

Solution. On a

$$P_i = Pr^i$$

d'où

$$r = \sqrt[i]{\frac{P_i}{P}} = \sqrt[i]{\frac{P+\Sigma}{P}} = \sqrt[i]{1+\frac{\Sigma}{P}}.$$

Soit

$$r = 1 + \varrho,$$

on aura

$$\varrho = 1 - \left(1 + \frac{\Sigma}{iP}\right) = \frac{\Sigma}{iP}$$

$$r = 1 + \frac{\Sigma}{iP} = 1 + \frac{P_i - P}{iP}.$$

Problème III. Soit N′ le nombre des naissances des enfants nés $i$ années avant l'époque actuelle, par conséquent le nombre des naissances des enfants qui ont actuellement de $i$ à $i+1$ ans;

Soit $P_{i+1}$ le nombre des décès actuels des enfants de $i$ à $i+1$ ans correspondant aux N′ naissances;

Chercher le nombre $\Delta_{i+1}$ de décès des enfants de $i$ à $i+1$ ans correspondant aux N naissances.

Solution. On a la proportion

$$\Delta_{i+1} : D_{i+1} = N_i : N'$$

$$\Delta_{i+1} = \frac{ND_{i+1}}{N'};$$

or

$$N_i = Nr^i$$

ou, en changeant $N_i$ en N et N en N′,

$$N = N'r^i,$$

d'où

$$N' = \frac{N}{r^i},$$

donc

$$\Delta_{i+1} = \frac{ND_{i+1}}{\frac{N}{r^i}} = D_{i+1}r^i,$$

et

$$\Delta_i = D_i r^{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

170. Problème IV. Connaissant les nombres N, $r$, B, ainsi que la répartition des décès suivant les âges à une époque donnée $a$, trouver les nombres des survivants à la fin de la 1re, de la 2me, de la 3me, etc., $i^{ème}$ année à partir de cette époque.

Solution. Soient respectivement N, D, P les nombres des naissances, des décès et de la population à l'époque $a$;

Soit $A_i$ le nombre des survivants à la fin de la $i^{ème}$ année à partir de $a$;

Soit $\Delta_i$ le nombre des décès des enfants de $i-1$ à $i$ ans, correspondants aux N naissances; on aura :

$$A_i = A_{i-1} - \Delta_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Soit $D_i$ le nombre des décès des enfants ayant de $i-1$ à $i$ ans, nés $i-1$ ans avant l'époque actuelle, et qui répond à $N' = \frac{N}{r^{i-1}}$ naissances; on a, par l'équation $(e)$

$$\Delta_i = D_i r^{i-1}$$

donc

$$A_i = A_{i-1} - D_i r^{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

faisons successivement $i = 1, 2, 3 \ldots i$

$$A = N$$
$$A_1 = N - D_1$$
$$A_2 = A_1 - D_2 r$$
$$A_3 = A_2 - D_3 r, \text{ etc.,}$$
$$A_i = A_{i-1} - D_i r^{i-1}.$$

En ajoutant et en réduisant, on a

$$A_i = N - \left\{ D_1 + D_2 r + D_3 r^2 + \cdots + D_i r^{i-1} \right\} . \quad . \quad . \quad (b)$$

Cette formule sert à construire une table de mortalité, lorsque la population croît en progression géométrique, et que l'on connaît la répartition des décès par âges.

Si la population est stationnaire, on a

$$r = 1, \; N = D \text{ et } A_i = D - D_1 - D_2 - \text{etc.} - D_i .$$

Cette formule correspond à l'hypothèse de la table de mortalité de Halley.

### Formation des tables de population.

La population actuelle P se compose : des N enfants qui viennent de naître; des $N_1$ enfants âgés de 0 à 1 an; des $N_2$ enfants âgés de 1 à 2 ans, etc.; des $N_\omega$ individus âgés de $\omega - 1$ à $\omega$ ans, $\omega$ étant le terme de la vie.

Soient :

$N'_1$ le nombre des enfants de 1 an;
$N'_2$ » » de 2 ans;
$N'_3$ » » de 3 ans, etc.;
$N'_\omega$ » des individus de $\omega$ ans,

on peut prendre

$$N_1 = \frac{N + N'_1}{2}, \quad N_2 = \frac{N'_1 + N'_2}{2}, \quad N_3 = \frac{N'_2 + N'_3}{2}, \text{ etc.,}$$

$$N_\omega = \frac{N'_{\omega-1} + N_\omega}{2},$$

et l'on aura :

$$P = N_1 + N_2 + \cdots + N_\omega = \frac{1}{2} N + N'_1 + N'_2 + \cdots + N'_{\omega-1} + \frac{1}{2} N'_\omega . \quad (1)$$

Soient : $A_i$ le nombre des survivants après $i$ années; et $N = A_0$.
La probabilité d'avoir $i$ ans sera

$$p_i = \frac{A_i}{A_0} = \frac{A_i}{N},$$

mais quand la population croît en raison géométrique, le nombre des naissances correspondant à cet âge est $\frac{N}{r^i}$; donc le nombre des individus de $i$ ans sera

$$N'_i = \frac{N}{r^i} \frac{A_i}{N} = \frac{A_i}{r^i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Donc l'équation (1) devient

$$P = \frac{1}{2} N + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots + \frac{A_{\omega-1}}{r^{\omega-1}} + \frac{A_\omega}{r^\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Corollaire. Pour $r = 1$, la population est stationnaire, et l'on a :

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} N + A_1 + A_2 + \cdots \text{ etc.} \\ &= N \left\{ \frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{N} \right\} = N_1 M \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3^{bis})$$

M étant la somme $\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{N}$, qui représente la durée de la vie moyenne.

Les formules (3) et ($3^{bis}$) servent à former des tables de population.

**Usage de ces tables.**

171. La population totale étant d'un million d'hommes, soient:

$n$ le nombre des hommes âgés de $m$ ans,

$p$ » » » $q$ ans;

$n - p$ sera le nombre des hommes âgés de $m$ à $q$ ans sur un million; et sur H hommes, ce nombre sera $\frac{H(n-p)}{1000000}$.

Problème. Que devient une population donnée après un temps quelconque $t$?

Supposons que la population croisse en proportion géométrique, tandis que le temps croît en progression arithmétique; et que l'on ait :

$$p = ke^{at},$$

$a$ et $k$ étant des nombres constants, et $e$ la base des logarithmes népériens; on aura :

$$p_n = ke^{at_n},$$

d'où

$$\frac{p}{p_n} = e^{a(t-t_n)}.$$

Soit $n = 0$, on a $p_n = p_0$, population au moment où l'on commence à compter le temps; $t_n = t_0 = 0$.

On aura :

$$p = p_0 e^{at}$$

et

$$\frac{dp}{dt} = ap_0 e^{at} = ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

La constante $a$ se détermine quand on connaît une valeur de $p$ correspondante à une valeur de $t$; par exemple, si $p$ devient $2p$, quant $t$ devient $t + 25$, on trouve

$$a = 0{,}01204\ldots$$

En général $ap$ diminue en Europe; cette quantité se nomme *Énergie* du développement de la population.

Soit $P_0$ la population normale ; et supposons que $ap$ s'affaiblisse de $g(P - P_0)$, c'est-à-dire proportionnellement à l'accroissement de la population, la formule $(a)$ devient

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = a - g\frac{P - P_0}{1} = \frac{ap - gp + gP_0}{p} = \frac{gP_0 - (g - a)P}{P}.$$

Faisons

$$g - a = m,$$

d'où

$$gP_0 = mP;$$

et

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{m(P - p)}{p}$$

$$dt = \frac{dp}{m(P - p)}$$

$$t + c = -\frac{1}{m}\text{l.}(p - P);$$

$t = 0$, donne $p = P_0$, donc

$$c = -\frac{1}{m}\text{l.}(p_0 - P)$$

$$t = \frac{1}{m}\text{l.}\frac{P - p_0}{P - p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$\text{l.}(P - p) = \text{l.}(P - p_0) - mt = \text{l.}\left[(P - p_0)e^{-mt}\right]$$

$$P - p = (P - p_0)e^{-mt}$$

$$p = P(P - p_0)e^{-mt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Il reste à déterminer les constantes P, $m$, $p_0$.

Si l'on donne les valeurs $t_0$, $p_0$ ; $t_1$, $p_1$ ; $2t_1$, $p_2$ ; la formule $(b)$ donne

$$t_1 = \frac{1}{m}\text{l.}\frac{P - p_0}{P - p_1}$$

et

$$2t_1 = \frac{1}{m}\text{l.}\frac{P - p_0}{P - p_2},$$

en éliminant $m$, on obtient

$$P = \frac{p_1^2 - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)}$$

donc

$$m = \frac{1}{t_1} l. \frac{P - p_0}{P - p_1} = \frac{1}{t_1} l. \left\{ \frac{\dfrac{p_1^2 - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)} - p_0}{\dfrac{p_1^2 - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)} - p_1} \right\}.$$

## THÉORIE DE LAPLACE SUR LA DÉTERMINATION DE LA POPULATION D'UN EMPIRE.

172. Problème I. Chercher le rapport $a$ de la population aux naissances annuelles.

Solution. On fait le dénombrement exact des habitants d'une partie de l'empire.

Soit $p$ le nombre des habitants de cette partie;

$q$ » naissances correspondantes;

on aura :

$$a = \frac{p}{q}.$$

Exemple. En 1802, au 22 septembre, on a trouvé dans ces communes choisies de trente départements, distribués de manière à compenser les effets de la variété des climats :

110312 est le nombre des garçons nés du 22 septembre 1799 au 22 septembre 1802;

105287 est celui des filles nées dans le même intervalle.

$$q = \frac{110312 + 105287}{3} = 71866.$$

On a trouvé $p = 2037615$ habitants au 22 septembre 1802.

Ainsi

$$a = \frac{p}{q} = 28,\ 352845.$$

Problème II. Étant donné le rapport $a$, et le nombre $q'$ des naissances annuelles de tout l'empire, trouver la population $p'$.

Solution. On a

$$p' = aq' = \frac{pq'}{q}.$$

Exemple. Les mêmes données que précédemment étant prises, soit 1° $q' = 1000000$, on aura

$$p' = 1000000 \times 28{,}552845 = 28\,552\,845;$$

soit 2° $q' = 1500000$, on a

$$p' = 42529267.$$

Problème III. Chercher la probabilité Π de l'erreur $z$ que l'on peut craindre sur la détermination précédente de $p' = \frac{pq'}{q}$.

Solution. La première formule pour les erreurs d'une table de mortalité donne (n° 162)

$$\Pi = \sqrt{\left\{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}\right\}} e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(p+q')}}$$

Problème IV. Chercher la probabilité P que $p' = \frac{pq'}{q}$ est comprise entre $\frac{pq'}{q} \pm z$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_{-z} dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'}} \\ &= 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_{-z}^{+z} dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}} \end{aligned}$$

probabilités que la population calculée $p'$ est comprise entre les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_0^z dz e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}} \\ &= 1 - 2\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(p+q')}} \end{aligned}\right\} (1).$$

Soit

$$\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')} = a, \quad az^2 - t^2, \quad z = \frac{t}{\sqrt{a}} = \alpha,$$

on pourra écrire

$$P = 1 - 2\int_{\alpha}^{\infty} dt e^{-t^2} = 1 - \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{\Pi}}\left\{1 - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1.3}{2^2\alpha^4} - \right\} \quad (2).$$

Exemple :

$$z = \alpha = 500000,$$
$$p = 2057615,$$
$$q = 71866.$$

$p' = \frac{pq'}{q} = 42529267$, population correspondante 1500000 naissances.

La formule (2) donne

$$P = 1 - \frac{1}{1162} = \frac{1161}{1162}.$$

Il y a donc 1161 à parier contre 1 qu'en fixant à 42529267 la population correspondante à 1500000 naissances, on ne se trompera pas de 500000 ou $\frac{1}{2}$ million.

## CHAPITRE IX.

### ASSURANCES SUR LA VIE.

173. Le principe qui sert à mettre en équation les questions d'assurances consiste en ce que les recettes de l'établissement doivent être égales aux dépenses.

Les recettes se composent :

1.) De la somme S qu'on doit payer, ou du prix;

2.) De la contribution $\sigma$, temporaire ou viagère que le participant s'oblige à payer ordinairement par anticipation à la fin de chaque année.

Les dépenses se composent :

1.) De la rente temporaire ou viagère $\rho$, ou bien du capital $\rho$ payé en une seule fois, ou par terme, au bénéfice du participant ou du survivant, ou des héritiers;

2.) Des frais d'administration.

Les recettes et les dépenses doivent être conçues comme des capitaux portant intérêt, et qu'on doit réduire à leurs valeurs actuelles, afin de pouvoir juger d'avance de l'état de l'opération.

Soit $\gamma$ le taux de l'intérêt, c'est-à-dire que $\gamma = 1{,}05$ à 5 pour cent, $\gamma = 1{,}04$ à 4 pour cent.

Problème I. On demande quel prix S une personne A âgée de $m$ ans doit donner d'abord à un établissement d'assurance, pour que, en payant par anticipation à la fin de chaque année une somme $\sigma$ pendant les $a$ premières années, l'établissement lui assure une rente annuelle $\rho$ pendant $c$ ans à partir de la $b^{ième}$ année après le contrat.

Solution. I. *Évaluation des rentes :*

1° Soient M le nombre des personnes de l'âge $m$ contractant avec l'établissement sous les conditions du problème, l'établissement recevra en prix la somme actuelle MS;

2° De ces M personnes un nombre $M\frac{A_{m+1}}{A_m}$ survivent à la fin de la 1re année, et payent $M\sigma\frac{A_{m+1}}{A_m}$ de contribution à la fin de cette 1re année. Cette somme, à raison de $r$ pour 1, réduite à sa valeur actuelle, est $\frac{M\sigma}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m}$;

3° On trouvera de même que la recette du chef de la contribution $\sigma$, à la fin de la 2me année, réduite à sa valeur actuelle, est

$$\frac{M\sigma}{r^2}\cdot\frac{A_{m+2}}{A_m};\ \text{etc.}$$

A la fin de la $a^{ème}$ année elle est

$$\frac{M\sigma}{r^a}\frac{A_{m+a}}{A_m};$$

4° La recette totale provenant des M individus est

$$M\left\{S+\frac{\sigma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a}}{r^a}\right]\right\}$$

donc en divisant par M, la recette moyenne par individu sera

$$X=S+\frac{\sigma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a-1}}{r^a}\right].\quad\ldots\quad(1)$$

II. *Évaluation de la dépense:*

1° Pendant les $b$ premières années l'établissement ne paye rien.

2° A la fin de la $(b+1)^{ème}$ année le nombre des survivants sera

$$\frac{A_{m+b+1}}{A_m},$$

la dépense à la fin de la $(b+1)^{ème}$ année, réduite au commencement de la 1re année, sera, pour les M individus,

$$\frac{M\rho}{r^{b+1}}\cdot\frac{A_{m+b+1}}{A_m};$$

3° A la fin de la 2me année elle sera, réduite en valeur actuelle,

$$\frac{M\rho}{r^{b+2}}\cdot\frac{A_{m+b+2}}{A_m},\ \text{etc.}$$

A la fin de la $c^{ème}$ année elle sera, réduite de même :

$$\frac{M\rho}{r^{b+c}} \cdot \frac{A_{m+b+c}}{A_m}.$$

En ajoutant, puis en divisant par M, on a la valeur moyenne actuelle des rentes payées par individu, savoir :

$$Y = \frac{\rho}{A_m r^b}\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+b+c}}{r^c}\right\} \quad . \quad . \quad . \text{(II)}$$

Nous ferons abstraction des frais d'administration, et nous aurons ainsi :

$$X = Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(A)}$$

Remarque. — Lorsque la contribution annuelle $\sigma$ est viagère, ce que nous indiquons en posant $a = \omega$, le nombre des termes dans la série de X doit s'étendre jusqu'à la limite de la table de mortalité, qui est représentée par cette lettre $\omega$.

Lorsque la rente annuelle est *viagère*, ce que nous indiquerons en posant $c = \omega$, il faudra prolonger les termes de la parenthèse du second membre de Y jusqu'à cette limite.

La formule (A) fait connaître l'une des quantités S, $\sigma$, $\rho$ quand on connaît les deux autres; $a$, $r$, $b$, $c$ sont supposés connus.

**Cas particuliers.**

*Premier cas.* Posons :

$$\sigma = o, \quad b = o, \quad c = \omega,$$

la formule (A) nous donnera :

$$S = \frac{\sigma}{A_m}\left\{\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

c'est-à-dire que la personne A doit donner à la caisse de l'établissement un capital S, pour constituer sur sa tête une rente viagère $\rho$.

*Deuxième cas.* Posons :

$$\sigma = o, \quad c = \omega,$$

d'où :

$$S = \frac{\sigma}{A_m r^b}\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\}.$$

*Troisième cas.* Posons :

$$S = o, \quad c = \omega,$$

d'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{r^b}\left\{\frac{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots}{A_m + \frac{A_{m+1}}{r} + \cdots}\right\}.$$

*Quatrième cas.* Posons :

$$\sigma = o, \quad b = o,$$

d'où :

$$S = \frac{\rho}{A_m}\left\{\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \cdots \frac{A_{m+c}}{r^c}\right\}.$$

*Cinquième cas.* Posons :

$$S = o,$$

d'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{r^b}\left\{\frac{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \cdots \frac{A_{m+b+c}}{r^2}}{A_m + \frac{A_{m+1}}{r} + \cdots \frac{A_{m+b+1}}{r^{a+1}}}\right\}.$$

Remarque. — Soit S, le capital à fournir par une personne de l'âge de $m + 1$, on a d'après la formule ($a$) du premier cas :

$$S = \frac{A_{m+1}}{A_m}\frac{S_{1+\rho}}{1 + r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Cette formule peut servir à construire une table de rentes viagères sur une tête, au taux de $r$ pour 1 d'intérêt.

174. Problème II. On demande quelle somme S une personne A âgée de $m$ ans doit donner à un établissement pour que, en payant par anticipation à la fin de chaque année une rente $\sigma$ pendant les $a$ premières années, la caisse paye à ses héritiers un capital $\rho$

après sa mort, pourvu que le décès n'ait lieu ni avant la $b^{ème}$ année, ni après la $(b+c)^{ème}$ année, à partir de l'époque de contrat.

Solution. I. La recette est la même que dans le problème précédent.

II. Quant aux dépenses, en voici le tableau :

| *Nombre des décès :* | *Dépense réduite :* |
|---|---|
| de la $b^{ème}$ à la $(b+1)^{e}$ année $\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{A}_{m+b}-\mathrm{A}_{m+b+1}}{\mathrm{A}_m}$ | $\dfrac{\mathrm{M}\rho}{r^{b+1}}\cdot\dfrac{\mathrm{A}_{m+b}-\mathrm{A}_{m+b+1}}{\mathrm{A}_m}$ |
| » $(b+1)^{e}$ » $(b+2)^{e}$ » $\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{A}_{m+b+1}-\mathrm{A}_{m+b+2}}{\mathrm{A}_m}$ | $\dfrac{\mathrm{M}\rho}{r^{b+2}}\cdot\dfrac{\mathrm{A}_{m+b+1}-\mathrm{A}_{m+b+2}}{\mathrm{A}_m}$ |
| etc. | |
| » $(b+c-1)^{e}$ » $(b+c)^{e}$ » $\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{A}_{m+b+c-1}-\mathrm{A}_{m+b+c}}{\mathrm{A}_m}$ | $\dfrac{\mathrm{M}\rho}{r^{b+c}}\cdot\dfrac{\mathrm{A}_{m+b+c-1}-\mathrm{A}_{m+b-c}}{\mathrm{A}_m}$ |

En ajoutant et en divisant par M, on obtient le payement moyen de la caisse par individu, savoir :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{S}+\frac{\sigma}{\mathrm{A}_m}\left[\mathrm{A}_m+\frac{\mathrm{A}_{m+1}}{r}+\cdots+\frac{\mathrm{A}_{m+a-1}}{r^{a+1}}\right]\\ &=\frac{\rho}{\mathrm{A}_m r^b}\left[\left\{\frac{\mathrm{A}_{m+b}}{r}+\frac{\mathrm{A}_{m+b+1}}{r^2}+\cdots+\frac{\mathrm{A}_{m+b+c-1}}{r^c}\right\}\right.\\ &\left.-\left\{\frac{\mathrm{A}_{m+b+1}}{r}+\frac{\mathrm{A}_{m+b+2}}{r^2}+\cdots\frac{\mathrm{A}_{m+b+c}}{r^c}\right\}\right] \end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{B})$$

**Cas particuliers :**

*Premier cas.* Posons :

$$\mathrm{S}=o,\quad a=\omega,\quad b=o,\quad c=\omega,$$

on a

$$\sigma=\rho\left\{\frac{\left[\frac{\mathrm{A}_m}{r}+\frac{\mathrm{A}_{m+1}}{r^e}+\text{etc.}\right]-\left[\frac{\mathrm{A}_{m+1}}{r}+\frac{\mathrm{A}_{m+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]}{\mathrm{A}_m+\frac{\mathrm{A}_{m+1}}{r}+\frac{\mathrm{A}_{m+2}}{r^2}+\text{etc.}}\right\}$$

$\sigma$ est la rente viagère que A doit payer à l'établissement pour assurer à ses héritiers un capital $\rho$ après sa mort.

*Deuxième cas.* Soient :

$$S = o, \quad b = o, \quad c = a.$$

*Troisième cas.* Soient :

$$\sigma = o, \quad b = o, \quad a = \omega, \quad c = \omega,$$

*Quatrième cas.* Soient :

$$S = o, \quad b = o, \quad a = \omega, \quad c = \omega.$$

Les formules relatives à ces cas se déduisent aisément de la formule (B).

Problème III. On demande quelle somme S une personne A, âgée de $m$ ans doit donner à un établissement, pour qu'en payant une somme $\sigma$ pendant les $a$ années, la caisse assure à une autre personne B âgée de $n$ ans, et désignée par A, un capital $\rho$ après sa mort, sous la condition que le décès n'ait pas lieu avant la $b^{ème}$ année à partir de l'époque du contrat.

I. *Recette.* La probabilité de la survivance des deux personnes à la fin de la première année est

$$\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n};$$

la caisse reçoit donc

$$\frac{\sigma}{r}\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n} \text{ à la fin de cette année;}$$

elle reçoit

$$\frac{\sigma}{r^2}\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n} \text{ à la fin de la } 2^{me} \text{ année; etc.}$$

et

$$\frac{\sigma}{r^a}\frac{A_{m+a}A_{n+a}}{A_m A_n} \text{ à la fin de la } a^{ème} \text{ année;}$$

la recette totale est

$$S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{u+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+a}A_{n+a}}{r^a}\right]$$

mais les payements se faisant par anticipation, cette recette se réduit à :

$$S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \cdots + \frac{A_{m+a-1}A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right\} \quad (I)$$

II. *Dépenses.* 1° La caisse ne paye rien si A meurt avant la $b^{ème}$ année;

2° Soient M couples d'individus de $m$ et $n$ ans, dans les conditions du couple (AB), subsistant à la fin de la 1re année; ce nombre à la fin de la $b^{ème}$ année se réduit à

$$M_1 = M \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n},$$

à la fin de la $(b+1)^{ème}$ année,

$$M_1 \frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right\}$$

est le nombre des couples survivants dans lesquels un individu de l'âge $n$ survit, tandis qu'un individu de l'âge $m$ est décédé.

La caisse doit donc payer

$$\frac{M\rho}{r^{b+1}} \frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right\};$$

3° A la fin de la $(b+1)^{ème}$ année, il survivra

$$M_2 = M \frac{A_{m+b+1} A_{n+b+1}}{A_m A_n}$$

paires de $m$ et $n$ ans; à la fin de $(b+2)^{ème}$ année

$$M_2 \frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}} \right\}$$

sera le nombre des couples dans lesquels un individu de $n$ ans vit encore, tandis qu'un de ceux de $m$ ans sera mort.

La caisse paye de ce chef

$$\frac{M_2\rho}{r^{b+2}} \cdot \frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}} \right\};$$

4° En posant

$$M_3 = M \cdot \frac{A_{m+b+2} A_{n+b+2}}{A_m A_n},$$

on trouve que la caisse paye à la fin de la $(b+3)^{ème}$ année :

$$\frac{M_3\rho}{r^{b+3}}\frac{A_{n+b+3}}{A_{n+b+2}}\left\{1-\frac{A_{m+b+3}}{A_{m+b+2}}\right\}, \text{ etc.}$$

En ajoutant, substituant les valeurs de $M_1$, $M_2$, $M_3$, etc., puis en divisant par M on a la dépense totale moyenne par individu, et en l'égalant à la recette (I), on a :

$$\left.\begin{aligned} S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\cdots\cdots+\frac{A_{m+a-1}A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right] \\ =\frac{\rho}{r^b A_m A_n}\left[\frac{A_{m+b}A_{n+b+1}-A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+2}-A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}\right. \\ \left.+\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+3}-A_{m+b+3}A_{n+b+3}}{r^3}+\text{etc.}\right] \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Les cas particuliers sont :

1° Celui où $a=\omega$, $b=0$;
2° » $S=0$, $b=0$, $a=\omega$;
3° » $\sigma=0$, $b=0$, $a=\omega$.

175. Problème IV. On demande quelle somme S deux époux A, B, âgés de $m$ et $n$ ans doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rente annuelle $\sigma$, la caisse assure au survivant après la mort de l'un des conjoints, un capital $\rho$.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépense.* Soient M couples de conjoints âgés respectivement de $m$ et $n$ ans; on aura les nombres suivants de

| *Couples survivants :* | *Couples dont l'un des conjoints est mort :* |
|---|---|
| A la fin de la 1re année $N_1=N\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n}$ | $N\left[\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)+\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\right]$ (1′) |
| » 2me » $N_2=N\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n}$ | $N_1\left[\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right)+\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)\right]$ (2′) |
| » 3me » $N_3=N\frac{A_{m+3}A_{n+3}}{A_m A_n}$ | $N_2\left[\frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\left(1-\frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\right)+\frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_{m+2}}\right)\right]$ (3′) |
| etc. | etc. |

donc la dépense totale sera

$$\frac{\rho N}{r} \times (1') + \frac{\rho N_1}{r^2} \times (2') + \frac{\rho N_2}{r^3} \times (3') + \text{etc.},$$

et substituant les valeurs de $N_1$, $N_2$, etc., puis divisant par N, on a la dépense cherchée; et par suite

$$\left.\begin{aligned} S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \\ = \frac{\rho}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1}A_n + A_m A_{n+1} - 2A_{m+1}A_{n+1}}{r}\right. \\ \left. + \frac{A_{m+2}A_{n+1} + A_{n+2}A_{m+1} - 2A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\} \quad (D).$$

176. Problème V. On demande quel capital deux personnes A, B, de $m$ et $n$ ans, doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rente $\sigma$ jusqu'à la mort de l'un des conjoints la caisse assure au survivant une rente viagère $\rho$.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépense.* Soient M couples d'individus de $m$ et $n$ ans; ils se répartiront ainsi pour l'évaluation de la dépense :

| | *Nombre des couples* | |
|---|---|---|
| | où l'un, âgé de $m$ ans, est mort, l'autre, » $n$ » vivant, | où l'un, âgé de $n$ ans, est mort, l'autre, » $m$ » vivant, |
| 1re année | $N\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right)$ | $N\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$, |
| 2de » | $N\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right)$ | $N\frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right)$, |
| etc. | etc. | |

Le survivant recevant la rente viagère $\rho$, on a :

Dépense de la 1re année $\frac{N\rho}{r}\left\{\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right) + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right)\right\}$

» » 2me année $\frac{N\rho}{\rho^2}\left\{\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}\right) + \frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_n}\right)\right\}$,

etc.

En ajoutant, et en divisant par N, on a la dépense moyenne; donc

$$\left.\begin{aligned} S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \\ = \frac{\rho}{A_m A_n}\left\{\frac{A_{n+1}A_m + A_{m+1}A_n - 2A_{n+1}A_{m+1}}{r}\right. \\ \left. + \frac{A_{m+2}A_m + A_{m+2}A_n - 2A_{n+2}A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(E).}$$

177. Problème VI. On demande quel capital S deux personnes A, B de $m$ et $n$ ans doivent donner à un établissement, pour qu'en payant annuellement une somme $\sigma$, la caisse assure au couple (AB) une rente $\rho$ qui doit cesser à la mort de l'un des conjoints.

I. La *Recette* est la même que dans le problème précédent.

II. *Dépenses.* De N couples il reste :

A la fin de la 1re année $N\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n}$ couples;

» » 2me » $N\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n}$ couples, etc.

Donc la dépense moyenne se trouve en multipliant ces restes respectivement par $\frac{\rho}{r}$, $\frac{\rho}{r^2}$, etc., ajoutant les produits, puis divisant la somme par N. On a donc

$$\left.\begin{aligned} S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \text{etc.}\right\} \\ = \frac{\rho}{A_m A_n}\left\{\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(F).}$$

178. Problème VII. On demande quelle somme S deux associés A, B de $m$ et $n$ ans doivent donner à un établissement pour qu'en payant une rétribution annuelle $\sigma$, la caisse leur assure une rente viagère $\rho$.

I. La *Recette* est la même que dans le cas précédent.

II. *Dépense.* La probabilité qu'après $t$ ans l'un au moins des associés vit encore est

$$\frac{A_{m+t}}{A_m} + \frac{A_{n+t}}{A_n} - \frac{A_{m+t}A_{n+t}}{A_m A_n}.$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} &S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left(A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \text{etc.}\right) \\ &= \frac{\rho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.}\right) + \frac{\rho}{A_n}\left(\frac{A_{n+1}}{r} + \frac{A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{\rho}{A_m A_n}\left(\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \text{etc.}\right) \end{aligned}\right\} \quad (G).$$

179. Problème VIII. On demande la somme S que deux associés A, B de $m$ et $n$ ans, doivent donner à un établissement, sous la condition que A payant une rétribution annuelle $\sigma$, B reçoive de la caisse à la mort de A, une rente viagère $\rho$, pourvu que le décès de A n'arrive pas avant la $b^{ème}$ année à partir de l'époque du contrat; et en tenant compte des frais d'administration $\delta$, occasionnés par le couple (AB) jusqu'au moment de sa complète extinction.

Solution. La probabilité qu'après $t$ ans B existe encore et que A est mort est :

$$\frac{A_{n+b+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+b+t}}{A_m}\right).$$

On trouve pour la dépense

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\rho}{A_n}\left[\frac{A_{n+b+1}}{r} + \frac{A_{n+b+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \\ &- \frac{\rho}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2} + \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Maintenant évaluons les frais d'administration. Soient :

N le nombre des couples dans les conditions du problème;

$N\frac{A_{m+t}A_{n+t}}{A_m A_n}$, le nombre des couples en vie après $t$ ans;

$N\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+t}}{A_m}\right)$, le nombre des couples où l'individu âgé de $n$ ans vit encore et où celui âgé de $m$ ans est mort.

La somme de ces deux derniers nombres est $N\frac{A_{n+t}}{A_n}$;

Les frais à la fin de la première année sont $\delta\frac{A_{n+1}}{A_n}$;

Les frais à la fin de la deuxième année sont $\delta\frac{A_{n+2}}{A_n}$; etc.

La somme des frais est donc

$$\frac{\delta}{A_n}\left\{\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right\}.$$

La recette est la même que dans le problème précédent; donc

$$\left.\begin{aligned}
&S+\frac{\sigma}{A_mA_n}\left\{A_mA_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right\}\\
&=\frac{\rho}{A_n}\left[\frac{A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\\
&-\frac{\rho}{A_mA_n}\left[\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}+\text{etc.}\right]\\
&+\frac{\delta}{A_n}\left[\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\text{etc.}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(H)$$

180. Problème. IX. Constituer une rente viagère sur plusieurs individus âgés respectivement de

$$m,\quad m+a_1,\quad m+a_1+a_2,\ \text{etc.},$$

de sorte que la rente reste au dernier survivant. Il faut chercher le capital S actuel, équivalent à la rente viagère $\rho$.

Solution. 1° La probabilité qu'a la 1re personne de vivre à l'âge $m+x$, est $\frac{A_{m+x}}{A_m}$.

La probabilité qu'à cet âge elle aura cessé de vivre est $1-\frac{A_{m+x}}{A_m}$.

2° La probabilité pour la 2me personne de vivre à l'âge $m+a_1+x$ est $\frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, et celle qu'elle aura cessé d'exister à cet égard est $1-\frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, etc.

La probabilité qu'aucun des associés n'existera à cette époque est

$$P = \left(1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+a_2+x}}{A_{m+a_1+a_2}}\right)\ldots$$

Donc $1 - P = u$, est la probabilité qu'un de ces individus au moins sera vivant à la fin de la $x^{ème}$ année de la constitution de la rente. On aura par suite

$$S = \rho \sum \frac{u}{r^x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

Autrement : Soient plusieurs individus A, B, C... pour lesquels on a placé une somme S. En vertu de ce placement, ces personnes reçoivent tous les ans une certaine somme qui doit être payée tant que les individus ne seront pas tous morts.

Soit $\sigma$ la somme annuelle à payer et qu'il faut déterminer.

Soient $p_1$, $p_2$, $p_3$ ... les probabilités que ces personnes vivront encore après un temps $t$ quelconque.

Soient $q_1$, $q_2$, $q_3$ ... les probabilités contraires.

La probabilité que toutes sont mortes au bout de ce temps est

$$\varpi_t = q_1 q_2 q_3 \ldots.$$

Les tables de mortalité donnent

$$\varpi_t = \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \varpi_3 \ldots.$$

pour la 1re, la 2e, la 3e, etc. année. On a donc

$$S = \frac{\sigma}{r}\varpi_1 + \frac{\sigma}{r^2}\varpi_2 + \frac{\sigma}{r^2}\varpi_3 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

181. Problème X. Une urne renferme des boules de diverses couleurs (1) (2) ... etc. Une personne A en tire une boule, puis la remet dans l'urne ; le bénéfice de A est $v_1$ si la boule est de la couleur (1) ; $v_2$ si la boule est de la couleur (2) ... etc. Il y a $t$ tirages, et l'on demande la probabilité $u_0$ que dans $t$ tirages le bénéfice de A sera $\sigma = t\mu + l$.

Soient $p_1$, $p_2$ ... etc. les probabilités relatives au tirage d'une boule de couleur (1), (2), etc.

Les bénéfices de A correspondants à ces tirages seront éventuellement

$p_1 v_1$ pour une boule de couleur (1),

$p_2 v_2$ » » » (2),

etc.

On a

$$p_1 + p_2 + \text{etc.} = 1,$$
$$p_1 u^{v_1} + p_2 u^{v_2} + \text{etc.} = \Sigma U_\sigma u^\sigma.$$

Soit $u^{v_n} = e^{\varpi v_n \sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \left[p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \cdots\right]^t = \Sigma U_\sigma e^{\varpi \sigma \sqrt{-1}}$$

d'où

$$U\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\varpi\sigma\sqrt{-1}} X d\varpi$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-t\varpi\sqrt{-1}} \left\{ e^{-\mu\pi\sqrt{-1}} \left(p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)\right\}^t$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-t\varpi\sqrt{-1}} A$$

en posant

$$A = \left\{ e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}} \left(p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)\right\}^t;$$

d'où

$$\text{l. A} = -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[p_1 e^{\varpi v_1 \sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2 \sqrt{-1}} + \text{etc.}\right]$$
$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[ p_1 \left(1 + \varpi v_1 \sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_1^2}{1.2} - \text{etc.}\right) \right.$$
$$\left. + p_2 \left(1 + \varpi v_2 \sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_2^2}{1.2} - \text{etc.}\right) \right]$$
$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left[ p_1 + p_2 + \text{etc.} + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} \right.$$
$$\left. - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{1.2} + \text{etc.} \right]$$
$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1} + t \text{ l.} \left\{ 1 + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} \right.$$
$$\left. - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{1.2} + \text{etc.} \right\}.$$

Développant le logarithme du second membre en série, on trouvera

$$\text{l. A} = t\varpi\sqrt{-1}\left\{p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots - \mu\right\}$$

$$-\frac{\varpi^2 t}{2}\left[(p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots) - (p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots)^2\right].$$

On peut négliger les termes en $\varpi^3$, etc. parce que l'on suppose $t$ très-grand et que l'expression précédente devient un exposant négatif de $e$.

Maintenant posons

$$\mu = p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots$$

et

$$2k^2 = p_1v_1^2 + p_2v^2 + \cdots - (p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots)^2,$$

on aura

$$\text{l. A} = -\varpi^2 tk^2,$$

d'où

$$\text{A} = e^{-tk^2\varpi^2},$$

donc

$$\text{U}_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-[tk^2\varpi^2 + l\varpi\sqrt{-1}]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-[tk^2\varpi^2 + l\varpi\sqrt{-1}]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-tk^2\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi e^{-tk^2\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right)^2}.$$

Soit

$$\tau = k\sqrt{t}\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{tk^2}\right),$$

d'où

$$d\varpi = \frac{d\tau}{k\sqrt{t}},$$

on aura

$$\text{U}\sigma = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}}e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \quad . \quad . \quad (a)$$

182. Problème XI. Chercher la probabilité P que le bénéfice réel de A est compris entre les limites $\pm l$.

Solution : P est évidemment la probabilité résultante obtenue en faisant varier $l$ dans $(a)$ de $-l$ à $+l$, par continuité, ce qui donne :

$$P = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl,$$

expression de la probabilité que la somme des bénéfices est comprise entre

$$\mu t \pm l, \quad \text{ou} \quad t \{ p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots \} \pm l.$$

Soit

$$\frac{l}{2k\sqrt{t}} = r', \quad l = 2kr'\sqrt{t}, \quad dl = 2k\sqrt{t}\,dr',$$

alors

$$\sigma = \mu t + l = \mu t + 2kr'\sqrt{t},$$

donc

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} e^{-r'^2} dr'$$

sera la probabilité que le bénéfice réel de A est compris entre

$$\mu t \pm l, \quad \text{ou} \quad t \{ p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots \} \pm 2k\sqrt{t}\,.r'.$$

183. Problème XII. Le capital S qu'un individu de l'âge $m$ doit donner à un établissement pour en avoir une rente viagère $\rho$ est

$$S = \frac{\rho}{A_m} \left\{ \frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.} \right\}.$$

Si $b$ est l'avantage que l'établissement retire de ce placement pour cet individu, trouver la probabilité que le bénéfice total de l'établissement, pour $t$ individus, est compris entre des limites données.

Solution. Soit

$$p_1 = \frac{A_{m+1}}{A_m}, \quad p_2 = \frac{A_{m+2}}{A_m}, \text{ etc.},$$

$$v_1 = \frac{\rho}{r}, \qquad v_2 = \frac{\rho}{r^2}, \text{ etc.};$$

d'où

$$p_1v_1 + p_2v_2 + \text{etc.} = \frac{\rho}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m} + \frac{\rho}{r^2}\frac{A_{m+2}}{A_m} + \text{etc.},$$

$$2k^2 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\frac{A_{m+1}}{A_m} + \left(\frac{\rho}{r^2}\right)^2\frac{A_{m+2}}{A_m} + \text{etc.} - \left[\frac{\rho}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m} + \frac{\rho}{r^2}\frac{A_{m+2}}{A_m} + \cdots\right]^2.$$

On aura

$$S + b = p_1v_1 + p_2v_2 + \cdots$$

Donc, par le problème précédent,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-r'^2}\,dr'$$

est la probabilité que le bénéfice réel de la caisse est entre

$$tS + t\rho \pm 2k\sqrt{t}\,.\,r' \text{ ou entre } tb \pm 2k\sqrt{t}\,.\,r'.$$

Remarque. Si $t$ est infini, alors $l = 2kr'\sqrt{t}$ est infini et $P = 1$. Le bénéfice de l'établissement est donc alors infini et certain. Donc dans tout établissement d'assurances, si le nombre d'affaires $t$ est grand, et si l'avantage de chacune est $b$, il est très-probable que le bénéfice réel de la caisse est $tb$.

184. Problème XIII. Deux personnes A et B de même âge $m$, ayant la même fortune annuelle, veulent placer en viager chacune un capital $q$; elles peuvent le faire séparément, ou s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit réversible sur celle qui survit à l'autre : quel est le parti le plus avantageux, en ayant égard à la fortune morale?

**Premier mode de placement.**

Solution. Soient :

La fortune annuelle de chaque personne $= 1$ ;
Le capital que chacune veut placer $= q$;
La rente viagère si elles placent séparément $= \beta$;
Leur fortune annuelle dans ce cas $= 1 + \beta$.

La fortune morale $y$ correspondante à la fortune physique $x$ est

$$y = k \log x + \log h,$$

en désignant par $k$ et $h$ des constantes.

Donc la fortune morale correspond à

$$1 + p = k \log (1 + \beta) + \log h.$$

Soit $\frac{A_{m+x}}{A_m} = y_x$ la probabilité pour A de vivre encore $x$ ans; la fortune morale de chacune des deux personnes à la fin de la $x^{ème}$ année est

$$y_x \left[ k \log (1 + \beta) + \log h \right].$$

Soit S la somme des fortunes morales de chaque personne, à la fin de la 1re, de la 2me, de la 3me, etc., année, on aura

$$S = \left[ k \log (1 + \beta) + \log h \right] \Sigma y_x = k \log (1 + \beta] \Sigma y_x + \log h \, \Sigma y_x \ . \quad (I)$$

C'est la fortune morale viagère de chacune, quand elles placent le capital $q$ séparément.

**Second mode de placement.**

Si elles placent le capital $2q$ sur les deux têtes, soit $\beta'$ la rente viagère totale; elles en touchent chacune la moitié ou $\frac{1}{2}\beta'$ tant qu'elles vivent ensemble.

La fortune morale annuelle est

$$k \log \left( 1 + \frac{1}{2} \beta' \right) + \log h.$$

La probabilité qu'elles vivront toutes deux à la fin de la $x^{ème}$ année est

$$y_x^2.$$

La fortune morale viagère de A, relativement à leur existence simultanée, est

$$\left[ k \log \left( 1 + \frac{\beta'}{2} \right) + \log h \right] \Sigma y_x^2.$$

La probabilité que A existe seul à la fin de la $x^{ème}$ année est

$$y_x - y_x^2.$$

La fortune morale viagère correspondante qui rend la fortune annuelle égale à $1 + \beta'$, après la mort de B, est

$$\left[k \log (1 + \beta') + \log h\right] \Sigma (y_x - y_x^2).$$

Soit S′ la fortune morale viagère de A, relative au second mode de placement, on aura

$$\left.\begin{aligned} S' &= \left[ k \log \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \log h \right] \Sigma y_x^2 + \left[k \log + (1 \beta') + \log h\right] \Sigma (y_x - y_x^2) \\ &= k \log \left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) \Sigma y_x^2 + k \log (1 + \beta') \left[\Sigma y_x - \Sigma y_x^2\right] + \log h \Sigma y_x . \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Selon que $S \gtrless S'$, le premier ou le second mode sera le plus avantageux.

Pour cette comparaison, il faut d'abord exprimer $\beta'$ en fonction de $\beta$. Or on a

$$q = \frac{\beta}{A_m} \left[ \frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \text{etc.} \right] = \beta \Sigma \frac{y_x}{r^x} \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

où, $\rho$ étant l'intérêt de 1,

$$r = 1 + \rho.$$

On a aussi :

$$2q = \frac{\beta'}{A_m} \left\{ \frac{2A_{m+1} - A_{m+1}^2}{r} + \frac{2A_{m+2} - A_{m+2}^2}{r^2} + \text{etc.} \right\} = \beta' \Sigma \frac{2y_x - y_x^2}{r^x} \quad (2').$$

Des équations (1′) et (2′), on déduit

$$\beta' = 2\beta \frac{\sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Pour faciliter la comparaison de S et de S′, supposons que $\beta$ et $\beta'$ soient des fractions très-petites, on aura :

$$\Sigma y_x \log(1+\beta) = \beta \Sigma y_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\sum y_x^2 \log\left(1+\frac{\beta'}{2}\right) + [\Sigma y_x - \Sigma y_x^2]\log(1+\beta') = \frac{\beta'}{2}\Sigma y_x^2$$

$$+ \beta'\Sigma y_x - \beta'\Sigma y_x^2 = \frac{\beta'}{2}[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2].$$

Donc, par la formule (3′),

$$\left.\begin{aligned} &\sum y_x^2 \log\left(1+\frac{\beta'}{2}\right) + [\Sigma y_x - \Sigma y_x^2]\log(1+\beta') \\ &= \frac{2\beta\sum\frac{y_x}{r^x}}{2\sum\frac{2y_x - y_x^2}{r^x}}[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2] = \frac{\beta[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2]\sum\frac{y_x}{r^x}}{\sum\frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} \end{aligned}\right\}. \quad (\beta)$$

Cela posé, le second mode de placement sera le plus avantageux si l'on a $S' > S$, ou

$$\Sigma y_x^2 \log\left(1+\frac{\beta'}{2}\right) + [\Sigma y_x \Sigma y_x^2]\log(1+\beta') > \Sigma y_x \log(1+\beta),$$

donc par suite des formules $(\alpha)$ et $(\beta)$, quand on aura

$$\frac{[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2]\sum\frac{y_x}{r^x}}{\sum\frac{2y_x - y_x^2}{r^x}} > \Sigma y_x,$$

ou

$$[2\Sigma y_x - \Sigma y_x^2]\sum\frac{y_x}{r^x} > \Sigma y_x\left[2\sum\frac{y_x}{r^x} - \sum\frac{y_x^2}{r^x}\right],$$

ou

$$\frac{2\Sigma y_x}{\Sigma y_x} - \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x} > \frac{2\sum\frac{y_x}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}} - \frac{\sum\frac{y_x^2}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}},$$

ou

$$2 - \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x} > 2 - \frac{\sum \frac{y_x^2}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}},$$

ou bien enfin

$$\frac{\sum \frac{y_x^2}{r^x}}{\sum \frac{y_x}{r^x}} > \frac{\Sigma y_x^2}{\Sigma y_x}.$$

Cette relation est généralement vraie, puisque $\frac{1}{r} < 1$ ; donc le placement en viager sur deux têtes est le plus avantageux.

# CHAPITRE X.

## DE LA PROBABILITÉ DES TÉMOIGNAGES ET DES JUGEMENTS.

### § I. DES TÉMOIGNAGES.

185. Nous nous proposons de déterminer quelle est la probabilité qu'un fait, qui est rapporté par témoignage, a eu réellement lieu; et nous distinguerons les cas suivants :

I. Le fait est rapporté par un seul témoin. Quelle est la probabilité de son existence : 1° dans l'hypothèse que le fait est ordinaire; 2° dans celle qu'il est extraordinaire?

II. Le fait est rapporté par plusieurs témoins, 1° successivement; 2° par tradition successive.

Pour pouvoir appliquer le calcul à cet ordre de problèmes, nous aurons à distinguer dans chaque témoin la personne intelligente et la personne voulante. La première sera dans le vrai ou dans le faux, la seconde sera véridique ou non.

Nous désignerons par $p$ la probabilité que le témoin ne trompe pas; par $r$ celle qu'il ne se trompe pas; $1 - p$ sera la probabilité qu'il trompe; $1 - r$ celle qu'il se trompe.

#### I. LE FAIT EST RAPPORTÉ PAR UN SEUL TÉMOIN.

##### 1° Il est ordinaire.

186. PREMIER PROBLÈME. On extrait un numéro d'une urne qui en renferme $n$; un témoin oculaire affirme que le numéro $i$ est sorti : quelle est la probabilité que ce fait a eu lieu?

Nous pouvons faire les quatre hypothèses suivantes :

1). Le témoin ne trompe pas, ni ne se trompe.

2). Le témoin ne trompe pas et se trompe.

3). Le témoin trompe et ne se trompe pas.

4). Le témoin trompe et se trompe.

D'après le théorème de Bayes, la probabilité cherchée P est égale à la somme des probabilités dues aux hypothèses favorables à la vérité de la déposition divisée par la somme des probabilités dues à toutes les hypothèses.

*Probabilité due à la première hypothèse.*

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $p$ que le témoin ne trompe pas;

2° » » $r$ » ne se trompe pas;

3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie du numéro $i$.

La probabilité due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = \frac{pr}{n}.$$

Cette première hypothèse est favorable à la vérité de la déposition.

*Probabilité due à la deuxième hypothèse.*

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $p$ que le témoin ne trompe pas;

2° » » $1 - r$ » se trompe;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro $i$ n'est pas sorti;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ que, parmi les numéros non sortis, l'erreur du témoin lui a fait choisir le numéro $i$; car, puisqu'il se trompe, au lieu de $i$, c'est un autre numéro qui est sorti et qu'il prend pour $i$; et il doit le choisir parmi les $n - 1$ numéros non sortis de l'urne.

La probabilité due à la deuxième hypothèse est donc

$$\Pi_2 = p(1-r)\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{p(1-r)}{n}.$$

Cette deuxième hypothèse n'est pas favorable à la vérité de la disposition.

*Probabilité due à la troisième hypothèse.*

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin se trompe ;

2° » » $r$ » ne se trompe pas ;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro $i$ n'est pas sorti ;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ qu'il a choisi le numéro $i$ parmi $n-1$ numéros non sortis.

La probabilité due à la troisième hypothèse est donc

$$\Pi_3 = \frac{(1-p)r}{n}.$$

Cette troisième hypothèse n'est pas favorable à la vérité de la déposition.

*Probabilité due à la quatrième hypothèse.*

Dans cette hypothèse il y a deux cas à distinguer.

*Premier cas.* Le numéro $i$ est sorti ; soit pour ce cas $\Pi_4$ la probabilité due à la quatrième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe ;

2° » » $(1-r)$ qu'il se trompe ;

3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro $i$ est sorti ;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ du choix que le témoin fait de $i$ ; car il croit qu'un autre numéro est sorti, et choisit $i$ parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis.

On aura donc

$$\Pi_4 = (1-p)(1-r)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Cette probabilité est favorable à la vérité de la déposition.

*Second cas.* Le numéro $i$ n'est pas sorti; soit pour ce cas $\Pi_5$ la probabilité due à la quatrième hypothèse.

Cette probabilité se compose du concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe;

2° » » $1-r$ » » se trompe;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro $i$ n'est pas sorti;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ qu'il choisira $i$ parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis.

On aura donc

$$\Pi_5 = (1-p)(1-r)\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{(1-p)(1-r)}{n}.$$

Cette probabilité n'est pas favorable à la vérité de la déposition.

Appliquant maintenant le théorème de Bayes, nous trouverons

$$P = \frac{\Pi_1 + \Pi_4}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5}$$

$$= \frac{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{p(1-r)}{n} + \dfrac{(1-p)r}{n} + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)} + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n}}$$

$$= \frac{pr + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n-1}}{1 + \dfrac{(1-p)(1-r)}{n-1}}.$$

Si le témoin ne se trompe pas, on a $r = 1$ et $P = p$;

» » ne trompe pas, on a $p = 1$ et $P = r$;

Si $n$ est très-grand, on a, à peu près, $P = p.r$.

**2° Le fait, rapporté par un seul témoin, est extraordinaire.**

187. Deuxième problème. Une urne renferme $n - 1$ boules noires et une blanche; on en extrait une boule, et un témoin affirme qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que ce fait a eu lieu?

Nous ferons les mêmes hypothèses que dans le problème précédent.

*Première hypothèse.* Le témoin ne trompe pas, ni ne se trompe.

La probabilité due à cette première hypothèse se compose :

1° De la probabilité $p$ que le témoin ne trompe pas;

2° » » $r$ » » ne se trompe pas;

3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie de la boule blanche.

La probabilité $\Pi_1$ due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = \frac{pr}{n}.$$

*Deuxième hypothèse.* Le témoin ne trompe pas et se trompe.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $p$ que le témoin ne trompe pas;

2° » » $(1-r)$ qu'il se trompe;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ de la sortie d'une boule noire.

La probabilité $\Pi_2$ due à la deuxième hypothèse est donc

$$\Pi_2 = \frac{p(1-r)(n-1)}{n}.$$

*Troisième hypothèse.* Le témoin trompe et ne se trompe pas.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin trompe;

2° » » $r$ qu'il ne se trompe pas;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ de la sortie d'une boule noire.

La probabilité $\Pi_3$ due à cette troisième hypothèse est donc

$$\Pi_3 = (1-p)\,r\,\frac{n-1}{n}.$$

*Quatrième hypothèse.* Le témoin trompe et se trompe.

Dans ce cas, il est évident que la boule blanche est sortie.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $(1-p)$ que le témoin se trompe;

2° » » $1-r$ » » trompe;

3° » » $\frac{1}{n}$ de la sortie de la boule blanche.

La probabilité $\Pi_4$ due à cette quatrième hypothèse est donc

$$\Pi_4 = \frac{(1-p)\,(1-r)}{n}.$$

Comme la première et la quatrième hypothèse sont favorables à la vérité de la déposition, nous aurons en vertu du théorème de Bayes

$$P = \frac{\Pi_1 + \Pi_4}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4}$$

$$= \frac{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{(1-p)\,(1-r)}{n}}{\dfrac{pr}{n} + \dfrac{p(1-r)\,(n-1)}{n} + \dfrac{(1-p)\,r(n-1)}{n} + \dfrac{(1-p)\,(1-r)}{n}}.$$

Faisons $pr + (1-p)\,(1-r) = q$; $q$ sera la probabilité que le témoin énonce un fait vrai, soit qu'il ne trompe pas, ni ne se trompe, soit qu'il trompe et se trompe; alors P s'écrira

$$P = \frac{q}{q + (1-q)\,(n-1)}; \quad 1 - P = \frac{(1-q)\,(n-1)}{q + (1-q)\,(n-1)}.$$

Si $n$ est très-grand, la déposition du témoin deviendra très-peu probable, à moins que $q$ ne soit très-rapproché de l'unité; dans ce cas la sortie de la boule blanche est un fait extraordinaire; et l'on voit que cette circonstance affaiblit en général la probabilité de la vérité de la déposition.

188. Troisième problème. Une urne renferme un très-grand nombre $n$ de boules blanches; une seconde urne le même nombre de noires; on extrait de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre; puis on extrait une boule de cette dernière.

Un témoin du premier tirage affirme qu'une blanche est sortie; un témoin du second tirage affirme également qu'il a vu sortir une blanche; quelle est la probabilité qu'une boule blanche est effectivement sortie dans les deux tirages?

Soit $q$ la probabilité que le premier témoin énonce la vérité, c'est-à-dire, en nous conformant aux notations précédentes

$$q = pr + (1 - p)(1 - r).$$

Désignons par $q'$ la même probabilité relativement au second témoin.

Nous pouvons faire les quatre hypothèses suivantes :

1). Le premier et le second témoin disent la vérité.
2). » témoin dit la vérité, le second ment.
3). » » ment, le second dit la vérité.
4). » et le second témoin mentent.

*Première hypothèse.* Les deux témoins disent la vérité.

La probabilité du fait observé, due à cette hypothèse, se compose :

1° De la probabilité $q$ que le premier témoin dit la vérité;

2° » » $q'$ » second témoin dit la vérité;

3° » » $\frac{1}{2}$ qu'une boule blanche est sortie au premier tirage; car la boule extraite peut être sortie également de la première ou de la seconde urne;

4° De la probabilité $\frac{1}{n-1}$ de l'extraction d'une blanche de la seconde urne, puisqu'il a été extrait une blanche de la première, et que la seconde renferme par suite $n$ noires, plus la blanche qu'on y a ajoutée.

La probabilité due à la première hypothèse est donc

$$\Pi_1 = qq' \frac{1}{2(n+1)}.$$

*Deuxième hypothèse.* Le premier témoin dit la vérité, le second ment.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $q$ que le premier témoin dit la vérité ;

2° » » $1-q'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule blanche a été extraite de la première urne ;

4° De la probabilité $\frac{n}{n+1}$ qu'on a extrait une boule noire de la seconde urne.

La probabilité $\Pi_2$ due à la deuxième hypothèse sera donc

$$\Pi_2 = q(1-q')\frac{n}{2(n+1)}.$$

*Troisième hypothèse.* Le premier témoin ment, le second dit la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-q$ que le premier témoin ment ;

2° » » $q'$ que le second témoin dit la vérité ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule a été extraite de la seconde urne ;

4° De la probabilité $\frac{n}{n+1}$ qu'on a extrait une boule blanche de la première urne.

La probabilité $\Pi_3$ due à la troisième hypothèse sera donc

$$\Pi_2 = (1-q)q'\frac{n}{2(n+1)}.$$

*Quatrième hypothèse.* Aucun des deux témoins ne dit la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-q$ que le premier témoin ment ;

2° » » $1-q'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{1}{2}$ que la boule a été extraite de la seconde urne ;

4° De la probabilité $\frac{1}{n+1}$ qu'on a extrait une boule noire de la première urne au second tirage.

La probabilité due à la quatrième hypothèse sera donc

$$\Pi_4 = \frac{(1-q)\,(1-q')}{2(n+1)}.$$

La première hypothèse seule étant favorable à la vérité de la déposition, nous aurons pour la probabilité cherchée

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4}$$

$$= \frac{\dfrac{qq'}{2(n+1)}}{\dfrac{qq'}{2(n+1)} + \dfrac{q(1-q')n}{2(n+1)} + \dfrac{(1-q)q'n}{2(n+1)} + \dfrac{(1-q)\,(1-q')}{2(n+1)}}$$

$$= \frac{qq'}{qq' + n\left[q(1-q') + q'(1-q)\right] + (1-q)\,(1-q')}.$$

C'est la probabilité de l'existence de ce fait qu'une boule blanche aurait été extraite au premier tirage, et aurait reparu au second.

On voit qu'en général cette probabilité devient très-faible quand $n$ devient très-grand, ou que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des deux témoignages est fort affaiblie quand ce fait est extraordinaire.

### II. LE FAIT EST RAPPORTÉ PAR PLUSIEURS TÉMOINS.

—

#### 1° Simultanément.

189. QUATRIÈME PROBLÈME. Une urne renferme $n$ numéros; on en extrait un, et deux témoins affirment que le numéro $i$ est sorti. On demande quelle est la probabilité que ce fait est réellement arrivé.

Admettons, pour simplifier le problème, que les deux témoins ne se soient pas trompés; et soient $p$ et $p'$ respectivement les

probabilités qu'ils disent la vérité. Il n'y aura que deux hypothèses possibles :

1). Ils disent la vérité.

2). Ils mentent.

*Première hypothèse.* Les témoins disent la vérité.

La probabilité due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $p$ que le premier témoin dit la vérité;

2° » » $p'$ que le second témoin dit la vérité;

3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro $i$ est sorti.

Nous aurons donc

$$\Pi_1 = \frac{pp'}{n}.$$

*Deuxième hypothèse.* Les témoins mentent.

La probabilité $\Pi_2$ due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment;

2° » » $1-p'$ que le second témoin ment;

3° » » $\frac{n-1}{n}$ que le numéro $i$ n'est pas sorti.

4° De la probabilité $\frac{1}{(n-1)^2}$ que les deux témoins font à la fois le même choix du numéro $i$ parmi les $n-1$ numéros qui ne sont pas sortis.

Nous aurons donc

$$\Pi_2 = (1-p)(1-p')\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}.$$

Comme la première hypothèse seule est favorable à la vérité de la déposition, la probabilité P sera

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2} = \frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p)(1-p')}{pp'}} = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)pp'}}.$$

La probabilité contraire sera

$$1 - P = \frac{1}{1 + \frac{n(n-1)pp'}{(1-p)(1-p')}}.$$

Si $n$ est très-grand, P s'approche beaucoup de l'unité; il est donc très-probable dans ce cas que le numéro $i$ est sorti. La raison en est que, si les témoins mentent, il est fort difficile qu'ils portent leur choix sur le même numéro.

Si $n = 2$, la sortie du numéro $i$ aura pour probabilité $\frac{1}{2}$; et la probabilité qu'elle a eu lieu, d'après l'attestation de deux témoins, est

$$P = \frac{pp'}{pp' + \frac{1}{2}(1-p)(1-p')}.$$

Cette formule exprime la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence et la non-existence de ce fait sont également probables.

Si les deux témoins sont également véridiques, on a $p = p'$ et cette formule devient

$$P = \frac{p^2}{p^2 + \frac{1}{2}(1-p)^2}.$$

En général, si $s$ témoins également véridiques affirment un fait dont l'existence et la non-existence sont également probables, la probabilité de ce fait résultant de leurs témoignages sera

$$P = \frac{p^s}{p^s + \frac{1}{2}(1-p)^s}.$$

190. Cinquième problème. Une urne renferme $n$ numéros; un premier témoin affirme que le numéro $i$ est sorti; un second témoin affirme que c'est $i'$; quelle est la probabilité que $i$ est réellement sorti?

Soient, comme précédemment, $r = r' = 1$; $p$ la probabilité que le premier témoin dit la vérité; $p'$ la probabilité que le second la dit.

On pourra faire les trois hypothèses suivantes :

1). Le premier témoin dit la vérité, le second ment.
2). » » ment, le second dit la vérité.
3). Les deux témoins mentent.

*Première hypothèse.* Le premier témoin dit la vérité, le second ment.

La probabilité $\Pi_1$ due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $p$ que le premier témoin dit la vérité ;

2° » » $1-p'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro $i$ est sorti ;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ que le second témoin a fait choix du numéro $i'$ parmi les $n-1$ numéros différents de $i$.

On aura donc

$$\Pi_1 = \frac{p(1-p')}{n(n-1)}.$$

*Deuxième hypothèse.* Le premier témoin ment, le second dit la vérité.

La probabilité $\Pi_2$ due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment.

2° » » $p'$ que le second témoin dit la vérité.

3° » » $\frac{1}{n}$ que le numéro $i'$ est sorti ;

4° » » $\frac{1}{n-1}$ que le premier témoin a fait choix du numéro $i$.

On aura donc

$$\Pi_2 = \frac{(1-p')p'}{n(n-1)}.$$

*Troisième hypothèse.* Les deux témoins mentent à la fois.

La probabilité $\Pi_3$ due à cette hypothèse se compose :

1° De la probabilité $1-p$ que le premier témoin ment ;

2° » » $1-p'$ que le second témoin ment ;

3° » » $\frac{n-2}{n}$ qu'aucun des n$^{os}$ $i$ et $i'$ n'est sorti ;

4° » » $\frac{1}{(n-1)^2}$ que le premier témoin choisit $i$ et le second $i'$.

On aura donc

$$\Pi_3 = \frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}.$$

La première hypothèse seule étant favorable à la vérité de la déposition du premier témoin, la probabilité cherchée sera

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

$$= \frac{\dfrac{p(1-p')}{n(n-1)}}{\dfrac{p(1-p')}{n(n-1)} + \dfrac{(1-p)p'}{n(n-1)} + \dfrac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}}$$

$$= \frac{p(1-p')(n-1)}{p+p'-2+n(1-pp')}.$$

Si $n = 2$, l'existence de chacun des faits attestés est aussi probable que sa non-existence; et si de plus $p = p' = \frac{1}{2}$, la probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$; en effet, alors les deux témoignages se détruisent mutuellement.

#### 2° Témoignage traditionnel de $r$ témoins successifs.

191. Sixième problème. Un témoin présent au tirage affirme avoir vu sortir d'une urne, qui renferme $n$ numéros, le numéro $i$; ce même fait a été confirmé par une chaîne traditionnelle de $r$ témoins : chercher la probabilité que le numéro $i$ est effectivement sorti.

Désignons par $y_r$ la probabilité cherchée; de sorte que l'addition d'un nouveau témoignage la changera en $r + 1$.

Cette dernière probabilité se compose de la somme des deux probabilités suivantes :

*a*). De la probabilité P que le numéro $i$ était sorti et que le nouveau témoin a dit la vérité.

*b*). De la probabilité que le numéro $i$ n'était pas sorti et que le nouveau témoin, quoique ne disant pas la vérité, a fait choix du numéro $i$.

La probabilité P est due au concours des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $p_{r+1}$ que le nouveau témoin dit la vérité;

2° » » $y_r$ que le numéro $i$ est sorti.

On a donc

$$P = p_{r+1} y_r.$$

La probabilité Q se compose des probabilités suivantes :

1° De la probabilité $1 - p_{r+1}$ que le nouveau témoin ment;

2° » » $1 - y_r$ que le numéro $i$ n'est pas sorti;

3° » » $\frac{1}{n-1}$ du choix que le témoin a fait du numéro $i$.

On a donc

$$Q = \frac{(1 - p_{r+1})(1 - y_r)}{n - 1},$$

et par suite

$$y_{r+1} = P + Q = p_{r+1} y_r + \frac{(1 - p_{r+1})(1 - y_r)}{n - 1} = \frac{n p_{r+1} y_r - p_{r+1} - y_r + 1}{n - 1};$$

d'où, en écrivant $y_r + \Delta y_r$ au lieu de $y_{r+1}$, et $p_r + \Delta p_r$ au lieu de $p_{r+1}$ :

$$(n - 1)\, \Delta y_r = (n y_r - 1)(p_r + \Delta p_r - 1).$$

L'intégrale de cette équation aux différences est

$$y_r = \frac{1}{n} + C \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n - 1)^r},$$

C étant une constante qui se détermine par cette condition que la probabilité du fait en vertu du premier témoignage est $p_1$, de sorte que $y_1 = p_1$, d'où

$$p_1 = \frac{1}{n} + C \frac{n p_1 - 1}{n - 1}, \quad \text{et} \quad C = \frac{n - 1}{n}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n - 1}{n} \frac{(np_1 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n - 1)^r}.$$

Si $n = \infty$, cette valeur de $y_r$ devient

$$y_r = p_1 \dots p_r.$$

Si $n = 2$, ou si l'existence et la non-existence du fait sont également probables,

$$y_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1) \dots (2p_r - 1).$$

En général, à mesure que la chaîne des traditions se prolonge, la probabilité qui en résulte se rapproche indéfiniment de la limite $\frac{1}{n}$, qui est la probabilité à priori de la sortie du numéro $i$. Le terme

$$\frac{n-1}{n} \frac{(np_1 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n-1)^r}$$

est donc ce que la chaîne des témoignages ajoute à cette dernière probabilité.

On voit par là que la probabilité d'un fait rapporté par des traditions successives s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge.

### § 2. PROBABILITÉ DES JUGEMENTS.

192. Il s'agit de déterminer la probabilité de la bonté d'un jugement rendu par un tribunal dans les différentes circonstances qui peuvent se présenter. Nous nous bornerons à l'examen des cas suivants :

Premier problème. Si $p$ désigne la probabilité que chacun des juges prononce la vérité, quelle est la probabilité de la bonté du jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires à l'unanimité des $r$ juges qui le composent?

Si $r$ témoins d'une égale véracité affirment un fait dont l'existence est aussi probable que sa non-existence, la probabilité de ce fait, résultant de leur témoignage, sera (voir n° 189)

$$\mathrm{P} = \frac{p^r}{p^r + (1-p)^r} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Or on peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contraires au résultat des témoignages de plusieurs personnes relativement à l'extraction d'un numéro d'une

urne qui n'en renferme que deux; de sorte que la formnle (1) exprime la probabilité cherchée. On peut déterminer $p$ par l'observation du rapport des jugements rendus à l'unanimité par le tribunal au nombre total des jugements. Lorsque ce nombre est très-grand, en le désignant par $n$, et par $i$ le nombre des jugements rendus à l'unanimité, on aura, à fort peu près (*),

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité $p$ des juges.

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4i-n}{12n}};$$

nous adopterons le signe +; car il est naturel de supposer à chaque juge une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugements rendus par le tribunal a été rendue à l'unanimité, alors $\frac{i}{n} = \frac{1}{2}$, et $p = 0{,}789$.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera (**)

$$1 - \frac{n}{i}(1-p)^r.$$

En général, on voit que cette probabilité est d'autant plus grande que $r$ est un plus grand nombre, et que les valeurs de $p$ et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

Deuxième problème. Trouver la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté d'un jugement en matière criminelle prononcé par $p+q$ juges, dont $p$ condamnent et $q$ absolvent l'accusé.

Un accusé ne peut être condamné que quand la probabilité $a$

(*) Voir Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, livre II, n° 50.
(**) *Ibid.*

de son délit est telle que la société ait plus à craindre des attentats qui pourraient résulter de son acquittement que de l'erreur du tribunal. Nous supposerons donc que le juge qui condamne l'accusé prononce par là que la probabilité de son délit est au moins égale à $a$.

Désignons par $n$ la probabilité que le juge ne se trompe pas, probabilité que nous supposons égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$ et variant par des degrés infiniments petits, égaux à $dx$, et également possibles; $1 - x$ sera la probabilité que le juge se trompe, $x^q$, celle que les $q$ juges qui absolvent ne se trompent pas; $(1 - x)^p$, celle que les $p$ juges qui le condamnent se trompent; $x^p$, qu'ils ne se trompent pas; enfin, $(1 - x)^q$ celle que les $q$ juges qui l'absolvent se trompent.

$x^p (1 - x)^q$ exprimera le nombre des chances favorables à la condamnation; $x^q (1 - x)^p$ celles favorables à l'acquittement.

Si $x$ était certain, et que l'accusé fût condamné

$$\varpi = \frac{x^p (1 - x)^q}{x^p (1 - x)^q + x^q (1 - x)^p},$$

exprimerait la probabilité de la bonté de ce jugement.

Mais la cause $x$ n'étant que probable, nous avons à multiplier $\varpi$ par la probabilité de $x$ déduite de l'observation; et comme $x$ peut varier par degrés infiniment petits, nous désignerons par $\varphi(x)\,dx$ la probabilité d'une de ses valeurs.

L'événement observé, c'est que $p$ juges ont condamné, et $q$ absous; par suite

$$\varphi(x)\,dx = \frac{x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q}{\int_{1/2}^{1} \left[x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q\right] dx}\,dx.$$

La probabilité de la bonté du jugement, eu égard à l'une des valeurs de $x$, sera donc

$$\varpi\varphi(x)\,dx = \frac{x^p (1 - x)^q\,dx}{\int_{1/2}^{1} \left[x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q\right] dx}.$$

On simplifie le dénominateur en remarquant que, si l'on fait $1-x=y$, on obtient :

$$\int_{1/2}^{1}(1-x)^p\,x^q dx=-\int_{1/2}^{0}y^p(1-y)^q\,dy=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^p(1-x)^q\,dx;$$

de sorte que l'expression précédente devient

$$\varpi_{\frac{1}{2}}(x)\,dx=\frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}.$$

Eu égard à toutes les valeurs de $x$ cette probabilité se changera en

$$Q=\frac{\int_{1/2}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}{\int_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx},$$

La probabilité contraire, c'est-à-dire celle de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement sera

$$P=1-Q=1-\frac{\int_{1/2}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}{\int_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx};$$

ou bien

$$P=\frac{\int_{0}^{1/2}x^p(1-x)^q\,dx}{\int_{0}^{1}x^p(1-x)^q\,dx}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

comme on s'en assure aisément par des transformations analogues aux précédentes.

Effectuons les intégrations indiquées, et faisons, à cet effet, $y=2x$; nous aurons :

$$\int_{0}^{1/2}x^p(1-x)^q\,dx=\frac{1}{2^{p+q+1}}\int_{0}^{1}y^p\left[1+(1-y)\right]^q dy$$

$$=\frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\int_{0}^{1}y^p dy+q\int_{0}^{1}y^p(1-y)\,dy+\frac{q(q-1)}{1.2}\int_{0}^{1}y^p(1-y)^2 dy+\cdots+\int_{0}^{1}y^p(1-y)^q dy\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\frac{1}{p+1}+q\,\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(2)}{\Gamma(p+3)}+\frac{q(q-1)}{1.2}\,\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(3)}{\Gamma(p+4)}+\cdots+\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\frac{1}{p+1}+\frac{q}{(p+1)(p+2)}+\frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\cdots+\frac{q\ldots2.1}{(p+1)\ldots(p+q+1)}\right\}.$$

De plus nous savons que

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1 \ldots q}{(p+1)\ldots(p+q+2)}.$$

Donc enfin nous aurons

$$P = \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ 1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1.2} + \cdots + \frac{(p+q+1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots q} \right\}.$$

Dans le cas ordinaire de $p+q=12$, on obtient pour les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4, 5 de $q$ :

$$P = \frac{1}{8192}, \quad \frac{14}{8192}, \quad \frac{92}{8192}, \quad \frac{378}{8192}, \quad \frac{1093}{8192}, \quad \frac{2380}{8192},$$

formule qui exprime respectivement la probabilité de l'erreur des condamnations par les 12 jurés

| | | | |
|---|---|---|---|
| Par | 11 | voix contre | 1, |
| » | 10 | » | 2, |
| » | 9 | » | 3, |
| » | 8 | » | 4, |
| » | 7 | » | 5. |

A la majorité de 7 contre 5, cette probabilité est presque égale à $\frac{2}{7}$ ; de sorte que sur un très-grand nombre d'accusés condamnés à cette majorité, il serait très-probable que les $\frac{2}{7}$ n'auraient pas dû l'être.

La majorité d'une seule voix dans un tribunal nombreux indique donc que l'affaire dont il s'agit est à peu près douteuse ; la condamnation de l'accusé serait alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence.

L'unanimité donnerait une très-grande probabilité à la bonté du jugement ; mais si on l'exigeait, trop de coupables seraient acquittés. On doit donc, ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner si le tribunal est plus nombreux.

La table suivante justifie ces principes, qui sont du reste suggérés par le simple bon sens :

| $p+q$ | $p$ | $q$ | $\frac{p}{q}$ | P |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 3,000 | 0,187 |
| 6 | 4 | 2 | 2,000 | 0,227 |
| 10 | 6 | 4 | 1,500 | 0,274 |
| 16 | 9 | 7 | 1,285 | 0,314 |

Dans cette table, la différence entre la majorité qui condamne et la minorité qui absout est supposée égale partout à 2; de sorte que pour un tribunal très-nombreux, les voix qui condamnent et celles qui absolvent sont à peu près en nombre égal; et l'on voit par la dernière colonne que la probabilité de l'erreur à craindre s'accroît à mesure que le nombre des juges augmente, quand la majorité reste la même. Si donc ce nombre augmente, on doit augmenter proportionnellement la majorité requise pour la condamnation. — Ce principe est vérifié par la table suivante :

| $p+q$ | $p$ | $q$ | $\frac{p}{q}$ | P |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 1 | 0,313 |
| 6 | 4 | 2 | 2 | 0,227 |
| 10 | 7 | 3 | 2,3 | 0,113 |
| 18 | 14 | 4 | 3,5 | 0,009 |

Dans cette table la majorité requise augmente avec le nombre des juges, et l'on voit que la probabilité de l'erreur à craindre diminue en même temps que les nombres de l'avant-dernière colonne augmentent.

Voici enfin la table qui se rapporte au cas de l'unanimité des voix :

| $p+q$ | P |
|---|---|
| 3 | 0,0625.. |
| 6 | 0,0078.. |
| 10 | 0,0005.. |
| 18 | 0,0000.. |

et l'on voit que la probabilité de la bonté du jugement est dans ce cas d'autant plus grande que le tribunal est plus nombreux.

### III. DES DÉCISIONS A LA MAJORITÉ DES VOIX.

La valeur et la sûreté d'une décision prise à la majorité des voix dépendent d'abord du rapport de la majorité à la minorité, ensuite de l'intelligence et de la moralité des votants.

C'est à tort que l'on n'a souvent pas égard à la première de ces conditions, puisqu'on décide même à une seule voix de majorité; dans ce cas, si le nombre des votants est $n+1$, la majorité sera composée de $\frac{n}{2}+1$ voix, et la minorité de $\frac{n}{2}$; toutes choses égales d'ailleurs, comme le rapport $\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ est à peu près égal à $\frac{1}{2}$ si $n$ est un peu considérable, la probabilité que l'opinion de la majorité est la vraie est donc très-peu supérieure à $\frac{1}{2}$; tandis qu'elle serait égale à 1 dans le cas de l'unanimité. On voit que ce n'est que le rapport de la majorité à la minorité qui doit décider, entre ces deux cas extrêmes, du degré de probabilité du résultat du vote.

Dans plusieurs assemblées ou tribunaux on fixe une majorité minimum qui doit être atteinte pour que la décision soit valable. Il faut alors, pour la sûreté des décisions, que le nombre des votants soit peu considérable, comme on le voit par la table suivante :

| Nombre DES VOTANTS. | MAJORITÉ. | MINORITÉ. | RAPPORT. |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 1 : 3 |
| 6 | 4 | 2 | 1 : 2 |
| 8 | 5 | 3 | 1 : 1,67 |
| 10 | 6 | 4 | 1 : 1,50 |
| 26 | 14 | 12 | 1 : 1,17 |
| 50 | 26 | 24 | 1 : 1,08 |
| 100 | 51 | 49 | 1 : 1,04 |

La différence minimum entre la majorité et la minorité est supposée égale à 2 dans cette table; et l'on voit qu'à mesure que

le nombre des votants augmente, le rapport de la première à la seconde tend vers l'unité, de sorte que les décisions prises deviennent de plus en plus incertaines.

D'autre part, une assemblée peu nombreuse offrant moins de garanties qu'une assemblée nombreuse, on devra choisir, pour fixer la majorité minimum, un rapport constant entre la majorité et la minorité; ainsi, une décision serait valable si elle était prise à la majorité d'un nombre de voix au moins égal à une fois, deux fois, etc., celui des voix de la minorité. Dans ce cas les décisions seront d'autant plus sûres que l'assemblée sera plus nombreuse, comme le montre la table ci-jointe :

| Nombre DES VOTANTS. | MAJORITÉ. | MINORITÉ. | DIFFÉRENCE. | RAPPORT. |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 2 | 1 : 3 |
| 12 | 9 | 3 | 6 | » |
| 24 | 18 | 6 | 12 | » |
| 164 | 123 | 41 | 82 | » |

On voit par l'avant-dernière colonne que la différence entre la majorité et la minorité augmente avec le nombre des votants, et par suite aussi la sûreté de l'opinion admise.

Il résulte de ce qui précède :

1° Qu'il n'est pas prudent de décider, dans les assemblées délibérantes, à la simple majorité;

2° Qu'il convient de fixer une majorité minimum pour la validité des décisions;

3° Que pour fixer cette majorité, l'on ne doit pas prendre un rapport arithmétique, mais bien un rapport géométrique entre le nombre des voix de la majorité et celui des voix de la minorité.

Quant à l'intelligence et à la moralité des votants, il serait difficile de les introduire dans le calcul.

# ADDITIONS.

# I

## THÉORIE DES ERREURS D'APRÈS LAPLACE.

### 1. Inconnue donnée par $s$ observations.

Problème I. Déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs d'un nombre très-grand $s$ d'observations est $\omega = l + \mu s$.

Solution. On suppose les erreurs positives aussi probables que les négatives; ou $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Les erreurs positives ont toutes les valeurs comprises depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$; les erreurs négatives toutes celles comprises depuis $x = 0$, jusqu'à $x = -a$.

L'intervalle des limites des erreurs est donc $2a$.

La suite des erreurs rangées dans l'ordre croissant de leurs grandeurs est

$$-a, \ldots -x, \ldots -2da, \ -da, \ 0, \ da, \ 2da \ldots x, \ldots a.$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} X = \{ &\varphi(-a)\, t^{(-a)^2} + \cdots + \varphi(-x)\, t^{(-x)^2} + \cdots + \varphi(-2da)\, t^{(-2da)^2} \\ &+ \varphi(-da)\, t^{(-da)^2} + \varphi(0)\, t^{0^2} + \cdots + \varphi(a)\, t^{a^2} \}^s = \Sigma P_\omega t^\omega, \end{aligned}$$

$P_\omega$ sera la probabilité cherchée. Elle est indépendante de $t$.

Soit $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, on aura

$$\begin{aligned} X = \{ &\varphi(-a)\, e^{a^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)\, e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(0) + \cdots \\ &+ \varphi(x)\, e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(a)\, e^{a^2\theta\sqrt{-1}} \}^s = \Sigma P_\omega e^{\omega\theta\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

multipliant par $e^{-\omega\theta\sqrt{-1}} d\theta$, puis intégrant entre $-\pi$ et $+\pi$, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{-\omega\theta\sqrt{-1}} d\theta = 2\pi P_\omega,$$

d'où

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,.\,X$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(l+\mu s)\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\,e^{da^2\sqrt{-1}}$$

$$+ 2\varphi(2da)\,e^{(2da)^2\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(x)\,e^{x^2\theta\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(a)\,e^{a^2\theta\sqrt{-1}}\Big\}^s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,.\,A,$$

en désignant par A, le produit du polynôme entre parenthèses par $e^{-\mu s\theta\sqrt{-1}}$; développant l. A en série, on trouve

$$\text{l. A} = -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\ \text{l.}\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\Big[1 + (da)^2\theta\sqrt{-1} - \frac{da^4\theta^2}{1.2} - \ldots\Big]$$

$$+ 2\varphi(2da)\Big[1 + \overline{2da}^2\theta\sqrt{-1} - \frac{\overline{2da}^4}{1.2}\theta^2 - \cdots\Big] + \cdots$$

$$+ 2\varphi(a)\Big[1 + a^2\theta\sqrt{-1} - \frac{a^4}{1.2}\theta^2 - \cdots\Big]\Big\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\ \text{l.}\ \Big\{\Big[\varphi(0) + 2\varphi(da) + 2\varphi(2da) + \cdots + 2\varphi(a)\Big]$$

$$+ 2\theta\sqrt{-1}\Big[\varphi(da)\,da^2 + \varphi(2da)\,(2da)^2 + \cdots + \varphi(a)\,a^2\Big]$$

$$- \theta^2\Big[\varphi(da)\,(da^2)^2 + \varphi(2da)\,\overline{(2da)}^2 + \cdots + \varphi(a)\,(a^2)^2\Big] + \text{etc.}\Big\}$$

$$= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\ \text{l.}\Big\{-\varphi(0) + \int_0^a 2\varphi x\,dx$$

$$+ 2\theta\sqrt{-1}\int_0^a x^2\varphi x\,dx - \theta^2\int_0^a x^4\varphi x\,dx - \text{etc.}\Big\}.$$

Posons

$$x = a\,x', \quad \varphi(x) = \varphi(ax') = \psi(x').$$

Aux limites 0 et $a$ de $x$ correspondent 0 et 1 pour $x'$.

Posons en outre

$$2\int_0^1 \psi x'\,dx' = k + \frac{\varphi(0)}{a},$$

$$\int_0^1 x'\psi x'\,dx' = k',$$

$$\int_0^1 x'^2 \psi x' dx' = k'',$$

$$\int_0^1 x'^3 \psi x' dx' = k''',$$

$$\int_0^1 x'^4 \psi x' dx' = k^{\text{IV}},$$

et observons que dans $\int_0^a 2\varphi(x)\,dx$, $\varphi(o)$ entre deux fois, nous aurons :

$$\int_0^a 2\varphi x dx = 2a \int_0^1 \psi x' dx' = ak + \varphi(o) = 1 + \varphi(o),$$

en faisant $ak = 1$ ;

$$\int_0^a x^2 \varphi x dx = a^3 \int_0^1 x'^3 \psi x' dx' = a^3 k'',$$

$$\int_0^a x^4 \varphi x dx = a^5 \int_0^1 x'^4 \psi x' dx' = a^5 k^{\text{IV}}, \text{ etc.}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned}
\text{l. A} &= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\left\{-\varphi(o) + ak + \varphi(o) + 2\theta\sqrt{-1}\,a^3k'' - \theta^2 a^5 k^{\text{IV}} - \text{etc.}\right\} \\
&= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\left\{ak + 2\theta\sqrt{-1}\,a^3k'' - \theta^2 a^5 k^{\text{IV}} - \text{etc.}\right\} \\
&= -\mu s\theta\sqrt{-1} + s\,\text{l.}\,ak\left\{1 + 2\theta\sqrt{-1}\,\frac{a^2k''}{k} - \frac{\theta^2 a^4 k^{\text{IV}}}{k} - \text{etc.}\right\} \\
&= -\mu s\theta\sqrt{-1} + \frac{2k''a^2}{k} s\theta\sqrt{-1} - \frac{k^{\text{IV}}}{k} a^4 s\theta^2 - \frac{4k''^2}{2k^2} a^4 s\theta^2 - \text{etc.} \\
&= \left[\frac{2k''}{k} - \frac{\mu}{a^2}\right] a^2 s\theta\sqrt{-1} - \left[\frac{k^{\text{IV}}}{k} - \frac{4k''^2}{2k^2}\right] a^4 s\theta^2 - \text{etc.} ;
\end{aligned}$$

pour faire disparaître le terme imaginaire posons

$$p = \frac{2k''a^2}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

il viendra

$$\text{l. A} = -\left[\frac{kk^{\text{IV}} - 2k''^2}{k^2}\right] a^4 s\theta^2 - \text{etc.},$$

$$\text{A} = e^{-\frac{kk^{\text{IV}} - 2k^2}{k^2} a^4 s\theta^2},$$

$s$ étant très-grand on peut négliger tous les autres termes. Donc

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1}-\frac{kk^{IV}-2k'^2}{k^2}sa^4\theta^2}.$$

Soit

$$a^4\theta^2 s = \beta^2\theta^2,\ \beta = \frac{k}{\sqrt{kk^{IV}-2k'^2}},\ \theta = \frac{\beta t}{a^2\sqrt{s}},\ t = \frac{\theta a^2\sqrt{s}}{\beta},\ d\theta = \frac{\beta dt}{a^2\sqrt{s}};$$

Les limites de $\theta$, $-\pi$ et $+\pi$, correspondent pour $t$ à $-\frac{\pi a^2\sqrt{s}}{\beta} = -\infty$, et à $\frac{\pi a^2\sqrt{s}}{\beta} = \infty$, à cause de $s$ supposé très-grand.

Soit de plus

$$r^2 = \frac{l^2}{a^4 s},\ \frac{l}{a^2} = r\sqrt{s},\ l\theta = \frac{l}{a^2\sqrt{s}}\beta t = r\beta t;$$

on aura :

$$\left.\begin{aligned} P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta dt}{a^2\sqrt{s}}e^{-[r\beta t\sqrt{-1}+t^2]} &= \frac{\beta}{2\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}}{a^2\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty}dt e^{-\left[t+\frac{r\beta}{2}\sqrt{-1}\right]^2} \\ &= \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}}e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}; \end{aligned}\right\}(\alpha)$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des $s$ observations est

$$\omega = l + \mu s = l + \frac{2k''a^2}{k}s$$

sera donc

$$P_\omega = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}}e^{-\frac{\beta^2}{4}\frac{l^2}{a^4 s}}.dl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On a partout sous-entendu dans l'expression $P_\omega$ la différentielle de la variable, car on a toujours $p_x = f(x)\,dx$.

Problème II. Trouver la probabilité P que la somme des carrés des erreurs des $s$ observations est comprise entre $\mu s \pm l$, $\mu$ étant égal à

$$\frac{2k''a^2}{k}.$$

Solution. Il faut intégrer la formule (2) entre les limites $\pm l$; on aura donc

$$P = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}} dl = \frac{\beta}{a^2\sqrt{\pi s}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} a^2\sqrt{s}\, dr = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}} dr,$$

en posant $l = ra^2\sqrt{s}$.

Cette formule exprime la probabilité que la somme des carrés des erreurs des $s$ observations est comprise entre

$$\mu s \pm l = \frac{2k''a^2}{k} s \pm a^2 r\sqrt{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

La formule ($\alpha$) exprime la probabilité de $r$; elle fait voir que $P_\omega$ est un maximum quand $r = 0$, donc la somme des carrés des erreurs, la plus probable, correspond à $r = 0$.

Si l'on pose

$$\frac{\beta^2 r^2}{4} = t^2, \quad \frac{\beta r}{2} = t, \quad dr = \frac{2dt}{\beta}, \quad r = \frac{2t}{\beta}, \quad ra^2\sqrt{s} = \frac{2t}{\beta} a^2\sqrt{s} = l,$$

on trouvera

$$P = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-t^2} \frac{2dt}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} e^{-t^2} dt,$$

probabilité que la somme des carrés des erreurs est comprise entre

$$\frac{2k''a^2}{k} s \pm \frac{2ta^2\sqrt{s}}{\beta}.$$

P est la probabilité que la moyenne des carrés des erreurs, ou $\int x^2 \varphi x dx$, est entre les limites

$$\frac{2k''a^2}{k} \pm \frac{2ta^2}{\beta\sqrt{s}}$$

mais

$$\frac{2k''a^2}{k} = \frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s};$$

P est donc la probabilité que la moyenne des carrés des erreurs, ou $\mu_2 = \int x^2 \varphi x dx$, est comprise entre

$$\frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s} \pm t \frac{2a^2}{\beta\sqrt{s}} = \frac{\Sigma_i^s \varepsilon_i'^2}{s} \pm \frac{l}{s},$$

où

$$\varepsilon' = \omega_i - m, \quad m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s}.$$

La somme des carrés des erreurs la plus probable est, par suite de la formule $(\beta)$, égale à

$$\frac{2k''a^2 s}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Or comme $s$ est très-considérable, la somme des carrés des erreurs différera très-peu de celle $(\gamma)$ qui répond à la probabilité maximum.

Soient donc $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s$ les erreurs d'observations.

Soit $m = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s}{s}$, on aura approximativement

$$\varepsilon_1' = \omega_1 - m$$
$$\varepsilon_2' = \omega_2 - m$$
$$\varepsilon_s' = \omega_s - m.$$

Donc

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_s^2 = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s (\omega_i - m)^2.$$

On a donc à peu près

$$\Sigma_1^s (\omega_i - m)^2 = \frac{2k''a^2 s}{k} = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Problème I. Soit $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation; chercher la probabilité $P_l$ que la somme des erreurs d'un très-grand nombre $s$ d'observations sera $l$; les erreurs positives ont la même probabilité que les erreurs négatives, ou $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Solution. On a la suite de toutes les erreurs

$$-a, \cdots -x, \cdots -2da, -da, 0, da, 2da, \cdots x, \cdots a.$$

Les probabilités correspondantes sont

$$\varphi(-a), \ldots \varphi(-x), \ldots \varphi(-2da), \varphi(-da), \varphi(0), \varphi(da), \varphi(2da), \ldots \varphi(x) \ldots \varphi(a).$$

On a

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,da = \varphi(-a) + \cdots$$
$$+ \varphi(-x) + \cdots + \varphi(0) + \cdots + \varphi(x) \cdots + \varphi(a) = 1.$$
$$\int_{-a}^{a} x\varphi x\,dx = 0 = -a\,\varphi(-a) \cdots - x\,\varphi(-x) \cdots + x\,\varphi(x) + \cdots + a\,\varphi(a),$$

vraie moyenne des erreurs d'une observation.

$$\int_{-a}^{a} x^2 \varphi x\,dx = (-a)^2 \varphi(-a) + \cdots + (-x)^2 \varphi(-x) + \cdots$$
$$+ x^2 \varphi x + \cdots + a^2 \varphi a,$$

vraie moyenne des carrés des erreurs d'une observation.

Soit

$$X = \{\varphi(-a)\,t^{-a} + \cdots + \varphi(-x)\,t^{-x} + \cdots + \varphi(0) + \cdots$$
$$+ \varphi(x)\,t^{x} + \cdots \varphi a\,t^{a}\}^{s} = \Sigma P_l\,t^{l}$$

$P_l$ sera la probabilité que la somme des erreurs des $s$ observations est $l$. Posant $t = l^{\theta\sqrt{-1}}$, on aura

$$X = \{\varphi(-a)\,e^{-a\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)\,e^{-x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi 0 + \cdots$$
$$+ \varphi x e^{x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi a e^{a\theta\sqrt{-1}}\}^{s} = \Sigma P_l e^{l\theta\sqrt{-1}};$$

multipliant par $e^{-l\theta\sqrt{-1}}d\theta$ et intégrant entre les limites $\pm\pi$ on trouve

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\,e^{-l\theta\sqrt{-1}}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\,e^{-l\theta\sqrt{-1}}\{\varphi 0 + \varphi(da)\left[e^{da\theta\sqrt{-1}} + e^{-da\theta\sqrt{-1}}\right]$$
$$+ \varphi(2da)\left[e^{-2da\theta\sqrt{-1}} + e^{-2da\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots + \varphi x\left[e^{x\theta\sqrt{-1}} + e^{-x\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots$$
$$+ \varphi a\left[e^{a\theta\sqrt{-1}} + e^{-a\theta\sqrt{-1}}\right]\}^{s} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[d\theta\cos l\theta + \sqrt{-1}\,d\theta\sin\theta\right]$$
$$\{\varphi 0 + \varphi(da)\left[e^{da\theta\sqrt{-1}} + e^{-da\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots + \varphi(x)\left[e^{x\theta\sqrt{-1}} + e^{-x\theta\sqrt{-1}}\right] + \cdots$$
$$+ \varphi(a)\left[e^{a\theta\sqrt{-1}} + e^{-a\theta\sqrt{-1}}\right]\}^{s}.$$

Représentons par N le polynôme entre accolades, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos l\theta N^s + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \sin l\theta N^s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos l\theta N^s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ \varphi 0 + 2\varphi(da)\cos(da\theta) + 2\varphi(2da)\cos(2da\theta) + \cdots \right. \\ &\left. + 2\varphi(x)\cos(x\theta) + \cdots + 2\varphi a \cos(a\theta)\right\}^s \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$P_l = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ -\varphi 0 + \int_{0}^{a} 2\varphi(x)\cos(x\theta)\, d\theta \right\}^s,$$

mais

$$2\varphi(x)\cos(x\theta) = 2\varphi(x)\left\{1 - \frac{x^2\theta^2}{2} + \text{etc.}\right\} = 2\varphi(x) - x^2\theta^2\varphi(x) + \text{etc.}$$

$$\int_0^a 2\varphi(x)\cos(x\theta)\,dx = 2\int_0^a \varphi x\,dx - \theta^2\int_0^a x^2\varphi x\,dx + \text{etc.}$$

$$= ak + \varphi(0) - \theta^2 a^3 k'' + \text{etc.}$$

En négligeant les puissances supérieures

$$\left.\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ ak - a^3\theta^2 k'' \right\}^s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos l\theta \left\{ ak\left(1 - a^2\theta^2\frac{k''}{k}\right)\right\}^s \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

probabilité que la somme des erreurs des $s$ observations est $l$.

Pour développer cette formule ($b$) en série convergente, posons

$$\left(1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\right)^s = e^{-t^2}\,;\; ak = 1$$

$$s\,l.\left(1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\right) = -t^2.$$

Par le développement du logarithme on a

$$s\,\frac{k''}{k}a^2\theta^2 = t^2, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{t}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}},\; d\theta = \frac{dt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}},$$

et aux limites de $\theta$, 0 et $\pi$ correspondent pour $t$ les limites

$$0 \text{ et } \frac{a\pi}{\sqrt{\frac{k}{k''s}}} = \infty.$$

Donc

$$P_l = \frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\cos\left[\frac{lt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right],$$

et comme

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\cos mt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}m^2},$$

il viendra

$$P_l = \frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{l^2}{a^2}\frac{k}{k''s}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}},$$

ou bien, en posant

$$\frac{l^2k}{4a^2k''s} = t^2, \text{ d'où } l = 2t\sqrt{s}\,a\sqrt{\frac{k''}{k}} : \quad P_l = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-t^2},$$

la plus grande valeur de $P_l$ répond à $l = 0$ ou $t = 0$.

Problème II. Chercher la probabilité P que la somme des erreurs des $s$ observations est comprise entre $\pm l$.

Solution. On a

$$P_l = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\, e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}}dl, \text{ (*)}$$

donc

$$P = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}}dl = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^l e^{-\frac{l^2k}{4a^2k''s}}dl.$$

Si l'on pose

$$\frac{l^2k}{4a^2k''s} = \frac{kr^2}{4k''} = t^2;$$

d'où

$$l = ar\sqrt{s}$$
$$= 2t\sqrt{s}\,.a\sqrt{\frac{k''}{k}},$$

on trouvera aisément

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dl = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}}\int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}}dr, \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

(*) En réintroduisant le facteur $dl$ supprimé par abréviation dans le problème précédent.

probabilité que la somme des erreurs des $s$ observations est comprise entre

$$\pm l \text{ ou } \pm ar\sqrt{s}, \text{ ou } \pm 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\sqrt{s};$$

ou bien, probabilité que la somme des erreurs des $s$ observations, divisée par $s$, ou leur moyenne arithmétique est comprise entre

$$\pm\frac{l}{s} \text{ ou } \pm\frac{ar}{\sqrt{s}} \text{ ou } \pm 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Remarque I. Comme on a

$$\frac{2k''a^2s}{k} = \Sigma_1^s(\omega_i - m)^2 = \Sigma_1^s \varepsilon^2$$

on trouve

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \sqrt{\frac{\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}{2s}}$$

donc

$$\frac{ar}{\sqrt{s}} = 2ta\sqrt{\frac{k}{k''}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}$$

et

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}}\int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}}dr = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

est la probabilité que la moyenne arithmétique des erreurs est comprise entre

$$\pm\frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s(\omega_i - m)^2}.$$

Remarque II. Soit $x$ une grandeur inconnue fournie par $s$ observations $\omega_1 \ldots \omega_s$; les erreurs vraies sont

$$x - \omega_1 = \varepsilon_1' \ldots x - \omega_s = \varepsilon_s'.$$

Si l'on fait

$$m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s},$$

on aura

$$\frac{\varepsilon_1' + \cdots + \varepsilon_s'}{s} = x - m,$$

donc

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est la probabilité que $x - m$ est entre

$$\pm \frac{t}{s} \sqrt{2\Sigma\varepsilon_i'^2},$$

ou que

$$x = m \pm \frac{s}{t} \sqrt{2\Sigma_1^s (\omega_i - m)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous avons vu que la plus grande valeur de $P_l$ répond à $l = o$, ou à $t = o$; mais alors $x = m$; donc $m$ est la valeur la plus probable de $x$; mais on obtient cette valeur de $x$, par l'équation

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \text{minimum};$$

donc la règle des moindres carrés donne la valeur la plus avantageuse.

Remarque III. Les formules (1) et (2) conduisent aux conséquences suivantes :

1° Si $t$ reste constant, et par suite P, les limites de (2) se resserrent à mesure que $s$ augmente.

2° Si $\pm \frac{t}{s} \sqrt{2\Sigma_1^s (\omega_i - m)^2}$ reste constant, ce qui exige que $t$ augmente avec $s$, P convergera vers 1, à mesure que $s$ ou $t$ augmente.

Remarque IV. Si $\varphi(x)$ est une constante, $c$ par exemple,

$$k = 2 \int_0^1 \varphi x' dx' = 2 \int_0^1 c dx' = 2c$$

$$k'' = \int_0^1 x'^2 \varphi x' dx' = \int_0^1 c x'^2 dx' = \frac{c}{3}$$

d'où

$$\frac{k}{k''} = 6.$$

Remarque V. Les formules (A) peuvent servir à s'assurer si un phénomène est dû à une cause constante; car en supposant

que le phénomène soit dû à des causes accidentelles, on a la probabilité

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr,$$

que la somme des erreurs des $s$ observations est comprise entre $\pm ar\sqrt{s}$; donc qu'elle est inférieure à $ar\sqrt{s}$, abstraction faite du signe, c'est-à-dire en valeur absolue.

Donc si P est peu différent de 1, et que la somme des erreurs soit $\leqq ar\sqrt{s}$, il sera très-probable que le phénomène est dû à une cause constante, qu'il faut alors rechercher.

Exemple. Vers 9 heures du matin le baromètre est plus élevé que vers 9 heures du soir; ensuite il remonte jusque vers 11 heures du soir, et il redescend jusque vers 4 heures du matin, pour revenir à son maximum de hauteur vers 9 heures.

Il faut examiner si cette variation diurne est due à une cause constante, ou si elle est le résultat de causes accidentelles.

Soit $h_i'$ la hauteur du baromètre à 9 h. du matin le $i^{me}$ jour :

— $h_i$ — — à 9 h. du soir le $i^{me}$ —

faisons

$$\omega_i = (h_i' - h_i)$$

$$m = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_s}{s};$$

d'où

$$ms = \omega_1 + \cdots + \omega_s.$$

Si $x$ désigne la vraie valeur inconnue donnée par les $s$ observations, on aura

$$x - \omega_1 = \varepsilon_1' \ldots x - \omega_s = \varepsilon_s'$$

et

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i' = (x - m)s;$$

faisons

$$sx = q,$$

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i' = q - ms.$$

En supposant que le phénomène de la variation diurne soit accidentel, on a :

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4r''}} dr;$$

probabilité que $q$ est compris entre $\pm ar\sqrt{s}$.

Par les observations de Ramond on a à peu près $x = 1$ millimètre; donc en prenant $s = 400$ jours et en posant pour les limites des $\omega$, $\pm 4$ millimètres, d'où $a = 4$, on aura :

$$r = \frac{l}{a\sqrt{s}} = \frac{q}{a\sqrt{s}} = \frac{400}{a\sqrt{400}} = 5;$$

comme $\frac{k}{k''} = 6$ au moins (voir p. 365), on a :

$$\frac{kr^2}{4k''} = 37{,}5 \text{ au moins, ou } t = \sqrt{37{,}5}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{37{,}5\pi}} \int_t^\infty e^{-t^2} dt \\ &= 1 - \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{57{,}5\pi}} (1 - \text{etc.}) = 1 \text{ à peu près,} \end{aligned}$$

probabilité que $sx$ ou $q$ est $< ar\sqrt{s}$, $< 400$.

Mais l'observation donnant $q = 400$, on a une forte probabilité que le phénomène de la variation diurne du baromètre est dû à une cause constante, ce qui engage à chercher cette cause.

La valeur $x = 1$ millimètre n'est qu'approximative, mais on a une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

que

$$x - m = \pm \frac{t}{s} \sqrt{2\Sigma_1^s (m - \omega_i)^2}.$$

### 2. Fonctions d'une seule inconnue.

Une fonction inconnue $f(\xi)$ est donnée par $s$ observations $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_s$, on connaît $\xi$ à une très-petite fraction près; soient A cette valeur approchée et $z$ sa correction inconnue, on aura :

$$\xi = A + z.$$

Soit $\varepsilon_i$ l'erreur vraie de la $i^{ème}$ observation, on a :

$$\varepsilon_i = f(\xi) - \omega_i = f(\mathrm{A} + z) - \omega_i$$
$$\varepsilon_i = f(\mathrm{A}) + f'\mathrm{A} \,.\, z - \omega_i$$
$$\varepsilon_i = a_i z - n_i \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en posant

$$f'(\mathrm{A}) = a_i \text{ et } \omega_i - f(\mathrm{A}) = n_i \,.$$

Remarque. Si $f(\xi) = \xi = z$, d'où $\varepsilon_i = z - \omega_i$, on a :

$$a_i = 1 \,, \quad n_i = \omega_i \,, \quad \mathrm{A} = 0 \,;$$

multiplions la formule (1) par le facteur entier et positif $h_i$, on aura :

$$h_i \varepsilon_i = h_i a_i z - h_i n_i \,,$$

$h_i$ étant une quantité indéterminée.

En faisant $i = 1, 2, \ldots s$, et en ajoutant, on a

$$\mathrm{E} = \Sigma_1^s h_i \varepsilon_i = \Sigma_1^s h_i a_i z = \Sigma_1^s h_i n_i \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Déterminons $z$ par la condition que $\mathrm{E} = o$, l'équation (2) donne

$$z = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} = \mathrm{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Soit $u$ l'erreur de ce résultat, on aura

$$z = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} + u = \mathrm{M} + u$$
$$\mathrm{E} = \Sigma_1^s h_i a_i (\mathrm{M} + u) - \Sigma_1^s h_i n_i = u \Sigma_1^s h_i a_i \,. \quad \ldots \quad (4)$$

Problème I. Déterminer la probabilité que la somme E a pour valeur $l$.

Solution. Soit $\pm a$ les limites entre lesquelles varient les erreurs $x$ de chaque observation, $\varphi x dx$ sera la probabilité d'une erreur $x$, et l'on aura

$$\int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_i x} = \{ \varphi(-a) t^{-h_i a} + \cdots + \varphi(x) t^{h_i x} + \cdots + \varphi(a) t^{h_i a} \,. \quad (5)$$

Soit

$$X = \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_1 x} \times \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_2 x} \ldots \times \int_{-a}^{a} \varphi x dx t^{h_s x} = \Sigma P_l t^l,$$

le produit X aura dans chacun de ses termes, comme exposant, l'une des valeurs de toutes les sommes que l'on peut former en ajoutant $s$ des quantités $h_1 x$, $h_2 x$, ... $h_s x$, prises à volonté, et pour coefficient la probabilité de cette valeur, $x$ désignent les erreurs $\varepsilon_i$. Donc $P_l$ est la probabilité que la valeur de $E = \Sigma_1^s h_i \varepsilon_i$ est $l$.

Soit $t = e^{\omega\sqrt{-1}}$, et $\varphi(-x) = \varphi(x)$, on a :

$$P_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-l\omega\sqrt{-1}} d\omega,$$

mais

$$\int_{-a}^{a} \varphi x dx e^{h_i x \omega\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{0} \varphi x dx e^{h_i x \omega\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi x dx e^{h_i x \omega\sqrt{-1}}$$

$$= \int_{0}^{a} \varphi(-x) dx e^{h_i x \omega\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi x dx e^{h_i x \omega\sqrt{-1}}$$

$$= \int_{0}^{a} \varphi x dx \left\{ e^{h_i x \omega\sqrt{-1}} + e^{-h_i x \omega\sqrt{-1}} \right\} = 2 \int_{0}^{a} \varphi x dx \cos(h_i x \omega).$$

Donc

$$X = 2\int_{0}^{a} \varphi x dx \cos(h_i x \omega)\, 2\int_{0}^{a} \varphi x dx \cos(h_2 x \omega) \ldots 2\int_{0}^{a} \varphi x dx \cos(h_s x \omega).$$

Soient

$$x = ax', \quad \varphi(ax') = \psi x',$$

$$\int_{0}^{a} \varphi x dx = a \int_{0}^{1} \psi x' dx' = \frac{1}{2} ak, \qquad 2\int_{0}^{1} \psi x' dx' = k,$$

$$\int_{0}^{a} x^2 \varphi x dx = a^3 \int_{0}^{1} x'^2 \psi x' dx' = a^3 k'', \quad \int_{0}^{1} x'^2 \psi x' dx' = k'',$$

$$\int_{0}^{a} x^4 \varphi x dx = a^5 \int_{0}^{1} x'^4 \psi x' dx' = a^5 k^{IV}, \int_{0}^{1} x'^4 \psi x' dx' = k^{IV}, \text{ etc.},$$

$$2\int_{0}^{a} \varphi x dx = \int_{-a}^{a} \varphi x dx = ak = 1, \text{ etc.}$$

Mais on a

$$\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x\omega) = \int_0^a \varphi x dx \left[1 - \frac{(h_i x\omega)^2}{2} + \frac{h_i^4\omega^4 (x\omega)^4}{24} - \cdots\right]$$

$$= \int_0^a \varphi x dx - \frac{h_i^2\omega^2}{2}\int_0^a x^2\varphi x dx + \frac{h_i^4\omega^4}{24}\int_0^a x^4\varphi x dx - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}ak - \frac{h_i^2\omega^2}{2}a^3k'' + \frac{h_i^4\omega^4}{24}a^5k^{\text{IV}} - \cdots$$

$$2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x) = ak\left\{1 - h_i\omega^2a^2\frac{k''}{k} + \frac{h_i^4\omega^4}{12}a^4\frac{k^{\text{IV}}}{k} - \right\};$$

d'où, comme $ak = 1$ :

$$\text{l.}\left[2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x)\right] = \text{l.}\left\{1 - h_i\omega^2a^2\frac{k''}{k} + \text{ etc.}\right\}$$

$$= -\frac{k''}{k}h_i^2a^2\omega^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2}h_i^2a^4\omega^4 - \text{etc.}$$

Donc

$$\text{l.X} = \sum_1^s \text{l.}\left[2\int_0^a \varphi x dx \cos(h_i x\omega)\right]$$

$$= -\frac{k''}{h}a^2\omega^2\sum_1^s h_i^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k}a^4\omega^4\sum_1^s h_i^4 - \cdots$$

$$\text{X} = e^{-\frac{k''}{k}a^2\omega^2\sum_1^s h_i^2} \cdot e^{\frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k}a^4\omega^2\sum_1^s h_i^4}$$

$$= e^{-\frac{k'}{k}a^2\omega^2\sum_1^s h_i^2}\left\{1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2}a^4\omega^4\sum_1^s h_i^4 - \cdots\right\},$$

donc

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega\left\{e^{-l\omega\sqrt{-1} - \frac{k''}{k}a^2\omega^2\sum_1^s h_i^2}\left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2}a^4\omega^4\sum_1^s h_i^4 - \cdots\right)\right\};$$

faisons $t = \omega a\sqrt{s}$, il viendra :

$$\text{P}_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi a\sqrt{s}}^{\pi a\sqrt{s}} \frac{dt}{a\sqrt{s}}\left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2}\cdot\frac{\sum_1^s h_i^4}{s^2}t^4 + \cdots\right)e^{-\left[t^2\frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s} + \frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}\right]}.$$

Or $\sum_1^s h_i^2$, $\sum_1^s h_i^4$, etc., sont évidemment de l'ordre $s$, donc $\frac{\sum_1^s h_i^2}{s^2}$ est

de l'ordre $\frac{1}{s}$, qu'on néglige, $s$ étant très-grand. L'exposant étant très-petit aux limites $\pm\sqrt{s}$, on peut remplacer celles-ci par $\pm\infty$. Donc

$$P_l = \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\left[\frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s}t^2+\frac{l\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}t\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}} e^{-\frac{kl^2}{4a^2k''\sum h_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{k''}{k}\frac{\sum_1^s h_i^2}{s}\left[t+\frac{l\sqrt{-1}}{2a}\frac{k}{k''}\frac{\sqrt{s}}{\sum_1^s h_i^2}\right]^2}.$$

Posons

$$\frac{k''\sum_1^s h_i^2}{ks}\left(t+\frac{lk\sqrt{s}\sqrt{-1}}{2ak''\sum h_i^2}\right)^2 = v^2;$$

et nous trouverons :

$$P_l = \frac{1}{2\sqrt{\pi}.a\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}} e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl,$$

pour la probabilité que la somme $E = \sum h_i \varepsilon_i$ a pour valeur $l$.

La plus grande valeur de $P_l$ répond à $l = o$.

Problème II. Chercher la probabilité P que la valeur de E sera comprise entre $\pm l$.

Cette probabilité sera

$$P = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\sum_1^s h_i^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}} \int_0^l e^{-\frac{kl^2}{4k''a^2\sum h_i^2}} dl.$$

Soit $l = ar\sqrt{s}$, d'où

$$P = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{\frac{k''}{k}\sum h_i^2}} \int_1^1 e^{-\frac{kr^2s}{4k''\sum h_i^2}} dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

probabilité que E est compris entre $\pm ar\sqrt{s}$ ou $\pm l$.

Problème III. Chercher la probabilité $P_u$ que la valeur de $u$ dans

$$z = M + u = \frac{\sum_1^s h_i n_i}{\sum_1^s h_i a_i} + u,$$

est comprise entre $\pm u$.

Solution. La valeur de P de la formule $(a)$ est la probabilité que

$$E \text{ ou } \sum_1^s h_i a_i z - \sum_1^s h_i n_i$$

est compris entre $\pm ar\sqrt{s}$; ou que

$$z - \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i},$$

ou bien $u$, est compris entre

$$\pm \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}.$$

Comme $E = u \sum_1^s h_i a_i = l = ar\sqrt{s}$, on a

$$u = \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}, \quad r = \frac{u \sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{s}}.$$

Substituant cette valeur dans $(a)$, alors P devient $P_u$, donc

$$P_u = \frac{\sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi\Sigma h_i^2}} \int_0^u du\, e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4k''a^2\Sigma h_i^2}u^2},$$

probabilité que l'erreur de $z = M = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i}$ est entre $\pm u$.

Soit $P'_u$ la probabilité que $z = M$ est fautif de $u$, on aura :

$$P'_u = \frac{\sum_1^s h_i a_i}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi\Sigma h_i^2}} e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4k''a^2\Sigma h_i^2}u^2} du.$$

Cette probabilité est la plus grande possible quand $u = o$.

Soit

$$\frac{k\,(\Sigma h_i n_i)}{4k''a^2\Sigma h_i^2} = t^2, \quad u = \frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

d'où $t = o$, quand $u = o$, et

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt\, e^{-t^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

probabilité que l'erreur de $z = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i}$ est comprise entre

$$\pm \frac{2ta\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i} = \pm u.$$

Donc :

1° Si $t$ reste constant, et par suite $P_u$, l'intervalle $\pm u$ se resserre d'autant plus que

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

sera plus petit.

2° Si $t$ augmente, et par suite $P_u$, il faut diminuer

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

proportionnellement, pour que l'intervalle $\pm u$ ne change pas. Ainsi cet intervalle restant le même, la probabilité $P_u$ que $u$ tombe dans cet intervalle est d'autant plus grande que le facteur

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

est plus petit.

Donc le système de facteurs $h_i$ le plus avantageux sera celui pour lequel

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}}\cdot\frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

est un minimum.

Or en égalant à zéro la différentielle de ce facteur par rapport à $h_i$ et supprimant le coefficient $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$, on a :

$$h_i = \frac{\Sigma_1^s h_i^2}{\Sigma_1^s h_i a_i}\, a_i = \mu a_i ,$$

$\mu$ étant le facteur $\frac{\Sigma_1^s h_i^2 i}{\Sigma_1^s h_i a_i}$ qui reste constant pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, 3 \ldots s$.

A ce système de facteurs le plus avantageux correspond

$$z = \frac{\Sigma_1^s \mu a_i n_i}{\Sigma_1^s \mu a_i^2} = \frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2} = m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

L'erreur de cette valeur de $z$ sera

$$u = \frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma_1^s \mu^2 a_i^2}}{\mu \Sigma_1^s a_i^2} = 2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{1}{\sqrt{\Sigma_1^s a_i^2}}.$$

Le résultat ($c$) est le même que celui qu'on obtient par la méthode des moindres carrés, ou par le minimum de

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i^2 = \Sigma_1^s (a_i z - n_i)^2,$$

car en égalant à zéro la différentielle par rapport à $z$, on obtient

$$\Sigma_1^s a_i (a_i z - n_i) = o$$
$$z\Sigma_1^s a_i^2 - \Sigma_1^s a_i n_i = o,$$
$$z = \frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Reprenons la formule ($b$). Comme on a (pp. 368 et 360) :

$$\varepsilon_i' = (a_i m - n_i), \quad 2sa^2\frac{k''}{k} = \Sigma_1^s \varepsilon_i'^2, \quad a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sqrt{\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2},$$

cette formule (*b*)

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

exprimera la probabilité que

$$z = m \pm \frac{2ta\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{\Sigma_1^s a_i^2}}$$

$$= m \pm 2t\sqrt{\frac{2\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2}{4s\Sigma_1^s a_i^2}} = m \pm \frac{t}{\sqrt{s\Sigma a_i^2}}\sqrt{2\Sigma\varepsilon_i'^2}.$$

Si $f(\xi) = \xi = z$, on a :

$$A = 0, \quad a_i = 1,$$

$$\varepsilon_i' = a_i m - n_i = m - \omega_i$$

$$\Sigma_1^s a_i^2 = s,$$

alors

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt e^{-t^2}$$

est la probabilité que

$$\xi = z = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_s}{s} \pm \frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma_1^s (m - \omega_i)^2}$$

ce qui est connu.

Remarque I. L'expression $\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s [a_i m - n_i]^2$ peut se mettre sous une autre forme :

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \Sigma_1^s [a_i m - n_i]^2 = \Sigma_1^s \left[ a_i \left( \frac{\Sigma_1^s a_i n_i}{\Sigma_1^s a_i^2} \right) - n_i \right]^2 = \Sigma_1^s \left\{ \frac{a_i \Sigma_1^s a_i n_i - n_i \Sigma_1^s a_i^2}{\Sigma_1^s a_i^2} \right\}^2.$$

En développant le carré on a

$$\Sigma_1^s \varepsilon_i'^2 = \frac{\Sigma_1^s a_i^2 \cdot \Sigma_1^s n_i^2 - (\Sigma_1^s a_i^2 n_i)^2}{(\Sigma_1^s a_i^2)^2}.$$

Donc

$$P_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

est la probabilité que

$$z = m \pm \frac{t}{s} \sqrt{\left\{ \frac{\sum_1^s a_i^2 \cdot \sum_1^s n_i^2 - \left( \sum_1^s a_i^2 n_i \right)^2}{\left( \sum_1^s a_i^2 \right)^2} \right\}}.$$

Remarque II. Le plus grand terme de la somme $P_u$ répond à $u = 0$, ou à $t = 0$; mais alors $z = m$; donc la valeur la plus probable de $z$ est $m$.

# II.

## THÉORIE DES ERREURS D'APRÈS BIENAYMÉ (*).

—

### 1. Fonction d'une seule inconnue, cette fonction étant donnée par un très-grand nombre d'observations.

Soit $\xi$ l'inconnue, $f(\xi)$ la fonction donnée par les $n$ observations $0_1$, $0_2$ ... $0_n$, $n$ étant très-grand.

On connaît $\xi$ à peu près; soit A cette valeur approchée, et $x$ sa correction très-petite.

Soient $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ ... $\varepsilon_n$ les erreurs inconnues des observations.

En négligeant les puissances supérieures de $x$, on aura exactement

$$0_h + \varepsilon_h = f(\mathrm{A} + x) = a_h x + \alpha_h ;$$

chaque observation donne une équation semblable.

Soit

$$0_h - \alpha_h = n_h , \quad \varepsilon_h + n_h = \omega_h ;$$

on aura

$$\omega_h = a_h x . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Multiplions les $n$ équations (1) par les facteurs indéterminés $k_h$; nous aurons, en faisant la somme :

$$\mathrm{S}\omega_h k_h = x \mathrm{S} a_h k_h .$$

Si nous posons

$$\mathrm{S} a_h k_h = 1 ,$$

nous aurons

$$x = \mathrm{S}\omega_h k_h = \mathrm{S}(\varepsilon_h + n_h) k_h = \mathrm{S}\varepsilon_h k_h + \mathrm{S} n_h k_h .$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XVII, février 1852.

En faisant $x' = Sn_h k_h$ on commet une erreur

$$r = S\varepsilon_h k_h .$$

C'est aussi l'erreur dont est affecté le résultat

$$x = S\omega_h k_h .$$

Si l'on ne prend pas $Sa_h k_h$ pour unité, on a :

$$x_1 = \frac{S\omega_h k_h}{Sa_h k_h} = \frac{x}{Sa_h k_h},$$

$$x_1' = \frac{Sn_h k_h}{Sa_h k_h} = \frac{x'}{Sa_h k_h},$$

et ce résultat est affecté de l'erreur

$$r_1 = \frac{Sa_h k_h}{S\varepsilon_h k_h}.$$

Si l'on fait $k_h = a_h$, les facteurs $k$ seront, comme nous le verrons, les plus avantageux, c'est-à-dire ceux que fournit la méthode des moindres carrés. On a alors

$$x_2 = \frac{S\omega_h a_h}{Sa_h^2},$$

$$x_2' = \frac{Sn_h a_h}{Sa_h^2},$$

$$r_2 = \frac{S\varepsilon_h a_h}{Sa_h^2}.$$

Problème I. *Chercher la probabilité de l'erreur* r.

En prenant les intégrales entre les limites jusqu'auxquelles les erreurs peuvent s'étendre, et en désignant par $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ la probabilité d'une erreur $\varepsilon$, puis en posant

$$P = \int \varphi\varepsilon_1 d\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 k_1 \alpha\sqrt{-1}} . \int \varphi\varepsilon_2 d\varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 k_2 \alpha\sqrt{-1}} ..... \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h k_h \alpha\sqrt{-1}} .....$$
$$\int \varphi\varepsilon_n d\varepsilon_n e^{\varepsilon_n k_n \alpha\sqrt{-1}} = \Sigma R e^{r\alpha\sqrt{-1}},$$

il est clair que R sera la probabilité de $r$.

Mais en posant $R = \Psi r dr$, et changeant en conséquence le signe $\Sigma$ en $\int$, on aura :

$$P = \int \Psi r dr e^{r\alpha\sqrt{-1}},$$

les limites de l'intégrale étant sous-entendues.

Multipliant par $d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}}$, et intégrant entre $\pm\infty$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \int \Psi r dr e^{r\alpha\sqrt{-1}} = 2\pi\Psi r;$$

d'où

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} P.$$

Si nous omettons les indices de $\varepsilon$, qui ne sont là que pour plus de clarté, nous pourrons écrire

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \prod_1^n \left\{ \int \varphi\varepsilon d\varepsilon e^{\varepsilon\alpha k_h\sqrt{-1}} \right\}.$$

Or

$$\int \varphi_1\varepsilon d\varepsilon e^{\varepsilon k_h\alpha\sqrt{-1}} = \int \varphi\varepsilon d\varepsilon \left[ 1 + \alpha k_h\varepsilon\sqrt{-1} - \frac{\alpha^2 k_h^2}{2}\varepsilon^2 - \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\varepsilon^3\sqrt{-1} + \frac{\alpha^4 k_h^4}{24}\varepsilon^4 + \cdots \right]$$

$$= 1 + \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2}{2}\alpha^2 k_h^2 - \frac{\mu_2}{6}\alpha^3 k_h^3\sqrt{-1} + \frac{\mu_4\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$

$$= 1 + z = e^{\nu};$$

on a posé

$$\mu_\beta = \int \varepsilon^\beta \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

$$\nu = l.(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \alpha^2 k_h^2 \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} - \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1}\,(\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3)$$

$$+ \frac{\alpha^4 k_h^4}{24}(\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4) + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h\sqrt{-1} - \alpha^2 k_h^2 \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} - M_5 \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1} + M_4 \frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$

On aura par suite

$$\int_{\varepsilon} d\varepsilon\, e^{\alpha z k_h \sqrt{-1}} = e^{\mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \alpha^2 k_h^2 \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} - M_3 \frac{\alpha^3 k_h^3}{6} \sqrt{-1} + M_4 \frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots}$$

d'où

$$\prod_1^n{}_h \int_{\varepsilon} d\varepsilon\, e^{\alpha z k_h \sqrt{-1}} = e^{\mu_1 \alpha S k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \alpha^2 S k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3}{6} \sqrt{-1} S k_h^3 + M_4 \frac{\alpha^4}{24} S k_h^4 + \cdots}$$

et

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\, e^{\mu_1 \alpha S k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_1 - \mu_1^2}{2} \alpha^2 S k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3}{6} \sqrt{-1} S k_h^3 + M_4 \frac{\alpha^4}{24} S k_h^4 + \cdots}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-(r - \mu_1 S k_h)\alpha\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{z} \alpha^2 S k_h^2}$$

$$\times \left(1 - \frac{M_3 \sqrt{-1}}{6} \alpha^3 S k_h^3 + \frac{M_4}{24} \alpha^4 S k_h^4\right),$$

en s'arrêtant aux termes en $\alpha^4$.

Soit

$$r - \mu_1 S k_h = \rho \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \quad dr = d\rho \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)},$$

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}, \quad d\alpha = \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

nous aurons

$$\Psi r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}\, e^{-z\rho z\sqrt{-1} - z^2 S k_h^2} \cdot Q,$$

en faisant

$$Q = 1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1} \cdot \frac{M_3 S k_h^3 \cdot z^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}\right)^3} + \frac{1}{24} \frac{M_4 S k_h^4 \cdot z^4}{\frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1^2)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\, N_3 z^3 + \frac{1}{24} N_4 z^4.$$

PROBLÈME II. *Chercher la probabilité* p *que* r *est compris entre deux limites.*

En prenant l'intégrale entre ces limites, on aura :

$$p = \int_{\mathrm{r}} r dr$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-2\rho z\sqrt{-1} - z^2 \mathrm{Sk}_h^2} \left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\mathrm{N}_3 z^3 + \frac{1}{24}\mathrm{N}_4 z^4\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d\rho\, e^{-\frac{\rho^2}{\mathrm{Sk}_h^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\mathrm{Sk}_h^2\left(z + \frac{\rho\sqrt{-1}}{\mathrm{Sk}_h^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\mathrm{N}_3 z^3 + \frac{1}{24}\mathrm{N}_4 z_4\right).$$

Soit

$$\rho = t\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2}, \quad \beta^2 = \mathrm{Sk}_h^2\left(z + \frac{\rho\sqrt{-1}}{\mathrm{Sk}_h^2}\right), \quad \beta = z\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2} + t\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}_1 = \frac{3\mathrm{N}_3}{(\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2})^5}, \quad \mathrm{L}_2 = \frac{\mathrm{N}_3}{(\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2})^3},$$

$$\mathrm{G}_1 = \frac{\mathrm{N}_4}{(\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2})^4}, \quad \mathrm{G}_2 = \frac{6\mathrm{N}_4}{(\sqrt{\mathrm{Sk}_h^2})^4}.$$

Comme la dernière intégrale est prise entre les limites $\pm\infty$, les puissances impaires de $\beta$ disparaîtront, et l'on aura :

$$p = \frac{1}{\pi} \int dt\, e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \left\{1 - \frac{1}{6}(\mathrm{L}_1\beta^2 t + \mathrm{L}_2 t^3) + \frac{1}{24}(\mathrm{G}_1\beta^4 - \mathrm{G}_2\beta^2 t^2 + \mathrm{G}_1 t^4)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int dt\, e^{-t^2} \left\{\sqrt{\pi} - \frac{1}{6}\left(\mathrm{L}_1 t \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta + \mathrm{L}_2 t^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}\left(\mathrm{G}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \beta^4 e^{-\beta^2} d\beta - \mathrm{G}_2 t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta + \mathrm{G}_1 t^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt\, e^{-t^2} \left\{1 - \frac{1}{6}\left(\mathrm{L}_1 \frac{t}{2} + \mathrm{L}_2 t^3\right) + \frac{1}{24}\left(\mathrm{G}_1 \frac{1.3}{2^2} - \mathrm{G}_2 \frac{t^2}{2} + \mathrm{G}_1 t^4\right)\right\},$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^{2i} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{1.2 \ldots (2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

Prenons $t$ entre les limites $\pm\gamma$; les puissances impaires de $t$ disparaîtront; nous aurons donc :

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} dt\, e^{-t^2}\left\{1 - \frac{1}{24}\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\,G_1 - \frac{1}{2}\,G_2 t^2 + G_3 t^4\right)\right\},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} dt\, e^{-t^2}\left\{1 - \frac{1}{24}\,\frac{M_4}{\frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1^2)^2}\,\frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2}\left(\frac{1\cdot 3}{2^2} - 3t^2 + t^4\right)\right\}.$$

Or, $Sk_h^4$ étant de l'ordre $n$, $(Sk_h^2)^2$ de l'ordre $n^2$, $\frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{n}$, qu'on néglige; donc enfin

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} dt\, e^{-t^2};$$

probabilité que

$$-\gamma < t < \gamma,$$

ou bien que

$$-\gamma < \frac{\rho}{\sqrt{Sk_h^2}} < \gamma,$$

$$-\gamma\sqrt{Sk_h^2} < \rho < \sqrt{Sk_h^2},$$

$$-\gamma\sqrt{Sk_h^2} < \frac{r - \mu_1 Sk_h}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} < \gamma\sqrt{Sk_h^2},$$

ou enfin que

$$\mu_1 Sk_h - \gamma\sqrt{Sk_h^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r < \mu_1 Sk_h + \gamma\sqrt{Sk_h^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Remarque I. 1° Si $\gamma$, et par suite $p$, est constant, les limites de $r$ seront les plus étroites possibles lorsque $Sk_h^2$ sera minimum, donc lorsque $k_h = a_h$, comme nous le verrons dans la remarque suivante.

2° Comme $\gamma = \frac{\rho}{\sqrt{Sk_h^2}}$, $\gamma$ sera maximum, donc $p$ le plus grand possible, lorsque $Sk_h^2$ sera minimum, ou lorsque $k_h = a_h$.

Donc un système de limites étant choisi, la probabilité que l'erreur ne sort pas de ces limites sera la plus grande possible quand $x$ sera déterminé par la méthode des moindres carrés.

Remarque II. Démontrons que $Sk_h^2 = \text{min.}$ répond à $k_h = a_h$; c'est-à-dire aux facteurs donnés par la méthode des moindres carrés.

En effet, ayant posé $Sa_h k_h = 1$, on a aussi

$$Sa_h^2 = 1,$$

donc

$$Sa_h k_h = Sa_h^2;$$

et par suite, on a identiquement :

$$Sk_h^2 - 2Sa_h k_h = Sk_h^2 - 2Sa_h^2;$$

ou

$$Sk_h^2 - 2Sa_h k_h + Sa_h^2 = Sk_h^2 - Sa_h^2;$$

ou bien

$$S(k_h - a_h)^2 = Sk_h^2 - Sa_h^2;$$

d'où

$$Sk_h^2 = Sa_h^2 + S(k_h - a_h)^2;$$

d'où résulte la proposition à démontrer.

Remarque III. Le système le plus avantageux des facteurs $k$ étant donc celui dans lequel $k_h = a_h$, on aura, pour ce système :

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt :$$

probabilité que

$$\mu_1 Sa_h - \gamma \sqrt{Sa_h^2} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r < \mu_1 Sa_h + \gamma \sqrt{Sa_h^2} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)};$$

$r$ est alors l'erreur commise en prenant pour $x$ la valeur $S\omega_h a_h$, ou $Sn_h a_h$.

Mais comme on a pris $Sa_h k_h = 1$, donc $Sa_h^2 = 1$, il est clair que $p$ est aussi la probabilité que

$$\mu_1 \frac{Sa_h}{Sa_h^2} - \gamma \frac{1}{\sqrt{Sa_h^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r < \mu_1 \frac{Sa_h}{Sa_h^2} + \gamma \frac{1}{\sqrt{Sa_h^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)};$$

$r$ est alors l'erreur commise en prenant

$$x = \frac{S\omega_h a_h}{Sa_h^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{Sn_h a_h}{Sa_h^2}.$$

Remarque IV. Lorsque $\mu_1 = \int \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon$ est nul, il n'y a pas d'erreurs constantes, et $\varphi(-\varepsilon)$ est égal à $\varphi(\varepsilon)$; alors

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{S}a_h^2}} \sqrt{2\mu_2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{S}a_h^2}} \sqrt{2\mu_2}.$$

Mais on a

$$\mu_2 = \frac{\mathrm{S}\varepsilon'^2_h}{n};$$

donc $p$ est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{n\mathrm{S}a_h^2}} \sqrt{2\mathrm{S}\varepsilon'^2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{n\mathrm{S}a_h^2}} \sqrt{2\mathrm{S}\varepsilon'^2},$$

les valeurs de $\varepsilon'$ étant données par

$$\varepsilon'_h = a_h \frac{\mathrm{S}n_h \cdot a_h}{\mathrm{S}a_h^2} - n_h = a_h \cdot m - n_h,$$

en posant

$$m = \frac{\mathrm{S}n_h \cdot a_h}{\mathrm{S}a_h}.$$

Remarque V. Si $f(\xi) = \xi$, on a :

$$a_h = 1; \quad n_h = o_h - \alpha_h = o_h,$$

puisque alors $\alpha_h$ est nul; et $\mathrm{S}a_h^2 = n$; donc

$$m = \frac{\mathrm{S}o_h}{n}, \quad \varepsilon'_h = \frac{\mathrm{S}o_h}{n} - o_h;$$

et alors $p$ est la probabilité que

$$-\frac{\gamma}{n} \sqrt{2\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{S}o_h}{n} - o_h\right)^2} < r < \frac{\gamma}{n} \sqrt{2\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{S}o_h}{n} - o_h\right)^2};$$

$r$ est alors l'erreur commise en prenant pour $\xi$ la moyenne arithmétique $\frac{\mathrm{S}o_h}{n}$.

### 2. Fonction de plusieurs inconnues.

Une fonction $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i \ldots \xi_m)$ des $m$ inconnues $\xi_i$ est donnée par $n$ observations $o_1, o_2, \ldots o_h \ldots o_n$, dont les erreurs sont:

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_h \ldots \varepsilon_n.$$

On connaît les valeurs approchées $A_1 \ldots A_i \ldots A$ des inconnues; désignons par $x_1 \ldots x_i \ldots x_m$ leurs corrections très-petites.

On aura $n$ équations de la forme

$$\begin{aligned} o_h + \varepsilon_h &= f(A_1 + x_1, A_2 + x_2, \ldots A_i + x_i, \ldots A_m + x_m) \\ &= \alpha_h + a_{1,h} x_1 + a_{2,h} x_2 + \cdots + a_{i,h} x_i + \cdots + a_{m,h} x_m \end{aligned}$$

en négligeant les puissances supérieures des $x_i$.

Soit

$$o_h - \alpha_h = n_h, \quad \text{et} \quad \varepsilon_h + n_h = \omega_h,$$

l'équation précédente s'écrira:

$$\omega_h = a_{1,h} x_1 + a_{2,h} x_2 + \cdots + a_{i,h} x_i + \cdots + a_{m,h} x_m. \quad . \quad (1)$$

On aura $n$ équations linéaires de cette forme en donnant à $h$ les valeurs successives $1, 2 \ldots n$.

*Résolution des équations* (1).

Si les quantités $\omega_h$ ou $\varepsilon_h$ étaient connues, il suffirait de prendre $m$ équations distinctes parmi les $n$ équations (1). Mais il vaut mieux les faire servir toutes; car $n$ étant très-grand, on peut espérer que les erreurs se balanceront.

1° Pour obtenir $x_1$, on multiplie les équations (1) par $k_{1,h}$ et l'on fait la somme, ce qui donne:

$$S\omega_h k_{1,h} = x_1 S a_{1,h} k_{1,h} + x_2 S a_{2,h} k_{1,h} + \cdots + x_m S a_{m,h} k_{1,h};$$

puis on pose

$$\left.\begin{aligned} S a_{1,h} k_{1,h} &= 1 \\ S a_{2,h} k_{2,h} &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ S a_{m,h} k_{m,h} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

d'où

$$x_1 = \mathrm{S}\omega_h k_{1,h}.$$

2° Pour obtenir $x_2$, on multiplie les équations (1) par $k_{2,h}$, et l'on fait la somme, ce qui donne

$$\mathrm{S}\omega_h k_{2,h} = x_1 \mathrm{S}a_{1,h} k_{2,h} + x_2 \mathrm{S}a_{2,h} k_{2,h} + \cdots + x_m \mathrm{S}a_{m,h} k_{2,h};$$

puis on pose

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{S}a_{2,h} k_{2,h} = 1 \\ \mathrm{S}a_{1,h} k_{2,h} = 0 \\ \mathrm{S}a_{3,h} k_{2,h} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{S}a_{m,h} k_{2,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

d'où

$$x_2 = \mathrm{S}\omega_h k_{2,h}, \text{ etc.}$$

On a donc en général

$$x_i = \mathrm{S}a_h k_{i,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

en posant

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{S}a_{i,h}\ k_{i,h} = 1 \\ \mathrm{S}a_{1,h}\ k_{i,h} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{S}a_{i-1,h} k_{i,h} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{S}a_{m,h}\ k_{i,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Les valeurs des $m$ inconnues sont donc fournies par les $m$ équations $(\alpha)$ dans lesquelles $i$ prend les valeurs successives $1 \ldots\ldots m$; chacune de ces équations renferme $n$ facteurs $k_{i,h}$, $h$ étant successivement égal à $1 \ldots\ldots n$. Ces facteurs sont déterminés par $m$ systèmes d'équations $(\gamma)$, systèmes qui renferment chacun $m$ équations.

On a donc $m^2$ équations pour déterminer les $m \,.\, n$ facteurs $k_{i,h}$; par suite il y aura $mn - m^2 = m\,(n - m)$ facteurs indépendants, ou bien il restera $m - n$ facteurs indépendants dans chaque système d'équations $(\gamma)$. C'est de ces facteurs restés arbitraires qu'on disposera pour rendre les valeurs des inconnues les plus exactes possibles.

A cet effet il faudra calculer la probabilité des erreurs $r_i$ des

$x_i$, et déterminer les facteurs $k$ par la condition que ces erreurs soient renfermées dans les limites les plus étroites possibles.

Cherchons d'abord l'expression de $r_i$.

On a

$$\begin{aligned} x_i &= \mathrm{S}\omega_h k_{i,h} \\ &= \mathrm{S}(\varepsilon_h + n_h) k_{i,h} \\ &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{i,h} + \mathrm{S}n_h k_{i,h}; \end{aligned}$$

$x_i$ est donc affecté de l'erreur

$$r_i = \mathrm{S}\varepsilon_h k_{i,h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Les déterminations précédentes de $x_1$, $x_2 \dots x_m$ sont donc affectées des erreurs respectives

$$\begin{aligned} r_1 &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{1,h} \\ r_2 &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{2,h} \\ &\cdots\cdots \\ r_m &= \mathrm{S}\varepsilon_h k_{m,h} \end{aligned}$$

1. *Calcul de* $\mathrm{Q} = \Psi(r_1, r_2 \dots r_m)\, dr_1 dr_2 \dots dr_m$.

Q est la probabilité que les erreurs $r_1$, $r_2 \dots r_m$ ont lieu en même temps.

Cette probabilité serait comme si l'on connaissait la fonction $\Psi$.

a) *Détermination de* $\Psi$.

Soit $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ la probabilité d'une erreur $\varepsilon$.

On peut poser

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int \varphi\varepsilon_1 d\varepsilon_1 \nu_1^{\varepsilon_1 k_{1,1}} \nu_2^{\varepsilon_2 k_{2,1}} \dots \nu_m^{\varepsilon_1 k_{m,1}} \times \int \varphi\varepsilon_2 d\varepsilon_2 \nu_1^{\varepsilon_2 k_{2,2}} \nu_2^{\varepsilon_2 k_{2,2}} \dots \nu_m^{\varepsilon_2 k_{m,2}} \times \dots \\ &\quad \times \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h \nu_1^{\varepsilon_h k_{1,h}} \nu_2^{\varepsilon_h k_{2,h}} \dots \nu_m^{\varepsilon_h k_{m,h}} \times \dots \times \int \varphi\varepsilon_n dr_n \nu_1^{\varepsilon_n k_{1,n}} \nu_2^{\varepsilon_n k_{2,n}} \dots \nu_m^{\varepsilon_n k_{m,n}} \\ &= \Sigma \mathrm{Q} \nu_1^{r_1} \nu_2^{r_2} \dots \nu_m^{r_m} \\ &= \int_m \Psi(r_1, r_2 \dots r_m) \nu_1^{r_1} \nu_2^{r_2} \dots \nu_m^{r_m} dr_1 . dr_2 \dots dr_m. \end{aligned}$$

Soit

$$\nu_1 = e^{\alpha_1 \sqrt{-1}}, \quad \nu_2 = e^{\alpha_2 \sqrt{-1}}, \dots \nu_m = e^{\alpha_m \sqrt{-1}};$$

on aura

$$X = \prod_1^n{}_h \left\{ \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})\sqrt{-1}} \right\}$$
$$= {}_m\int \Psi(r_1, r_2 \ldots r_m)\, e^{(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}} dr_1 . dr_2 \ldots dr_m .$$

Multiplions les deux membres par

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}},$$

puis intégrons $m$ fois de suite les limites $\pm\infty$, nous aurons (*) :

$$\Psi(r_1, r_2 \ldots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m {}_m\int_{-\infty}^{\infty} X d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}.$$

b) *Détermination de* X.

On a

$$X = \prod_1^n{}_h \left\{ \int \varphi\varepsilon_h d\varepsilon_h e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\sum_1^m{}_i(\alpha_i k_{i,h})} \right\}.$$

Faisons, pour abréger,

$$\sum_1^m{}_i(\alpha, k_{i,h}) = S_h ;$$

supprimons les indices des $\varepsilon$, que nous n'avons employés que pour plus de clarté, et posons

$$p_h = \int d\varepsilon\varphi\varepsilon e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\,S_h},$$

nous aurons

$$X = \prod_1^n{}_h p_h = p_1 . p_2 \ldots p_h \ldots p_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

En développant l'exponentielle dans la valeur de $p_h$, on obtient :

$$p_h = \int d\varepsilon\varphi\varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon S_h\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon^2 S_h^2}{2} - \frac{\varepsilon^3 S_h^3\sqrt{-1}}{6} + \frac{\varepsilon^4 S_h^4}{24} + \cdots \right\};$$

(*) Voir *Intégrales définies* de A. Meyer, p. 262, formule 121.

et si l'on pose

$$\mu_\beta = \int \varepsilon^\beta \varphi\varepsilon d\varepsilon, \quad \text{donc} \quad \mu_1 = \int \varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon, \quad \mu_2 = \int \varepsilon^2\varphi\varepsilon d\varepsilon, \text{ etc.,}$$

on aura à cause de $\int \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1$ :

$$p_h = 1 + \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \cdots = e^{\nu_h}$$

en faisant

$$\nu_h = l\left(1 + \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \cdots\right).$$

$$= \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \cdots$$

expression dans laquelle

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 3\mu_1^3,$$
$$M_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4.$$

Par suite on aura

$$p_h = e^{\mu_1 S_h\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \cdots} = e^{\nu_h};$$

et

$$X = \prod_1^n{}_h e^{\nu_h} = e^{S\nu_h}$$

$$= e^{\mu_1 \left\{S(S_h)\right\}\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{S(S_h^2)\right\} - \frac{M_3\sqrt{-1}}{6}\left\{S(S_h^3)\right\} + \frac{M_4}{24}\left\{S(S_h^4)\right\}}.$$

Soit

$$T_1 = \mu_1 S(S_h)$$
$$= \mu_1 S(S\alpha_i k_{i,h})$$
$$= \mu_1 S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})$$
$$= \mu_1 (\alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \cdots + \alpha_m S k_{m,h})$$
$$= \mu_1 \sum_1^m{}_i (\alpha_i S k_{i,h}).$$

$$T_2 = (\mu_2 - \mu_1^2)\left\{S(S_h^2)\right\},$$
$$T_3 = M_3 S(S_h^3),$$
$$T_4 = M_4 S(S_h^4);$$

la valeur de X deviendra

$$X = e^{T_1\sqrt{-1}-\frac{T_2}{2}-\frac{T_3\sqrt{-1}}{6}+\frac{T_4}{24}+\cdots}$$

$$= e^{T_1\sqrt{-1}-\frac{T_2}{2}}\left(1-\frac{T_3\sqrt{-1}}{6}+\frac{T_4}{24}+\cdots-\frac{T_3^2}{72}+\cdots\right)$$

$$= e^{\mu_1\sqrt{-1}(\alpha_1 Sk_{1,h}+\alpha_2 Sk_{2,h}+\cdots+\alpha_m Sk_{m,h})-\frac{T_2}{2}}\left(1-\frac{T_3\sqrt{-1}}{6}+\cdots\right),$$

en s'arrêtant aux termes du 4$^{me}$ degré en $\alpha_i$.

On a donc

$$\Psi(r_1, r_2 \ldots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1+\cdots+r_m\alpha_m)\sqrt{-1}} \cdot X$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1+\cdots+r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$

$$e^{\mu_1\sqrt{-1}\left\{\alpha_1 Sk_{1,h}+\cdots+\alpha_m Sk_{m,h}\right\}-\frac{1}{2}T_2} \times\left(1-\frac{T_3}{6}\sqrt{-1}+\cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_1^m \alpha_i\left(r_i-\mu_1\sum_1^n h k_{i,h}\right)-\frac{1}{2}T_2}\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{6}T_3+\cdots\right).$$

2. *Détermination de la probabilité* P *que les erreurs* $r_1, r_2 \ldots r_m$ *sont comprises entre deux limites.*

Cette probabilité sera exprimée, en sous-entendant les limites des intégrales, par :

$$P = \int_m \Psi(r_1, r_2 \ldots r_m)\, dr_1 dr_2 \ldots dr_m$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_m dr_1 \ldots dr_m \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_1^m \alpha_i\left(r_i-\mu_1\sum_1^n h k_{i,h}\right)-\frac{T_2}{2}} \times\left(1-\frac{T_3}{6}\sqrt{-1}+\cdots\right).$$

A la place des variables $r_i$, $\alpha_i$ introduisons les nouvelles variables $\rho_i$, $z_i$, données par les équations

$$r_i - \mu_1 \sum_1^n h k_{i,h} = \rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

$$dr_i = d\rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}$$

$$\alpha_i = \frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}}, \qquad d\alpha_i = \frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}},$$

$\frac{T_2}{2}$, $T_3$, etc., deviendront des fonctions de $z_i$ que nous désignerons par $z_2$, $z_3$, etc.; et nous aurons

$$P=\frac{1}{\pi^m}\int d\rho_1 d\rho_2 \dots dS_m \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 dr_2 \dots dr_m e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma \rho_i z_i - z_2}\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{6}Z_3+\dots\right).$$

*Séparation des variables.*

On a

$$\begin{aligned}
\frac{T_2}{2} &= \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{ S(S_h^2)\right\}\\
&= \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{ S\left[\Sigma\alpha_i k_{i,h}\right]^2\right\}\\
&= \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{ S\left[\alpha_1 k_{1,h}+\alpha_2 k_{2,h}+\dots+\alpha_m k_{m,h}\right]^2\right\}\\
&= \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{ S\left[\alpha_1^2 k_{1,h}^2+\alpha_2^2 k_{2,h}^2+\dots+\alpha_m^2 k_{m,h}^2\right.\right.\\
&\qquad +2\alpha_1(\alpha_2 k_{1,h}k_{2,h}+\dots+\alpha_m k_{1,h}k_{m,h})\\
&\qquad +2\alpha_2(\alpha_3 k_{2,h}k_{3,h}+\dots+\alpha_m k_{2,h}k_{m,h})\\
&\qquad +\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad \left.\left.+2\alpha_{m-1}\alpha_m k_{m-1,h}k_{m,h}\right]\right\}\\
&= \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left\{ \alpha_1^2 Sk_{1,h}^2+\alpha_2^2 Sk_{2,h}^2+\dots+\alpha_m^2 Sk_{m,h}^2\right.\\
&\qquad +2\alpha_1(\alpha_2 Sk_{1,h}k_{2,h}+\dots+\alpha_m Sk_{1,h}k_{m,h})\\
&\qquad +2\alpha_2(\alpha_3 Sk_{2,h}k_{3,h}+\dots+\alpha_m Sk_{2,h}k_{m,h})\\
&\qquad +\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad \left.+2\alpha_{m-1}\alpha_m Sk_{m-1,h}k_{m,h}\right\}.
\end{aligned}$$

Faisons pour abréger

$$Sk_{i,h}k_{i',h}=b_{i,i'}=b_{i',i};$$

et par suite

$$Sk_{i,h}^2=b_{i,i};$$

puis remplaçons $\alpha_i$ par

$$\frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}};$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
Z_2 = \frac{T_2}{2} &= z_1^2 b_{1,1} + z_2^2 b_{2,2} + \cdots + z_m^2 b_{m,m} \\
&\quad + 2z_1(z_2 b_{1,2} + z_3 b_{1,3} + \cdots + z_m b_{1,m}) \\
&\quad + 2z_2(z_3 b_{2,3} + \cdots + z_m b_{2,m}) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + 2z_{m-1} z_m b_{m-1,m} \\
&= z_1^2 b_{1,1} + 2z_1 z_2 b_{1,2} + 2z_1 z_3 b_{1,1} + 2z_1 z_4 b_{1,4} + \cdots \\
&\quad + z_2^2 b_{2,2} + 2z_2 z_3 b_{2,3} + 2z_2 z_4 b_{2,4} + \cdots \\
&\quad + z_3^2 b_{3,3} + 2z_3 z_4 b_{3,4} + \cdots \\
&\quad + z_2^2 b_{4,4} + \cdots
\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= z_1 h_{1,1} + z_2 h_{1,2} + z_3 h_{1,3} + \cdots + z_m h_{1,m} + t_1\sqrt{-1} \\
\beta_2 &= z_2 h_{2,2} + z_3 h_{2,3} + \cdots + z_m h_{2,m} + t_2\sqrt{-1} \\
\beta_3 &= z_3 h_{3,3} + \cdots + z_m h_{3,m} + t_3\sqrt{-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_m &= z_m h_{m,m} + t_m\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Élevant au carré, faisant la somme, et posant

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 + (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2) = E',$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
E' &= 2h_{1,1}t_1 z_1\sqrt{-1} + 2(h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2)\, z_2\sqrt{-1} + \cdots \\
&\quad + 2(h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m)\, z_m\sqrt{-1} + \cdots \\
&\quad + z_1^2 h_{1,1}^2 + 2z_1 z_2 h_{1,1} h_{1,2} + 2z_1 z_3 h_{1,1} h_{1,3} \\
&\quad + z_2^2(h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2) + 2z_2 z_3(h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3}) \\
&\quad + z_3^2(h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2) \\
&\quad + 2z_1 z_4 h_{1,1} h_{1,4} \\
&\quad + 2z_2 z_4(h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}) \\
&\quad + 2z_3 z_4(h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4}) \\
&\quad + z_4^2(h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2) \\
&\quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Identifions $e^{-E}$ et $e^{-E'}$ : pour cela, nous devrons poser

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= h_{1,1}t_1 \\ \rho_2 &= h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_m &= h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (e)$$

$$\left.\begin{aligned} &b_{1,1} = h_{1,1}^2,\ b_{1,2} = h_{1,1}h_{1,2},\ b_{1,3} = h_{1,1}h_{1,3},\ b_{1,4} = h_{1,1}h_{1,4}, \\ &b_{2,2} = h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2,\ b_{2,3} = h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3},\ b_{2,4} = h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}, \\ &b_{3,3} = h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2,\ b_{3,4} = h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4}, \\ &b_{4,4} = h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} (f)$$

On aura donc :

$$e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma\rho_i z_i - z_2} = e^{-(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_m^2+t_1+t_2+\cdots+t_m)}.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= dz_1 h_{1,1} & d\rho_1 &= dt_1 h_{1,1} \\ d\beta_2 &= dz_2 h_{2,2} & d\rho_2 &= dt_2 h_{2,2} \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ d\beta_m &= dz_m h_{m,m} & d\rho_m &= dt_m h_{m,m}\,; \end{aligned}$$

et par suite :

$$dz_1 dz_2 \cdots dz_m d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_m = d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_m dt_1 dt_2 \cdots dt_m\,;$$

d'où enfin

$$P = \frac{1}{\pi^m} \int_m dt_1 dt_2 \cdots dt_m e^{-(t_1^2+t_2^2+\cdots t_m^2)}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 \cdots d\beta_m e^{-(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_m^2)} \left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \cdots\right).$$

*Effectuons les intégrations relatives aux* $\beta$.

Soit

$$R = 1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \frac{1}{24} Z_4 - \frac{1}{72} Z_3^2\,;$$

et exprimons cette quantité en fonctions des $\beta_i$ et des $t_i$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
T_3 &= M_3 S(s_h^3) \\
&= M_3 \sum_1^n S_h \left(\sum_1^m \alpha k_{i,h}\right)^3 \\
&= M_3 \sum_1^n S_h (\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^3 \\
&= M_3 \left[\Sigma(\alpha_i^3 S k_{i,h}^3) + 3\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) \right. \\
&\qquad \left. + 6\Sigma(\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h})\right],
\end{aligned}$$

où nous supposons $i < i' < i''$.

Donc

$$Z_3 = \frac{M_3}{\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}\right]^3} \left\{ \begin{array}{r} \Sigma(z_i^3 S k_{i,h}^3 + 3\Sigma(z_i^2 z_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) \\ + 6\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}) \end{array} \right\}.$$

De même on a

$$\begin{aligned}
T_4 &= M_4 S(s_h^4) \\
&= M_4 S(\Sigma \alpha_i k_{i,h})^4 \\
&= M_4 S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^4 \\
&= M_4 \left[\Sigma \alpha_i^4 S k_{i,h}^4 + 4\Sigma(\alpha_i^3 \alpha_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h}) \right. \\
&\qquad + 6\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2) \\
&\qquad + 12\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h}) \\
&\qquad \left. + 24\Sigma(\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} \alpha_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h})\right]
\end{aligned}$$

où nous supposons $i < i' < i'' < i'''$.

Donc

$$Z_4 = \frac{M_4}{\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}\right]^4} \left\{ \begin{array}{r} \Sigma z_i^4 S k_{i,h}^2 + 4\Sigma(z_i^3 z_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h}) \\ + 6\Sigma(z_i^2 z_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2) \\ + 12\Sigma(z_i^2 z_{i'} z_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h}) \\ + 24\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} z_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h}) \end{array} \right\}.$$

Si l'on exprime les $z_i$ en fonction de $\beta_i$ et de $t_i$, les Z seront des sommes de termes de la forme $G\beta_i^a t_i^b$ ; et par suite on aura à intégrer relativement à $\beta$ des expressions

$$G t_i^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta_i^2} \beta_i^a d\beta_i ;$$

or cette dernière intégrale est nulle quand $a$ est impair; et elle est égale à $\frac{1.3...(a-1)}{2.2...2}\sqrt{\pi}$, quand $a$ est pair.

On aura par suite :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 ... d\beta_m e^{-(\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_m^2)} R = (\sqrt{\pi})^m \left\{ 1 - \frac{1}{6} B + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{72} B_6 \right\},$$

$B_5$ étant une fonction des $t_i$ qui ne renferme que les puissances 1re, 2me et 3me de ces variables,

$B_4$ étant une fonction des $t_i$ qui ne renferme que les puissances 0, 1, 2, 3 et 4 de ces variables,

$B_6$ étant une fonction des $t_i$ qui ne renferme que les puissances 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 de ces variables.

Si l'on substitue l'expression précédente dans celle de P, on aura :

$$P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_m dt_1 dt_2 ... dt_m e^{-(t_2^1+t_2^2+...+t_m^2)} \left( 1 - \frac{1}{6} B_5 + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{72} B_6 \right).$$

Remarquons que $B_5$ provient de $Z_5$, où il n'entre que des produits de degrés impairs des $z_i$, et où il n'est resté que des puissances paires de $\beta_i$; de sorte que $B_5$ ne renfermera que des puissances impaires des $t_i$; il disparaîtra donc, puisque les intégrales seront prises entre les limites de la forme $\pm c$.

De même les puissances impaires des $t_i$ disparaîtront dans $B_4$ et $B_6$, et avec elles les termes imaginaires.

Tous les termes de ces fonctions acquièrent des diviseurs qui contiennent les carrés des sommes finies des $k_{i,h}$ qui sont, dans chaque somme, au nombre de $n$. Si $n$ est très-grand, chaque terme sera donc de l'ordre $\frac{1}{n}$; mais il y a $m$ de ces termes, de sorte que l'ensemble des termes n'est que de l'ordre $\frac{m}{n}$.

Si l'on veut négliger la partie de l'intégrale qui renferme les termes $B_4$ et $B_6$, il faudra donc s'assurer si $\frac{n}{m}$ est un grand nombre; s'il est assez grand, surtout, pour contre-balancer l'influence des puissances de $\gamma$, qui entre dans ces termes jusqu'à la 6me puissance.

Il faudra, par conséquent, que $\gamma^6 . \frac{m}{n}$ reste de l'ordre des termes qu'on croira pouvoir négliger.

S'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait être certain de quelque exactitude que si $\gamma$ était assez petit.

En admettant que ces termes soient négligeables, nous aurons :

$$P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_m dt_1\, dt_2 \ldots dt_m e^{-(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2)}.$$

Intégrons sous la condition que

$$u^2 = t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2 < \gamma^2,$$

de sorte qu'aucun des termes $t$ ne peut sortir des limites $\pm\gamma$.

En opérant successivement sur les variables $t_i$, on aura à intégrer chacune d'elles entre les limites

$$t_i = \pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{i-1}^2};$$

ou bien on pourra prendre chaque intégrale entre

$$0 \text{ et } +\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - \cdots - t_{i-1}^2},$$

et doubler le résultat.

Si nous posons

$$t_m = \sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2},$$

d'où

$$dt_m = \frac{u\,du}{t_m},$$

au lieu de

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma dt_m e^{-(t_1^2+\cdots t_m^2)} \int_{m-1} dt_1 \ldots dt_{m-1},$$

nous pourrons écrire

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\,du\, e^{-u^2} \int_{m-1} \frac{dt_1 \ldots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\,du\, e^{-u^2}.\, V,$$

en posant

$$V_{m-1} = \int \frac{dt_1 - dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{u^2}} dt_1 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2}} dt_2 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2-t_2^2}} dt_3 \cdots \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2-\cdots-t_{m-1}^2}} dt_{m-2}(u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour effectuer toutes ces intégrations, qui sont de la forme

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\,(a - t^2)^{\frac{\delta}{2}},$$

rappelons-nous que

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

et que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

et posons

$$a - t^2 = ax; \quad t = \sqrt{a}\sqrt{1-x}; \quad dt = -\sqrt{a}\,\frac{dx}{2\sqrt{1-x}};$$

nous aurons

$$\int_0^{\sqrt{a}} at\,(a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2}\int_0^1 x^{\frac{\delta+1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}+1\right)}.$$

En faisant successivement

$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-2}^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-3}^2} = \sqrt{a}$$

. . . . . .

$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{u^2 - t_1^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{u^2} = \sqrt{a}$$

nous trouverons :

$$V=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot u^{m-2}$$

$$=u^{m-2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m}\frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)};$$

d'où

$$P=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^{\gamma}u^{m-1}e^{-u^2}du.$$

Reste à effectuer cette dernière intégration.

*Intégration de* $\int_0^{\gamma}u^{m-1}e^{-u^2}du.$

En intégrant par parties, on trouve successivement :

$$\int u^{m-1}du\,.\,e^{-u^2}=-\frac{1}{2}\int u^{m-2}\,.\,-2ue^{-u^2}du$$

$$=-\frac{1}{2}\int u^{m-2}d\,.\,e^{-u^2}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-2}+\frac{m-2}{2}\int u^{m-3}e^{-u^2}du.$$

$$\int u^{m-3}e^{-u^2}du=-\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-4}+\frac{m-4}{2}\int u^{m-5}e^{-u^2}du.$$

$$\int u^{m-5}e^{-u^2}du=-\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-6}+\frac{m-6}{2}\int u^{m-7}e^{-u^2}du.$$

. . . . . .

$$\int u^{m-2i-1}e^{-u^2}du=-\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-2i-2}+\frac{m-2i-2}{2}u^{m-2i-3}e^{-u^2}du.$$

D'où l'on déduit, par des substitutions successives

$$\int u^{m-1}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-2} + \frac{m-2}{2}\int e^{-u^2}u^{m-3}du$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-2} + \frac{m-2}{2}e^{-u^2}u^{m-4}$$

$$+ \frac{(m-2)(m-4)}{2^2}\int e^{-u^2}u^{m-5}du$$

$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-u^2}u^{m-2} - \frac{m-2}{2}e^{-u^2}u^{m-4}$$

$$- \frac{(m-2)(m-4)}{2^2}e^{-u^2}u^{m-6} - \ldots$$

$$- \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2i)}{2^{i+1}}e^{-u^2}u^{m-2i-2}$$

$$+ \frac{(m-2)\ldots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int e^{-u^2}u^{m-2i-3}du\,;$$

et par suite

$$\int_0^\gamma u^{m-1}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\left\{\gamma^{m-2} + \frac{m-2}{2}\gamma^{m-4} + \frac{(m-2)(m-4)}{2^2}\gamma^{m-6} + \ldots\right.$$

$$+ \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2i)}{2^{i+1}}\gamma^{m-2i-2}$$

$$\left. + \frac{(m-2)\ldots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int_0^\gamma u^{m-2i-3}e^{-u^2}du\right\}.$$

1° Soit

$$m = 2g$$

et

$$i = g - 2.$$

On aura :

$$m - 2i = 4\,;$$

$$m - (2i+2) = 2\,;$$

$$m - (2i+3) = 1.$$

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\frac{2g-2}{2}\frac{2g-4}{4}\cdots\frac{4}{2}\frac{2}{2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\frac{2g-2}{2}\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^{2g-4}}{\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2}}+\cdots+\frac{\gamma^2}{2}+1\right]$$

$$+\left(\frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}+1\right]+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)$$

2° Soit

$$m=2g-1;$$
$$i=g-2;$$
$$m-(2i+2)=1;$$
$$m-(2i+3)=0.$$

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma^{2g-5}}{\frac{2g-5}{2}\cdot\frac{2g-7}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\gamma}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\gamma e^{-u^2}du$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma}{\Gamma\frac{3}{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)\int_0^\gamma e^{-u^2}du,$$

en vertu de la formule connue

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

Soit quand

$$m=2g, \qquad \mathrm{P}=p_{2g},$$

ou quand

$$m=2g-1, \quad \mathrm{P}=p_{2g-1};$$

la valeur de P deviendra, dans chacun de ces deux cas :

$$\left.\begin{aligned} p_{2g}&=\frac{2}{\Gamma\frac{2g}{2}}\int_0^{\gamma}u^{2g-2}e^{-u^2}du \\ &=e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}+1\right]+1 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{2g-1}&=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}\int_0^{\gamma}u^{2g-2}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma}e^{-u^2}du \\ &-e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}+\frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-5}{2}\right)}+\cdots+\frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

On voit que $p_{2g}$ et $p_{2g-1}$ diminuent quand le nombre $m$ des inconnues augmente. (A) et (B) expriment les probabilités que les $m$ erreurs

$$\rho_i=t_1h_{1,i}+t_2h_{2,i}+t_3h_{3,i}+\cdots+t_ih_{i,i}$$

ne peuvent s'étendre au delà des limites assignées par la condition

$$t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2<\gamma^2,$$

condition qui ne permet à aucune des variables $t_i$ d'excéder $\pm\gamma$.

Cherchons les limites extrêmes de $\rho_i$.

Soit

$$t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2=u,$$

et cherchons la plus grande valeur de

$$\rho_i = t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \cdots + t_i h_{i,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Posons

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_i^2 = u - t_{i+1}^2 - t_{i+2}^2 - \cdots - t_m^2 = \nu; \quad . \quad (2)$$

nous devrons regarder $\nu$ comme constant relativement aux $i$ premières variables $t$, $t_i$ étant considéré comme fonction des $i - 1$ variables qui le précèdent.

Soit $t_{i'}$, l'une quelconque de ces premières variables : nous devons, pour le maximum de $\rho_i$, poser $\frac{d\rho_i}{dt_{i'}} = 0$, ou, en vertu de (1):

$$h_{i',i} + h_{i,i} \frac{dt_i}{dt_{i'}} = 0;$$

de plus, l'équation (2) donne :

$$t_{i'} dt_{i'} + t_i dt_i = 0;$$

d'où l'on déduit

$$h_{i',i} + h_{i,i} \left( - \frac{t_{i'}}{t_i} \right) = 0, \text{ ou } \frac{t_{i'}}{t_i} = \frac{h_{i',i}}{h_{i,i}}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Donc, pour le maximum de $\rho_i$, il faut que les $t_{i'}$ soient proportionnels aux $h_{i',i}$ correspondants; posons, par suite :

$$t_{i'} = a h_{i',i}$$
$$t_{i'}^2 = a^2 h_{i',i}^2;$$

faisons successivement $i' = 1, 2 \ldots i$, et ajoutons; nous aurons :

$$a^2 (h_{i,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2) = \nu,$$

ou

$$a^2 b_{i,i} = \nu,$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}.$$

Le maximum de $\rho_i$ sera par conséquent :

$$\begin{aligned}\rho_i &= t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \cdots + t_i h_{i,i} \\ &= a(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2) \\ &= ab_{i,i} = b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}\sqrt{\nu b_{i,i}}.\end{aligned}$$

Or comme $\nu = u - t_{i+1}^2 - \cdots - t_m^2$, la limite supérieure de $\nu$ sera $u$, ce que suppose que tous les $t$, de $t_{i+1}$ à $t_m$, sont nuls.

Les limites extrêmes de $\rho_i$ sont donc

$$\pm\sqrt{ub_{i,i}},$$

et $u$ est nécessairement $< \gamma^2$.

Pour une probabilité déterminée par la constante $\gamma$, cette constante fixe l'étendue des limites des erreurs $\rho_i$ sous la forme

$$-\gamma\sqrt{b_{i,i}} < \rho_i < \gamma\sqrt{b_{i,i}},$$

ou

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2} < \rho_i < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2},$$

ou bien, en remplaçant $\rho_i$ par sa valeur :

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2} < \frac{r_i - \mu_1 \mathrm{S}k_{i,h}}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}.$$

(A) et (B) expriment donc les probabilités que les erreurs $r_i$ sont renfermées entre les limites

$$\mu_1 \mathrm{S}k_{i,h} - \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r_i < \mu_1 \mathrm{S}k_{i,h} + \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'erreurs constantes, ou lorsque $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$, on a $\mu_1 = 0$, et les probabilités (A) et (B) seront celles des limites

$$-\gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2\mu_2} < r_i < \gamma\sqrt{\mathrm{S}k_{i,h}^2}\sqrt{2\mu_2}.$$

*Cherchons les valeurs des facteurs* $\mathrm{k}_{i,h}$, qui réduisent les erreurs $r_i$ des $x_i$ aux plus étroites limites possibles, pour une probabilité donnée ; ou bien, les limites étant données, cherchons les valeurs

de ces facteurs qui rendront la plus grande possible la probabilité que ces erreurs ne sortent pas de ces limites.

On voit d'abord que les limites des $r_i$ seront les plus étroites possibles quand les $k_{i,h}$ satisferont à la condition

$$\mathrm{S}k_{i,h}^2 = \text{min.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Désignons par $\mathrm{A}_{i,h}$ ce que deviennent les facteurs $k_{i,h}$, déterminés par la méthode des moindres carrés : la condition précédente (4) sera remplie quand on aura

$$k_{i,h} = \mathrm{A}_{i,h}.$$

Démonstration. Les équations de condition étant

$$x_1 a_{1,h} + x_2 a_{2,h} + \cdots + x_i a_{i,h} + \cdots = \omega_h$$

la méthode des moindres carrés fournira les $m$ équations

$$\begin{aligned}
&x_1 \mathrm{S}a_{1,h}a_{1,h} + x_2 \mathrm{S}a_{1,h}a_{2,h} + \cdots + x_i \mathrm{S}a_{1,h}a_{i,h} + \cdots = \mathrm{S}a_{1,h}\omega_h \\
&x_1 \mathrm{S}a_{2,h}a_{1,h} + x_2 \mathrm{S}a_{2,h}a_{2,h} + \cdots + x_i \mathrm{S}a_{2,h}a_{i,h} + \cdots = \mathrm{S}a_{2,h}\omega_h \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \

Or, comme nous avons posé

$$\begin{aligned}
Sa_{1,h}k_{i,h} &= 0 \quad \text{et par suite} \quad Sa_{1,h}A_{i,h} = 0\\
Sa_{2,h}k_{i,h} &= 0 \quad \text{»} \quad Sa_{2,h}A_{i,h} = 0\\
&\cdots\cdots \quad\quad\quad\quad \cdots\cdots\\
Sa_{i,h}k_{i,h} &= 1 \quad \text{»} \quad Sa_{i,h}A_{i,h} = 1\\
&\cdots\cdots \quad\quad\quad\quad \cdots\cdots\\
Sa_{m,h}k_{i,h} &= 0 \quad \text{»} \quad Sa_{m,h}A_{i,h} = 0,
\end{aligned}$$

nous en déduirons, en retranchant membre à membre, et multipliant respectivement par les facteurs $B_1$, $B_2$ ... $B_m$ :

$$\begin{aligned}
Sa_{1,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_1 &= 0\\
Sa_{2,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_2 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
Sa_{m,h}(k_{i,h} - A_{i,h})B_m &= 0;
\end{aligned}$$

et en ajoutant

$$S\left\{\sum_1^m {}_{i'} B_{i'} a_{i',h}(k_{i,h} - A_{i,h})\right\} = 0,$$

équation que nous pouvons écrire, en vertu de $(\alpha)$ :

$$S\left\{A_{i,h}(k_{i,h} - A_{i,h})\right\} = 0,$$

ou

$$SA_{i,h}k_{i,h} = SA_{i,h}^2;$$

d'où nous déduirons

$$\begin{aligned}
Sk_{i,h}^2 - 2SA_{i,h}k_{i,h} &= Sk_{i,h}^2 - 2SA_{i,h}^2\\
Sk_{i,h}^2 - SA_{i,h}^2 &= Sk_{i,h}^2 - 2Sk_{i,h}A_{i,h} + SA_{i,h}^2,
\end{aligned}$$

et enfin

$$Sk_{i,h}^2 = SA_{i,h}^2 + S(k_{i,h} - A_{i,h})^2.$$

$Sk_{i,h}^2$ est donc un minimum pour

$$k_{i,h} = A_{i,h}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit par là que si l'on détermine les inconnues par la méthode des moindres carrés, les erreurs $r_i$ des $x_i$ seront les plus

étroites possibles; et alors (A) et (B) seront les probabilités que

$$\mu_1 SA_{i,h} - \gamma\sqrt{SA_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)} < r_i < \mu_1 SA_{i,h} + \gamma\sqrt{SA_{i,h}^2}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Mais si l'on reprend la valeur de $\gamma$

$$\gamma = \frac{\rho_i}{\sqrt{Sk_{i,h}^2}},$$

on verra aussi que $\gamma$ et, par suite, les probabilités (A) et (B) seront les plus grandes possibles quand $Sk_{i,h}^2$ sera un minimum, ou quand $k_{i,h}$ sera égal à $A_{i,h}$.

Ainsi donc, un système de limites étant choisi, la probabilité que les erreurs n'en sortiront pas sera la plus grande possible quand on aura déterminé les inconnues par la méthode des moindres carrés.

Les quantités $\mu_1$ et $\mu_2$ se déduisent des observations; leurs expressions sont

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_1' + \cdots + \varepsilon_n'}{n}, \qquad \mu_2 = \frac{\varepsilon_1'^2 + \cdots + \varepsilon_n'^2}{n},$$

et $\varepsilon_i'$ est ce que devient $\varepsilon_i$, quand on remplace $x_i$ par sa valeur obtenue en changeant les facteurs $k_{i,h}$ en $A_{i,h}$.

### Erreur probable.

Il s'agit de déterminer les limites des erreurs qui répondent à une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

1° *Une seule inconnue.*

On devra poser, dans ce cas,

$$\gamma = 0{,}4769...$$

Alors en effet on aura :

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,4769} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} :$$

probabilité que l'erreur $r$ de $x$ est comprise entre les limites

$$\mu_1 \mathrm{SA}_h \pm 0,4769 \sqrt{\mathrm{SA}_h^2} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

2° *Deux inconnues.*

Dans ce cas

$$\gamma = 0,85255461$$

donne

$$p_1 = 1 - e^{-\gamma^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi dès qu'il y a deux inconnues, les limites comprennent un intervalle presque double; et l'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ que l'erreur $r_i$ de $x_i$ est comprise entre

$$\mu_1 \mathrm{SA}_{i,h} \pm 0,852... \sqrt{\mathrm{SA}_{i,h}^2} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Si l'on veut que les erreurs puissent varier, on dira que $\frac{1}{2}$ est la probabilité de l'ensemble des systèmes

$$r_1 - \mu_1 \mathrm{SA}_{1,h} = t_1 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\, \mathrm{SA}_{1,h}^2}$$

$$r_2 - \mu_1 \mathrm{SA}_{2,h} = t_1 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2) \frac{(\mathrm{SA}_{1,h} \mathrm{A}_{2,h})^2}{\mathrm{SA}_{1,h}^2}}$$

$$+ t_2 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2) \left[ \mathrm{SA}_{2,h}^2 - \frac{(\mathrm{SA}_{1,h} \mathrm{A}_{2,h})^2}{\mathrm{SA}_{1,h}^2} \right]},$$

les variables $t_1$ et $t_2$ étant assujetties à la condition

$$t_1^2 + t_2^2 < (0,8525...)^2 < 0,69314718...;$$

les quantités sous les radicaux sont déterminées par les relations

entre les $h$ et les $b$, en remplaçant les facteurs $k$ par les facteurs A dans les expressions

$$b_{i,i'} = \mathrm{S} k_{i,h} k_{i',h}.$$

3° *Valeurs de* $\gamma$ *pour* 1 *à* 8 *inconnues, quand* $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
m &= 1, \quad \gamma_1 = 0{,}47693 \\
m &= 2, \quad \gamma_2 = 0{,}83255 = 1{,}7456\,\gamma_1 \\
m &= 3, \quad \gamma_3 = 1{,}0876 \;\; = 2{,}2814\,\gamma_1 \\
m &= 4, \quad \gamma_4 = 1{,}29551 = 2{,}7164\,\gamma_1 \\
m &= 5, \quad \gamma_5 = 1{,}4750 \;\; = 3{,}0927\,\gamma_1 \\
m &= 6, \quad \gamma_6 = 1{,}65525 = 3{,}4287\,\gamma_1 \\
m &= 7, \quad \gamma_7 = 1{,}7812 \;\; = 3{,}7547\,\gamma_1 \\
m &= 8, \quad \gamma_8 = 1{,}91625 = 4{,}0178\,\gamma_1.
\end{aligned}$$

## III

### EXTENSION DU THÉORÈME DE BERNOUILLI AU BINOME DES FACTORIELLES.

—

Soit $a + b = c$, nous savons, par la théorie des factorielles, que

$$\frac{(a+b)^{\mu/-1}}{c^{\mu/-1}} = \mathrm{S}\frac{\mu!}{m!\,n!}\cdot\frac{a^{m/-1}b^{n/-1}}{c^{\mu/-1}} = 1,$$

et que le terme général de ce développement est

$$\mathrm{T}_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a^{m/-1}b^{n/-1}}{c^{\mu/-1}}.$$

Or il est facile de s'assurer (voir n° 22) que $\mathrm{T}_n$ est la probabilité d'extraire en $\mu = m + n$ tirages $m$ boules blanches et $n$ boules noires, d'une urne contenant $c = a + b$ boules, dont $a$ blanches et $b$ noires, lorsque l'on ne remet pas dans l'urne les boules extraites.

Les probabilités d'extraire en $\mu$ tirages $m + l$ blanches et $n - l$ noires, ou bien $m - l$ blanches et $n + l$ noires seront respectivement :

$$\mathrm{T}_{n-l} = \frac{\mu!}{m+l!\,n-l!}\cdot\frac{a^{m+l/-1}b^{n-l/-1}}{c^{\mu/-1}}$$

$$\mathrm{T}_{n+l} = \frac{\mu!}{m-l!\,n+l!}\cdot\frac{a^{m-l/-1}b^{n-l/-1}}{c^{\mu/-1}}.$$

La somme

$$\mathrm{P} = \mathrm{T}_{n-l} + \mathrm{T}_{n-l+1} + \cdots + \mathrm{T}_{n-1} + \mathrm{T}_n + \mathrm{T}_{n+1} + \cdots + \mathrm{T}_{n+l-1} + \mathrm{T}_{n+l}$$

est la probabilité qu'en $\mu$ tirages on extraira au plus $m + l$ et au moins $m - l$ boules blanches.

Soient $m = k$, $n = h$ les valeurs de $m$ et de $n$ propres à rendre $T_n$ un maximum ; $M_n$ ce maximum, $M_{n-l}$, $M_{n+l}$ les termes qui le précèdent ou le suivent de $l$ rangs; la somme

$$Q = M_{n-l} + M_{n-l+1} + \cdots + M_{n-1} + M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{n+l-1} + M_{n-l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

exprimera la probabilité qu'en $\mu$ tirages le nombre des boules blanches sorties sera compris entre $k + l$ et $k - l$.

I. *Détermination de* k, h, $M_n$. Comparons les trois valeurs

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}\frac{a^{m-1}b^{n-1}}{c^{\mu-1}};$$

$$T_{n-1} = \frac{\mu!}{m+1!\,n+1!}\frac{a^{m+1-1}b^{n-1-1}}{c^{\mu-1}} = T_n \cdot \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1};$$

$$T_{n+1} = \frac{\mu!}{m-1!\,n-1!}\frac{a^{m-1-1}b^{n+1-1}}{c^{\mu-1}} = T_n \frac{m}{n+1}\frac{b-n}{a-m+1};$$

les valeurs de $m$ et de $n$ propres à rendre $T_n$ un maximum se déduiront de :

$$T_n > T_n \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1}$$

$$T_n > T_n \frac{m}{n+1}\cdot\frac{b-n}{a-m+1}$$

ou bien

$$1 > \frac{n}{m+1}\frac{a-m}{b-n+1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$1 > \frac{m}{n+1}\frac{b-n}{a-m+1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Éliminons d'abord $m$ et $a$ en remplaçant $m$ par $\mu - n$ et $a$ par $c - b$, nous aurons

$$n > \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2} - 1$$

$$n < \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2}.$$

Donc

$$n = \frac{(\mu + 1)(b + 1)}{c + 2} - \delta, \quad \delta \text{ étant} < 1,$$

et par suite la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2}$ sera la quantité cherchée $h$.

Éliminons ensuite $n$ et $b$ des équations (1) et (2) nous trouverons

$$m > \frac{(\mu + 1)(a + 1)}{c + 2} - 1$$

$$m < \frac{(\mu + 1)(a + 1)}{c + 2}.$$

Donc

$$m = \frac{(\mu + 1)(a + 1)}{c + 2} - \delta', \quad \delta' \text{ étant} < 1,$$

et par suite la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}$ sera la quantité cherchée $k$.

Les relations précédentes fournissent, pour les valeurs particulières $k$ et $h$ de $m$ et $n$ :

$$\frac{b}{c+2} = \frac{n}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1}$$

$$\frac{a}{c+2} = \frac{m}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1};$$

ou bien

$$\frac{b}{c} - \frac{2b}{c(c+2)} = \frac{n}{\mu} - \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{2a}{c(c+2)} = \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1},$$

Comme $a, b, m, n, c, \mu$ et $l^2$ sont des quantités du même ordre que $\mu$, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$, on pourra écrire :

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{\mu}, \quad \frac{a}{c} = \frac{m}{\mu},$$

d'où aussi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{b-n}{c-\mu}=\frac{n}{\mu}, \qquad \frac{a-m}{c-\mu}=\frac{m}{\mu},\\
&\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}=1, \qquad \frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}=1,\\
&\frac{mn}{\mu^2}=\frac{ab}{c^2}, \qquad (a-m)(b-n)=\frac{ab}{c^2}(1-\mu)^2,\\
&\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}=1, \qquad \frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}=1.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

Déterminons maintenant $M_n$. Nous avons :

$$T_n=\frac{\mu!}{m!\,n!}\frac{a^{m-1}b^{n-1}}{c^{\mu-1}}=\frac{\mu!}{m!\,n!}\frac{a!}{a-m!}\frac{b!}{b-n!}\frac{c-\mu!}{c!}$$

et comme

$$x!=x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\ (*),$$

il vient

$$T_n=\left(\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\right)^m\left(\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\right)^a\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\right)^b$$
$$\times\sqrt{\frac{\mu ab\,(c-\mu)}{2\pi cmn\,(a-m)(b-n)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Pour $m=k$, $n=h$, $T_n$ devient $M_n$, et, par suite des équations $(a)$, qui sont relatives à ces valeurs, on aura :

$$M_n=\sqrt{\frac{\mu ab\,(c-\mu)}{2\pi cmn\,(a-m)(b-n)}}=\sqrt{\frac{c^3}{2\pi\mu ab\,(c-\mu)}} \quad . \quad . \quad (8)$$

Donc la formule (7) pourra s'écrire sous la forme suivante, dans laquelle $m$ et $n$ reprennent leurs valeurs générales :

$$T_n=\left(\frac{\mu}{m}\frac{a-m}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{n}\frac{b-n}{c-\mu}\right)^n\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\right)^a\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\right)^b M_n$$

(*) Voir la note I à la fin de l'ouvrage.

d'où

$$T_{n-l}=\left[\frac{\mu}{m+l}\frac{a-m-l}{c-\mu}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n-l}\frac{b-n+l}{c-\mu}\right]^{n-l}\left[\frac{a}{c}\frac{c-\mu}{a-m-l}\right]^{a}\left[\frac{b}{c}\frac{c-\mu}{b-n+l}\right]^{b}M_n$$

$$=\left[\frac{\mu}{m}\frac{a-\mu}{c-m}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{m}}\cdot\frac{1-\frac{l}{a-m}}{1}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{n}}\cdot\frac{1+\frac{l}{b-n}}{1}\right]^{n-l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\frac{c-\mu}{a-m}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{b}{c}\frac{c-\mu}{b-n}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{b-n}}\right]^{b}M_n.$$

$$T_{n+l}=\left[\frac{m}{\mu}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{m}}\cdot\frac{1-\frac{l}{a-m}}{1}\right]^{m-l}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{n}}\cdot\frac{1-\frac{l}{b-n}}{1}\right]^{n+l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{b-n}}\right]^{b}M_n.$$

Donc pour

$$m=k,\quad n=h,$$

et en ayant égard aux relations $(a)$, $T_{n-l}$ et $T_{n+l}$ deviennent

$$M_{n-l}=\left[\frac{1-\frac{l}{a-m}}{1+\frac{l}{m}}\right]^{m+l}\left[\frac{1+\frac{l}{b-n}}{1+\frac{l}{n}}\right]^{n-l}\left[\frac{1}{1-\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{1}{1+\frac{l}{b-n}}\right]^{b}M_n.$$

$$M_{n+l}=\left[\frac{1+\frac{l}{a-m}}{1+\frac{l}{n}}\right]^{m+l}\left[\frac{1-\frac{l}{b-n}}{1+\frac{l}{n}}\right]^{n+l}\left[\frac{1}{1+\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{1}{1-\frac{l}{b-n}}\right]^{b}M_n.$$

Prenant les logarithmes, nous aurons :

$$\begin{aligned}
\text{l. M}_{n-l} &= (m+l)\left\{\text{l.}\left(1-\frac{l}{a-m}\right)-\text{l.}\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}\\
&\quad+(n-l)\left\{\text{l.}\left(1+\frac{l}{b-n}\right)-\text{l.}\left(1-\frac{l}{n}\right)\right\}\\
&\quad-a\,\text{l.}\left(1-\frac{l}{a-m}\right)-b\,\text{l.}\left(1+\frac{l}{b+n}\right)+\text{l. M}_n\\
&=\frac{al-ml-l^2}{a-m}+\frac{al^2-ml^2-l^3}{2(a-m)^2}+\text{etc.}+\frac{nl-l^2-bl}{b-n}\\
&\quad-\frac{nl^2-l^3-bl^2}{2(b-n)^2}+\text{etc.}+\frac{nl-l^2}{n}-\frac{ml+l^2}{m}+\frac{nl^2-l^3}{2n^2}\\
&\quad+\frac{ml^2+l^3}{2m^2}+\text{etc.}+\text{l. M}_n.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\text{l. M}_{n+l} &= \frac{-al+ml-l^2}{a-m}+\frac{al^2-ml^2+l^3}{2(a-m)^2}+\text{etc.}+\frac{-nl-l^2+bl}{b-n}\\
&\quad-\frac{nl^2+l^3-bl^2}{2(b-n)^2}+\text{etc.}+\frac{-nl-l^2}{n}-\frac{-ml+l^2}{m^2}+\frac{nl^2+l^3}{2n^2}\\
&\quad+\frac{2nl^2-l^3}{2m^2}+\text{etc.}+\text{l. M}_n.
\end{aligned}$$

Donc en ajoutant

$$\begin{aligned}
\text{l. M}_{n-l}+\text{l. M}_{n+l} &= 2\,\text{l. M}_n-\frac{l^2}{a-m}-\frac{l^2}{b-n}-\frac{l^2}{n}-\frac{l^2}{m}\\
&= 2\,\text{l. M}_n-2l^2\left\{\frac{c-\mu}{2(a-m)(b-n)}+\frac{\mu}{2mn}\right\}\\
&= 2\,\text{l. M}_n-2l^2\frac{c^3}{2ab\mu(c-\mu)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\text{M}_{n-l} &= \text{M}_n e^{\text{l. M}_{n-l}-\text{l. M}_n} = \text{M}_n\left[1+\text{l. M}_{n-l}-\text{l. M}_n\right],\\
\text{M}_{n+l} &= \text{M}_n e^{\text{l. M}_{n+l}-\text{l. M}_n} = \text{M}_n\left[1+\text{l. M}_{n+l}-\text{l. M}_n\right];
\end{aligned}$$

donc en ajoutant :

$$M_{n-l} + M_{n+l} = M_n [2 + l.M_{n-l} + l.M_{n+l} - 2l.M_n],$$

et en tenant compte de la relation (10) :

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2M_n \left[1 - \frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)}\right] = 2M_n e^{-\frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)}} (*). \quad (11)$$

II. *Détermination de* Q.

L'équation (I) donne la somme

$$Q = M_{n-l} + M_{n+l} + S_0^{l-1}[M_{n-l} + M_{n+l}] - M_n \quad . \quad . \quad (II)$$

ou, par suite de $S_0^p y = \Sigma_0^{p+1} y$,

$$Q = M_{n-l} + M_{n+l} + \Sigma_0^l [M_{n-l} + M_{n+l}] - M_n \quad . \quad (III)$$

Posons :

$$\sqrt{g} = \sqrt{\frac{c^3}{2ab\mu(c-\mu)}},$$

d'où

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{g}, \quad M_{n-l} + M_{n+l} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g} = \varphi(l);$$

nous aurons :

$$\varphi(0) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

et

$$Q = \varphi(l) + \Sigma_0^l \varphi(l) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

En développant par la formule sommatoire d'Euler (voir n° 51)

$$\Sigma_0^l \varphi(l) = \int_0^l \varphi l \,.\, dl - \frac{1}{2}[\varphi l - \varphi 0],$$

(*) Voir, pour un développement plus complet de cette formule, la note qui termine cette Addition, p. 417.

nous obtiendrons :

$$Q = \varphi_1 l + \int_0^l \varphi_1 l \,.\, dl - \frac{1}{2}\varphi_1 l + \frac{1}{2}\varphi_1 0 - \frac{1}{2}\varphi_1 0 = \frac{1}{2}\varphi_1 l + \int_0^l \varphi_1 l \,.\, dl. \quad \text{(IV)}$$

Soit

$$u^2 = l^2 g, \quad l = \frac{u}{\sqrt{g}}, \quad dl = \frac{du}{\sqrt{g}},$$

on aura

$$\varphi_1 l = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$\varphi_1 l \,.\, dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}} du \,.\, e^{-u^2};$$

d'où

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du \,.\, e^{-u^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du\, e^{-u^2} + \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi \dfrac{ab(c-\mu)}{c^3}}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

Telle est la probabilité qu'en $\mu$ épreuves le nombre $m$ des boules blanches qui sortiront de l'urne, sans remettre la boule extraite, est compris entre $k \pm l$, ou entre

$$k \pm u \sqrt{\frac{2\mu ab(c-\mu)}{c^3}},$$

$k$ étant la plus grande valeur entière de $\frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}$.

## NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FORMULE (11) A $\frac{1}{\mu}$ PRÈS.

Développons les facteurs de l'expression $M_{n-l}$ (page 415):

$$\left[1-\frac{l}{a-m}\right]^{m+l} = e^{(m+l)\,1.\left(1-\frac{l}{a-m}\right)} = e^{(m+l)\left[-\frac{l}{a-m}-\frac{l^2}{2(a-m)^2}-\frac{l^3}{3(a-m)^3}\right]}$$

$$= e^{-\frac{ml}{a-m}-\frac{l^2}{a-m}-\frac{ml^2}{2(a-m)^2}-\frac{l^3}{2(a-m)^2}-\frac{ml^3}{3(a-m)^3}-\frac{l^4}{3(a-m)^3}}$$

$$\left[1+\frac{l}{m}\right]^{-m-l} = e^{(-m-l)\,1.\left(1+\frac{l}{m}\right)} = e^{(-m-l)\left[\frac{l}{m}-\frac{l^2}{2m^2}+\frac{l^3}{3m^3}\right]}$$

$$= e^{-l-\frac{l^2}{m}-\frac{l^2}{2m}+\frac{l^3}{2m^2}-\frac{l^4}{3m^3}}$$

$$\left[1+\frac{l}{b-n}\right]^{n-l} = e^{(n-l)\,1.\left(1+\frac{l}{b-n}\right)} = e^{(n-l)\left[\frac{l}{b-n}-\frac{l^2}{2(b-n)^2}+\frac{l^3}{3(b-n)^3}\right]}$$

$$\left[1-\frac{l}{n}\right]^{-a} = e^{-a\,1.\left(1-\frac{l}{a-m}\right)} = e^{-a\left[-\frac{l}{a-m}-\frac{l^2}{2(a-m)^2}-\frac{l^3}{3(a-m)^3}\right]}$$

$$= e^{\frac{al}{a-m}+\frac{al^2}{2(a-m)^2}+\frac{al^3}{3(a-m)^3}}$$

$$\left[1+\frac{l}{b-n}\right]^{-b} = e^{-b\,1.\left(1+\frac{l}{b-n}\right)} = e^{-b\left[\frac{l}{b-n}-\frac{l^2}{2(b-n)^2}+\frac{l^3}{3(b-n)^3}\right]}$$

$$= e^{-\frac{bl}{b-n}+\frac{bl^2}{2(b-n)^2}-\frac{bl^3}{3(b-n)^3}}.$$

Substituant ces développements dans l'expression $M_{n-l}$, nous trouverons :

$$M_{n-l} = M_n e^{\frac{al-ml-l^2}{a-m}+\frac{al^2-ml^2-l^3}{2(a-m)^2}+\frac{al^3-ml^3-l^4}{3(a-m)^3}+\frac{nl-bl-l^2}{b-n}+\frac{bl^2-nl^2+l^3}{2(b-n)^2}+\frac{nl^3-bl^3-l^4}{3(b-n)^3}}$$

$$-\frac{l^2}{m}-\frac{l^2}{n}+\frac{l^2}{2m}+\frac{l^2}{2n}+\frac{l^3}{2m^2}-\frac{l^3}{2n^2}-\frac{l^3}{3m^2}+\frac{l^3}{3n^2}-\frac{l^4}{3m^3}-\frac{l^4}{3n^3}$$

$$= M_n\left[1 + \frac{al - ml - l^2}{a - m} + \frac{al^2 - ml^2 - l^3}{2(a-m)^2} + \frac{al^3 - ml^3 - l^4}{3(a-m)^3}\right.$$
$$+ \frac{nl - bl - l^2}{b - n} + \frac{bl^2 - nl^2 - l^3}{2(b-n)^2} + \frac{nl^3 - bl^3 - l^4}{3(b-n)^3}$$
$$- \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n} + \frac{l^3}{2m^2} - \frac{l^3}{2n^2} - \frac{l^3}{3m^2} + \frac{l^3}{3n^2}$$
$$\left. - \frac{l^4}{3m^3} - \frac{l^4}{3n^3}\right].$$

On trouvera de même :

$$M_{n+l} = M_n\left[1 + \frac{-al + ml - l^2}{a - m} + \frac{al^2 - ml^2 + l^3}{2(a-m)^2} + \frac{-al^3 + ml^3 - l^4}{3(a-m)^3}\right.$$
$$+ \frac{-nl + bl - l^2}{b - n} + \frac{bl^2 + nl^2 - l^3}{2(b-n)^2} + \frac{-nl^3 + bl^3 - l^4}{3(b-n)^3}$$
$$- \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n} - \frac{l^3}{2m^2} + \frac{l^3}{2n^2} + \frac{l^3}{3m^2} - \frac{l^3}{3n^3}$$
$$\left. - \frac{l^4}{2m^3} - \frac{l^4}{2n^3}\right].$$

D'où, faisant la somme, on obtient :

$$M_{n+l} + M_{n-l} = M_n\left\{2 - \frac{2l^2}{a - m} + \frac{2al^2 - 2ml^2}{2(a-m)^2} - \frac{2l^4}{3(a-m)^3}\right.$$
$$- \frac{2l^2}{b - n} + \frac{2bl^2 - 2nl^2}{2(b-n)^2} - \frac{l^4}{3(b-n)^3}$$
$$\left. - \frac{2l^2}{m} - \frac{3l^2}{n} + \frac{2l^2}{2m} + \frac{2l^2}{2n} - \frac{2l^4}{2m^3} - \frac{2l^4}{2n^3}\right\}$$
$$= 2M_n\left\{1 - \frac{l^2}{a - m} + \frac{l^2}{2(a-m)} - \frac{l^2}{b - n} + \frac{l^2}{2(b-n)}\right.$$
$$\left. - \frac{l^2}{m} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{2n}\right\}$$
$$= 2M_n\left\{1 - \frac{l^2}{2(a-m)} - \frac{l^2}{2(b-n)} - \frac{l^2}{2m} - \frac{l^2}{2n}\right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - l^2 \left[ \frac{1}{2(a-m)} + \frac{1}{2(b-n)} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} \right] \right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - l^2 \left[ \frac{c-\mu}{2(a-m)(b-n)} + \frac{\mu}{2mn} \right] \right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - l^2 \left[ \frac{c-\mu}{\frac{2ab(1-\mu)^2}{c^2}} + \frac{c^2}{2\mu ab} \right] \right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - l^2 \left[ \frac{c^2}{2ab(c-\mu)} + \frac{c^2}{2\mu ab} \right] \right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - l^2 \frac{c^2\mu + c^2(c-\mu)}{2ab\mu(c-\mu)} \right\}$$

$$= 2M_n \left\{ 1 - \frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)} \right\}.$$

# NOTES.

## I

(Pages 33, 83, 168 et 412.)

Démonstration de la formule

$$1 \cdot 2 \ldots m = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m},$$

lorsque $m$ est un nombre très-grand.

Cette démonstration se trouve dans la note suivante, deuxième cas, troisième exemple.

## II

SUR LA DÉTERMINATION APPROCHÉE DES INTÉGRALES DE LA FORME $\int_a^b y dx$, D'APRÈS LAPLACE, $y$ ÉTANT UNE FONCTION DE $x$ DE LA FORME $(fx)^s$, ET $s$ UN NOMBRE TRÈS-GRAND.

### *A.* Intégrales simples.

Premier cas. $\frac{dy}{dx}$ *n'est pas très-petit pour les valeurs* a *ou* b *de* x.

Problème. Étant donné $y = (fx)^s$, où $s$ est un nombre très-grand, développer en série convergente

$$u = \int_{x_1}^{x_2} y dx, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

lorsque aucune des quantités $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2}$ n'est très-petite.

Solution. Soit $x_1 < \alpha < x_2$, on pourra écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{x_1}^{\alpha} y\,dx - \int_{x_2}^{\alpha} y\,dx.$$

Posons dans la première des intégrales du second membre

$$y = (fx_1)^s\, e^{-t} = y_1 e^{-t},$$

et dans la seconde

$$y = (fx_2)^s\, e^{-t} = y_2 e^{-t}.$$

Si $\alpha$ est la valeur de $x$ qui répond à $t = \infty$, aux limites respectives $x_1$ et $\alpha$, $x_2$ et $\alpha$ de $x$ dans ces deux intégrales répondront celles 0 et $\infty$ de $t$; et par suite

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt - y_2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Comme $x$ est une fonction de $t$, nous aurons par la formule de Mac-Laurin :

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} . t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} . \frac{t^2}{1.2} + \dots$$

En nous rappelant qu'à $t = 0$ répondent $x = x_1$ dans la première intégrale, et $x = x_2$ dans la seconde, nous pourrons écrire :

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 \int_0^{\infty} e^{-t}dt \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_1} \frac{t^2}{1.2} + \dots \right\}$$
$$- y_2 \int_0^{\infty} e^{-t}dt \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} t + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_2} \frac{t^2}{1.2} + \dots \right\}.$$

En vertu de la formule

$$\int_0^{\infty} t^{\mu-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(\mu) = 1.2 \dots \mu - 1$$

pour $\mu$ entier et positif, le second membre prendra la forme ci-dessous :

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} + \dots \right\} - y_2 \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} + \dots \right\}. \quad (a)$$

Or, de $y = y_1 e^{-t}$ ou de $y = y_2 e^{-t}$, on tire en différentiant logarithmiquement

$$\frac{dy}{y} = -dt; \text{ d'où } \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Désignons par $v$ cette valeur; nous en déduirons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx};$$

de même

$$\frac{d^3x}{dt^3} = v\frac{d.v\frac{dv}{dx}}{dx}, \text{ etc.}$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'expression $(a)$, nous aurons, en observant que $v$ devient facteur commun à tous les termes :

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 v_{x_1}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_1} + \left(\frac{d.v\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_1} + \ldots\right\}$$
$$- y_2 v_{x_2}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \left(\frac{d.v\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_2} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

En remplaçant dans cette formule $v$ par sa valeur en fonction de $y$, et ensuite $v$ et $y$ par leurs valeurs en fonction de $x$, on trouvera aisément qu'elle peut s'écrire

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_2\left(y : \frac{dy}{dx}\right)_{x_2}\left\{1 + \left[\frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right]_{x_2} + \ldots\right\}$$
$$- y_1\left(y : \frac{dy}{dx}\right)_{x_1}\left\{1 + \left[\frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y_2\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right]_{x_1} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad (I')$$

ou bien

$$\int_{x_1}^{x_2} (fx)^s dx = (fx_2)^s \frac{fx_2}{sf'x_2}\left\{1 + \frac{s^2(f'x_2)^2 fx_2 - s(s-1)(f'x_2)^2 - sf''x_2(fx_2)^2 + \ldots}{s^3(f'x_2)^3}\right\}$$
$$- (fx_1)^s \frac{fx_1}{sf'x_1}\left\{1 + \frac{s^2(f'x_1)^2 fx_1 - s(s-1)(f'x_1)^2 - sf''x_1(fx_1)^2 + \ldots}{s^3(f'x_1)^3}\right\} \quad (I'')$$

On voit que si $s$ est très-grand, et si $f'x$ n'est pas très-petit pour $x = x_1$ ou $x = x_2$, ces formules sont rapidement convergentes.

Exemple I. Soit à évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1}dx.$$

Posons

$$y = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-2}\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right].$$

Les limites sont ici $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$; par suite $y_1 = 1$, $y_2 = 0$; et la formule $(a)$ se réduira par conséquent à

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1}+\cdots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

On voit aisément que $\frac{dy}{dx}$ n'est pas très-petit pour la valeur $x_1$ de $x$. Nous pourrons donc appliquer la méthode et poser

$$y = y_1 e^{-t} = e^{-t};$$

ou

$$e^{-t} = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right]^{r-1};$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes népériens :

$$t = \left(1+\frac{s}{r}\right)x-(r-1)\,\mathrm{l}.\left[pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p\right].$$

Différentiant on obtient :

$$\frac{dt}{dx} = 1+\frac{s}{r}+(r-1)\frac{pe^{-\frac{sx}{r}}\frac{s}{r}}{pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p}$$

$$= \frac{p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)}{pe^{-\frac{sx}{r}}+1-p};$$

par suite

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{pe^{-\frac{sx}{r}} + 1 - p}{p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)},$$

et, comme $x_1 = 0$ :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}};$$

puis

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}e^{-\frac{sx}{r}}}{\left[p(1+s)e^{-\frac{sx}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^2};$$

et

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} = \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}} \cdot \frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}}{\left[1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}\right]^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule $(a')$, on aura :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left[pe^{-\frac{sx}{r}} + 1 - p\right]^{r-1} dx$$

$$= \frac{1}{1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}}\left\{1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1 + ps + (1-p)\frac{s}{r}\right]^2} + \cdots\right\}.$$

Exemple II. Développer en série convergente l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \, dx,$$

$p$ et $q$ étant de très-grands nombres.

Posons

$$y = x^p (1-x)^q,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{p - (p+q)x\right\}.$$

Les limites sont ici

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2};$$

d'où

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2^{p+q}};$$

et

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = \frac{p(p-q)}{2^{p+q}},$$

quantité qui n'est pas très-petite.

En faisant donc

$$y = y_2 e^{-t} = \frac{1}{2^{p+q}} e^{-t} = x^p (1-x)^q,$$

la formule (I) deviendra

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx = -\frac{1}{2} v_2 \left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \cdots\right\}.$$

L'équation précédente donne, par la différentiation,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x-1)[p-(p+q)x] + (p+q)x(x-1)}{[p-(p+q)x]^2};$$

d'où l'on tire, en se rappelant que $x_2 = \frac{1}{2}$ :

$$v_{x_2} = -\frac{1}{2(p-q)}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} = -\frac{p+q}{(p-q)^2};$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q\,dx = \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \cdots\right\}.$$

**Deuxième cas.** $\frac{dy}{dx}$ *est très-petit pour les valeurs* $x_1$ *ou* $x_2$ *de* x.

Supposons que $x_2$ soit la valeur de $x$ déduite de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, c'est-à-dire celle qui répond au maximum de $y$; et faisons

$$x = x_2 + (x - x_2);$$

la valeur de $y$ développée suivant les puissances de $x - x_2$ sera

$$y = y_2 + (x-x_2)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots,$$

ou, comme $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} = 0$ :

$$y = y_2 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots$$

$$= y_2\left\{1 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2}\frac{1}{y_2} + \cdots\right\};$$

d'où l'on tire

$$\text{l.}\, y - \text{l.}\, y_2 = \text{l.}\left\{1 + \frac{(x-x_2)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2}\frac{1}{y_2} + \cdots\right\}$$

$$= (x-x_2)^2\left[\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2}\frac{1}{y_2} + \cdots\right].$$

En faisant ce dernier membre égal à $-t^2$, on aura

$$y = y_2 e^{-t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\text{l.}\, y_2 - \text{l.}\, y}.$$

Comme $t^2$ a $(x-x_2)^2$ pour facteur, on peut poser

$$t = \frac{x-x_2}{u},$$

d'où

$$u = \frac{x-x_2}{t} = \frac{x-x_2}{\sqrt{\text{l.}\, y_2 - \text{l.}\, y}}.$$

En développant $x = x_2 + ut$ par la formule de Lagrange, on trouvera :

$$x = x_2 + u_{x_2}t + \left[\frac{d(u^2)}{dx}\right]_{x_2}\cdot\frac{t^2}{1.2} + \cdots;$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = u_{x_2} + \left(\frac{d(u^2)}{dx}\right)_{x_2}\cdot t + \cdots$$

Soient $\alpha$ et $\beta$ des limites de $x$ qui diffèrent peu de $x_2$, et T, T' les limites correspondantes de $t$; on pourra écrire :

$$\int_\alpha^\beta y\,dx = y_2\int_{\text{T}}^{\text{T}'} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= y_2\int_{\text{T}}^{\text{T}'} e^{-t^2}\,dt\left\{u_{x_2} + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2}t + \cdots\right\} \quad \text{(A)}$$

Si $a$ et $b$ sont les valeurs de $x$ qui rendent $y$ nul, les valeurs correspondantes de $t$ seront $\pm\infty$, et par suite

$$\int_a^b y\,dx = y_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \left\{ u_{x_2} + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2} . t + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2} . t^2 + \cdots \right\}$$

$$= y_2 \left\{ u_{x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \left(\frac{d.u^2}{dx}\right)_{x_2} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt + \cdots \right\}$$

$$= y_2 \left\{ u_{x_2} \sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \cdots \right\}$$

$$= y_2 \sqrt{\pi} \left\{ u_{x_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2} + \cdots \right\} \quad \text{(B)}$$

Remarque I. Voici un moyen commode de calculer les termes $u_{x_2}$, $\left(\frac{d^2.u^3}{dx^2}\right)_{x_2}$, etc.

Comme $x - x_2$ est facteur de $t$, on peut poser :

$$t^2 = \text{l.}\, y_2 - \text{l.}\, y = (x - x_2)^2 \left[ \text{A} + \text{B}(x - x_2) + \text{C}(x - x_2)^2 + \cdots \right].$$

En différentiant cette égalité plusieurs fois de suite, et posant $x = x_2$, on trouve :

$$-\left(\frac{d\,\text{l.}\, y}{dx}\right)_{x_2} = 0; \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\text{l.}\, y}{dx^2}\right)_{x_2} = \text{A}; \quad -\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\,\text{l.}\, y}{dx^3}\right)_{x_2} = \text{B};$$

$$-\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^4\,\text{l.}\, y}{dx^4}\right)_{x_2} = \text{C}, \text{ etc.}$$

Or de

$$u = \frac{x - x_2}{(\text{l.}\, y_2 - \text{l.}\, y)^{\frac{1}{2}}} = \left[ \text{A} + \text{B}(x - x_2) + \text{C}(x - x_2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

on tire

$$u_{x_2} = \text{A}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\text{l.}\, y}{dx^2}\right)_{x_2}}} .$$

$$u^3 = \text{A}^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\text{A}^{-\frac{5}{2}}\text{B}(x - x_2) + \left( -\frac{3}{2}\text{A}^{-\frac{5}{2}}\text{C} + \frac{3.5}{2.4}\text{A}^{-\frac{7}{2}}\text{B}^2 \right)(x - x_2)^2 + \cdots$$

d'où, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{d^2\text{U}^3}{dx^2} = 1.2\left( -\frac{3}{2}\text{A}^{-\frac{5}{2}}\text{C} + \frac{3.5}{2.4}\text{A}^{-\frac{7}{2}}\text{B}^2 \right) + (x - x_2)[\ldots],$$

et par suite

$$\left(\frac{d^2\text{U}^3}{dx^2}\right)_{x_2} = 1.2\left( -\frac{3}{2}\text{A}^{-\frac{5}{2}}\text{C} + \frac{3.5}{2.4}\text{A}^{-\frac{7}{2}}\text{B}^2 \right).$$

Remarque II. De $\frac{d^2 \mathrm{l}.y}{dx^2} = \frac{d^2y}{ydx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \frac{1}{y^2}$, et de ce que $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = x_2$, on déduit

$$\left(\frac{d^2 \mathrm{l}.y}{dx^2}\right)_{x_2} = \left(\frac{d^2y}{ydx^2}\right)_{x_2};$$

la formule (B) s'écrira donc, en désignant par Y la valeur de $y$ pour $x = x_2$ :

$$\int_a^b y dx = \frac{\sqrt{2\pi}\, Y^{3/2}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2}}} + \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (C)$$

Exemple I. Chercher en série convergente la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx,$$

$p$ et $q$ étant des nombres très-grands.

Posons

$$y = x^p (1-x)^q,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{p - (p+q)x\right\}.$$

Si nous égalons le second membre à zéro, nous trouvons

$$x_2 = \frac{p}{p+q};$$

d'où

$$y_2 = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ est nul pour les limites $x = 0$, $x = 1$, on ne peut pas employer la méthode donnée dans le premier cas.

C'est de celle du second que nous devrons faire usage en posant

$$y = y_2 e^{-t^2}.$$

Et puisque pour $x = 0$ et $x = 1$ on a $y = 0$, d'où $t = \pm\infty$, on devra employer l'une des formules (B) ou (C).

Calculons donc

$$u_{x_2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2}.$$

De $\text{l.}\, y = p\,\text{l.}\, x + q\,\text{l.}\,(1-x)$ on déduit

$$\frac{d\,\text{l.}\, y}{dx} = \frac{p}{x} - \frac{q}{1-x}$$

$$-\frac{d^2\,\text{l.}\, y}{dx^2} = -\left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2}\right); \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

d'où

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\text{l.}\, y}{dx^2}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^3}{2pq}.$$

Donc

$$u_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\text{l.}\, y}{dx^2}\right)_{x_2}}} = \sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}.$$

D'autre part, de

$$u = \frac{x - x_2}{t} = \left[A + B(x-x_2) + C(x-x_2)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

on tire

$$\left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2} = 1.2\left(\frac{3.5}{2.4}\frac{B^2}{A^{7/2}} - \frac{3C}{2A^{5/2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Nous connaissons A; il nous reste à calculer B et C. Pour cela, différentions deux fois de suite l'équation (1):

$$-\frac{d^3\,\text{l.}\, y}{1.2.3\,dx^3} = \frac{p}{3x^3} - \frac{q}{3(1-x)^3}$$

$$-\frac{d^4\,\text{l.}\, y}{1..4\,dx^4} = \frac{p}{4x^4} - \frac{q}{4(1-x)^4};$$

d'où

$$B = -\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\,\text{l.}\, y}{dx^3}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^4}{3p^2q^2}(p-q);$$

$$C = -\frac{1}{1..4}\left(\frac{d^4\,\text{l.}\, y}{dx^4}\right)_{x_2} = \frac{(p+q)^5}{4p^3q^3}(p^2 - pq + q^2);$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (2):

$$\left(\frac{d^2u^3}{dx^2}\right)_{x_2} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{pq}\,(p+q)^5}(p^2 - 11pq + q^2).$$

Cela posé, la formule (B) donne

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\,q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq\,(p+q)}\right\}.$$

Exemple II. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\,dx,$$

$rn$ étant un nombre très-grand.

Posons

$$y = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-n}(x-r)^n e^{-x}\left\{\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1\right\}.$$

Aux limites $x = 0$ et $x = \infty$ on a $\frac{dy}{dx} = 0$; on doit donc employer la méthode du second cas en posant

$$y = y_2 e^{-t^2}.$$

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1 = 0;$$

d'où

$$x_2 = \frac{rn+r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(rn-r)^2 + 4rn}$$

$$= \frac{rn+r}{2} + \frac{rn}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{6}{rn}\right\}$$

$$= rn + \frac{n}{n-1},$$

en s'arrêtant aux termes de l'ordre de $\frac{1}{rn}$.

Aux limites 0 et $\infty$ de $x$ répondent celles $\pm$ de $\infty$ de $t$; on aura donc par la formule (C) :

$$\int_0^\infty x^{n-n}(x-r)^n e^{-x}\,dx = \frac{Y^{3/2}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx_2}\right)_{x_2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}(rn)^{rn+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

Exemple III. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = 1.2\ldots n,$$

$n$ étant un nombre très-grand.

Posons

$$y = x^n e^{-x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^n e^{-x}\left(\frac{n}{x} - 1\right).$$

Ces deux valeurs deviennent nulles aux limites $x = 0$ et $x = \infty$.

En posant

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

on trouve

$$x_2 = n,$$

d'où

$$Y = n^n e^{-n}.$$

De plus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^n e^{-x}\left\{\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x} + 1\right\}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2} = n^n e^{-n}\left\{\frac{n(n-1)}{n^2} - 1\right\} = -n^{n-1}e^{-n};$$

d'où enfin par la formule (C) :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,(n^n e^{-n})^{3/2}}{\sqrt{n^{n-1}e^{-n}}} = \sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

### *B.* Intégrales doubles.

Proposons-nous d'évaluer en série convergente l'intégrale

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta U\,dx\,dy, \quad U = [f(x,y)]^s,$$

$s$ étant un nombre très-grand, et U devenant nul aux limites $a, b$ de $x$, et $\alpha, \beta$ de $y$.

Soient $x = x_2$ et $y = y_2$ les valeurs de $x$ et $y$ tirées de $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{dU}{dy} = 0$; et écrivons pour abréger

$$U_2 = [f(x_2, y_2)]^s; \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_2 = \frac{d[f(x_2, y_2)]^s}{dx}, \text{ etc.}$$

Si nous posons

$$U = U_2 e^{-t^2 - v^2}, \quad x = x_2 + \theta, \quad y = y_2 + \eta,$$

la formule de Mac-Laurin nous donnera

$$\begin{aligned} U &= U_2 + \left(\frac{dU}{dx}\right)_2 \theta + \left(\frac{dU}{dy}\right)_2 \eta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2 \theta\eta + \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2 \eta^2\right] + \text{etc.} \\ &= U_2 + \frac{1}{2}[\cdots] + \text{etc.} \\ &= U_2\left\{1 + \frac{1}{2U_2}[\cdots]\right\} \\ &= U_2(1+z), \end{aligned}$$

en faisant

$$z = \frac{1}{2U_2}\left[\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2 \theta\eta + \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2 \eta^2\right].$$

On aura par suite :

$$\text{l. } U = \text{l. } U_2 + \text{l. } (1+z) = \text{l. } U_2 + \frac{z}{2};$$

et de là :

$$\text{l.}\frac{U_2}{U} = t^2 + v^2 = -\frac{z}{2} = -\frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2 \theta^2 - \frac{1}{U_2}\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2 \theta\eta - \frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2 \eta^2;$$

ou bien, en posant :

$$A = -\frac{1}{2U^2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_2;$$

$$B = -\frac{1}{U_2}\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_2 \theta\eta;$$

$$C = -\frac{1}{2U_2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_2,$$

il viendra

$$\begin{aligned} t^2 + v^2 &= A\theta^2 + 2B\theta\eta + C\eta^2 \\ &= A\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\eta^2. \end{aligned}$$

Cette relation sera vérifiée si nous faisons

$$t = \sqrt{A}\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right) \quad \text{et} \quad v = \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\,\eta. \quad \ldots\ldots (1)$$

Comme nous avons posé

$$U = U_2 e^{-t^2-v^2},$$

et que U est nul aux limites $a, b$ de $x$ et $\alpha, \beta$ de $y$, il s'ensuit que les limites correspondantes de $t$ et $v$ sont $\pm\infty$ ; l'intégrale proposée deviendra donc

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta U dx dy = \int_{a'}^{b'} \int_{\alpha'}^{\beta'} U' d\theta d\eta = U_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2} K dt dv ;$$

il s'agit de déterminer ces trois derniers facteurs.

Or on a

$$dv = \frac{dv}{d\vartheta} d\theta + \frac{dv}{d\eta} d\eta ;$$

$$dt = \frac{d\theta}{dt} d\theta + \frac{d\eta}{dt} d\eta ;$$

et puisque, dans la seconde intégrale double, $\eta$ est considéré comme constant quand on intègre relativement à $\theta$, et dans la troisième, $t$ quand on intègre relativement à $v$, ces équations deviendront :

$$dt = \frac{dt}{d\theta} d\theta$$

$$dv = \frac{dv}{d\theta} d\vartheta + \frac{dv}{d\eta} d\eta$$

$$0 = \frac{dt}{d\theta} d\theta + \frac{dt}{d\eta} d\eta .$$

De ces deux dernières on tire

$$dv = \frac{\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}}{\frac{dt}{d\theta}} d\eta ;$$

et par suite

$$dt dv = \left(\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}\right) d\theta\, d\eta ;$$

d'où

$$d\theta d\eta = \frac{dt dv}{\frac{dv}{d\eta}\frac{dt}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta}\frac{dt}{d\eta}} = K dt dv .$$

Le dénominateur est une fonction de $\theta$ et $\eta$ qu'on réduit à une fonction de $t$ et $v$ au moyen des équations (1).

L'intégrale proposée est ainsi ramenée à une série de termes de la forme

$$h\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^n v^m e^{-t^2-v^2}\,dtdv;$$

ces termes sont nuls si $n$ ou $m$ est impair.

S'ils sont tous deux pairs, on calculera ces termes par la formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} v^{2k} e^{-t^2-v^2}\,dtdv = \frac{1.3\ldots 2i-1}{2^i}\,\frac{1.3\ldots 2k-1}{2^k}\,\pi.$$

---

## III

(Page 155.)

—

Nous avons cru que les formules (A) et (B) de la page 155 exigeaient quelques développements, quoique nous n'en ayons trouvé aucun dans le texte.

Il s'agit d'abord d'exprimer $\int_{\alpha}^{\beta} y\,dx$ en prenant pour variable la quantité $t$ déterminée par la relation :

$$y = y_m e^{-t^2},$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\mathrm{l}.y_m - \mathrm{l}.y};$$

de sorte que les limites de $t$ correspondantes à celles $\beta$ et $\alpha$ de $n$ seront

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{l}.y_m - \mathrm{l}.y_\beta},$$

$$\gamma' = \sqrt{\mathrm{l}.y_m - \mathrm{l}.y_\alpha}.$$

On voit à la fin du n° 71 que ces deux valeurs sont égales en grandeur absolue; d'où il résulte que, les deux limites étant différentes, le premier radical doit être pris avec le signe +, le second avec le

signe —, ce que nous indiquerons en dénotant la limite inférieure par $-\gamma'$.

On a supposé que $x$ diffère peu de $m$, et par suite $y$ de $y_m$, entre les limites $\alpha$ et $\beta$, de sorte qu'entre ces limites $x - m$ et $t$ ont des valeurs très-petites.

Si donc on pose

$$x - m = ut,$$

d'où

$$dx = udt + tdu,$$

la valeur de $u$ différera également très-peu de $u_m$ entre les limites assignées, et $t$ étant très-petit, on pourra écrire

$$dx = u_m dt;$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} y dx = \int_{-\gamma'}^{\gamma'} y_m u_m e^{-t^2} dt = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma'} e^{-t^2} dt. \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Si $a$ et $b$ sont les valeurs de $x$ qui rendent $y$ nul, comme les valeurs correspondantes de $t$ seront $\pm \infty$, on aura :

$$\int_{a}^{b} y dx = y_m u_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = y_m u_m \sqrt{\pi}. \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

# ERRATA.

**NOTA.** — La lettre *b* placée en indice à la suite du numéro de la ligne indique qu'on doit compter les lignes à partir du bas de la page.

---

| Pages | lignes. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3, | $8_b$, | *au lieu de :* | simultanés, | *lisez :* | simultanés, indépendants l'un de l'autre. |
| 4, | 16, | » | $P_1P'$, | » | $PP'$. |
| 41, | 2, | » | $l.(n-1) - l.(n)$, | » | $l.\left(1-\frac{1}{n}\right)$. |
| 56, | 15, | » | $\alpha$, | » | $a$. |
| 56, | $5_b$, | » | $u_{y,x} = \ldots\ldots$ | » | $u_{y,x} = \ldots\ldots$ (1) |
| 71, | 15 et 16 | » | $n = 1, 2 \ldots\ldots$<br>$r = 1, 2 \ldots\ldots$ | » | $n = 1, 2. \ldots\ldots$<br>$\ldots\ldots\ldots$<br>$r = 1, 2. \ldots\ldots$ |
| 82, | 5, | » | $\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}$, | » | $\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_2}}$. |
| 83, | 7, | » | $\varpi$, | » | $\pi$. |
| 85, | 10, | » | $\mu - 1$, | » | $\mu + 1$. |
| 85, | 10, | » | $+\vartheta'$, | » | $-\vartheta'$. |
| 85, | 11, | » | le terme, | » | les termes. |
| 114, | $4_b$, | » | $\frac{s}{\mu}$, | » | $\frac{S}{\mu}$. |
| 121, | 10, | » | ou certain. | » | et certain. |
| 141, | 5, | » | $ds\ (b)$, | » | $ds$, $(b)$. |
| 141, | $5_b$, | » | S, | » | $s$. |
| 145, | $6_b$, | » | pourvu que, | » | pour que. |
| 153, | 10, | » | $n-1$, | » | $\overline{n-1}$. |
| 155, | $3_b$, | » | $x$, | » | N. |
| 155, | $1_b$, | » | note II, | » | note III. |
| 161, | $2_b$, | » | pour, | » | par. |
| 175, | 2, | » | $d^2.y$, | » | $d^2\,l.\,y$. |
| 182, | $10_b$, | *ajoutez :* | en négligeant les puissances de $\theta$ supérieures à la troisième. | | |
| 190, | $6_b$, | *au lieu de :* | P'II', | *lisez :* | PII'. |
| 244, | $6_b$ et $7_b$ | » | plusieurs observations, | » | un grand nombre d'observations. |
| 265, | $6_b$, | » | A décès, | » | A de décès. |
| 288, | 4, | » | N° 112, | » | N° 110. |
| 290, | $3_b$, $5_b$ et $6_b$ | » | $\int_{-r}^{r}$, | » | $\int_{-\infty}^{\infty}$. |

| Pages. | Lignes. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 343, | 11*b*, | *au lieu de :* | $r+1$, | *lisez :* | $y_{r+1}$. |
| 343, | 6*b*, | » | De la probabilité, | » | De la probabilité Q. |
| 361, | 11*b*, | » | $l^{\theta\sqrt{-1}}$, | » | $e^{\theta\sqrt{-1}}$. |
| 367, | 5*b*, | » | Fonctions, | » | Fonction. |
| 369, | 2 et 16, | » | $h_i$, | » | $h_1$. |
| 369, | 8, | » | $h_3 x$, | » | $h_3 x$. |
| 381, | 8, | » | $\beta^2 = \mathrm{S}k_h^2(\ )$, | » | $\beta^2 = \mathrm{S}k_h^2(\ )^2$. |
| 384, | 9, | » | $a_h'$, | » | $a_h^2$. |
| 388, | 6*b*, | » | $\varepsilon_h$, | » | $\varepsilon$. |
| 389, | 6, | » | $\nu_h = l(\ )$, | » | $\nu_h = \mathrm{l}.(\ )$. |
| 391, | 2, | » | $z_2, z_3$, | » | $\mathrm{Z}_2, \mathrm{Z}_3$. |
| 395, | 4, | » | $\frac{1}{6}\,{}_3\mathrm{B}$, | » | $\frac{1}{6}\mathrm{B}_3$. |
| 397, | 9*b*, | » | $at$, | » | $dt$. |
| 402, | 5*b*, | » | $a^2(h_{i,i}^2 + \cdots)$ | » | $a^2(h_{i,i}^2 + \cdots)$. |
| 403, | 4, | » | $b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}}\sqrt{\nu b_{i,i}}$ | » | $b_{i,i}\sqrt{\frac{\nu}{b_{i,i}}} = \sqrt{b_{i\,i}}$. |
| 403, | 6, | » | ce que, | » | ce qui. |
| 415, | 7, | » | $\mathrm{S}_0^{l-i}$, | » | $\mathrm{S}_0^{l-1}$. |

Il existe en outre un certain nombre d'omissions que nous n'avons aperçues qu'en relisant les feuilles tirées : elles consistent dans la suppression, par abréviation, des facteurs *dl* ou *dt*. Nous les avons signalées en plusieurs endroits, soit dans le texte, soit en note. Le lecteur s'en apercevra sans difficulté dans les autres passages, tandis que les mentionner dans l'*errata* eût été excessivement long et en eût rendu la lecture fort pénible.

Enfin le lecteur est prié de refaire la figure de la page 43, dont les proportions sont inexactes.

F. F.

# TABLE DES MATIÈRES.


Pages.

PRÉFACE . . . . . 1-4

INTRODUCTION . . . . . I-X

CHAPITRE I. *Règles fondamentales du calcul des probabilités et applications à divers problèmes.* . . . . 1-18

CHAPITRE II. *Probabilité des épreuves répétées* . . . . . 18-82

Puissance du polynome . . . . . 19
Puissance du binome . . . . . *ib.*
Polynome des factorielles . . . . . 20
Binome des factorielles . . . . . 22
Produit de facteurs binomes . . . . . 23
Applications . . . . . 25
Problème de Moivre . . . . . 26
Problème de Pascal . . . . . 30
Problème de l'aiguille . . . . . 42
Autres problèmes. . . . . 49
Problèmes des parties pour deux joueurs . . 65
Problème généralisé des parties . . . . . 71
Autres problèmes. . . . . 76

CHAPITRE II$^{bis}$. (Suite du précédent). . . . . 83-115

Théorème de Bernouilli. . . . . 83
Exemples . . . . . 92
Théorème de Poisson . . . . . 95
Problème de Poisson. . . . . 106

Pages.

CHAPITRE III. *Espérance mathématique* . . . . . 116-134

Règles . . . . . 116
Jeux de hasard . . . . . 128

CHAPITRE IV. *Espérance morale* . . . . . 135-148

Son expression . . . . . 135
Conséquences et applications aux assurances . 137
Problème de Pétersbourg . . . . . 146

CHAPITRE V. *Probabilité des événements futurs.* . . . . . 149-166

I. Causes . . . . . 149
1er théorème (de Bayes) . . . . . 151
2e théorème (de Laplace) . . . . . 154
II. Événements futurs . . . . . 159
3e théorème . . . . . *ib.*
Applications . . . . . 161

CHAPITRE V*bis*. *Problèmes sur les naissances* . . . . . 167-199

CHAPITRE VI. *Théorème inverse de Bernouilli ou théorème de Bayes* 200
*Théorème de Laplace sur la probabilité des résultats moyens des observations.* . . . . . 202
1er cas. Deux événements . . . . . 203
2e cas. Trois événements. (Démonstration de Bienaymé). . . . . 207

CHAPITRE VII. *Théorie des erreurs des observations* . . . . . 215-262

§ I. Expression de la probabilité de la valeur $x$ 214
§ II. Détermination des limites de $h$ (mesure de précision ou poids des observations) et de $r$ (erreur probable) dans un genre d'observations caractérisé par ces valeurs . . . . . 222
Résumé des formules précédentes . . 236
Exemples . . . . . 238
§ III. Valeur la plus avantageuse d'une inconnue dont une fonction est donnée par un grand nombre d'observations . . 241

Pages.

§ IV. Détermination des valeurs les plus probables de plusieurs inconnues, une fonction de ces inconnues étant donnée par un grand nombre d'observations . . 244

CHAPITRE VIII. *Probabilités relatives à la vie humaine* . . . . 265-309

Construction des tables de mortalité et lois empiriques qui les régissent . . . . . 264
Nature et usage des tables de mortalité . . . 271
De la population . . . . . 299
Théorie de Laplace sur la détermination de la population d'un empire . . . . . 307

CHAPITRE IX. *Assurances sur la vie* . . . . . 310-350

CHAPITRE X. *Probabilité des témoignages et des jugements* . . 351-354

§ I. Des témoignages . . . . . 351
§ II. Probabilité des jugements . . . . . 345
§ III. Des décisions à la majorité des voix . . 351

ADDITION I. *Théorie des erreurs d'après Laplace.* . . . . . 355-376

1. Inconnue donnée par un grand nombre d'observations. . . . . 355
2. Fonction d'une seule inconnue. . . . . 367

ADDITION II. *Théorie des erreurs d'après Bienaymé* . . . . . 377-408

1. Fonction d'une seule inconnue, cette fonction étant donnée par un très-grand nombre d'observations. . . . . 377
2. Fonction de plusieurs inconnues . . . . . 385

ADDITION III. *Extension du théorème de Bernouilli au binome des factorielles* . . . . . 409-416

Note sur le développement de la formule (11) à $\frac{1}{\mu}$ près . . . . . 417-419

NOTE I. (Pages 33, 83, 168 et 412) . . . . . 421

Pages.

NOTE II. *Sur la détermination approchée des intégrales de la forme* $\int_a^b y\,dx$, *d'après Laplace*, y *étant une fonction de* x *de la forme* $(fx)^s$, *et* s *un nombre très-grand* . . 421-435

*A*. Intégrales simples. . . . . 421

*B*. Intégrales doubles. . . . . 432

NOTE III. (Page 155) . . . . . 435

ERRATA . . . . . 437

# TABLES MODERNES DE MORTALITÉ (*)

(HOMMES ET FEMMES).

| AGE. | Norwége. | Suède. | Angleterre. | France. | Belgique. | Pays-Bas. | Bavière. | Suisse. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| 1 | 895 | 848 | 851 | 813 | 850 | 804 | 697 | 784 |
| 2 | 852 | 816 | 797 | 765 | 788 | 747 | 651 | 756 |
| 3 | 840 | 794 | 769 | 739 | 758 | 719 | 629 | 742 |
| 4 | 823 | 779 | 750 | 722 | 739 | 701 | 611 | 733 |
| 5 | 811 | 768 | 737 | 710 | 725 | 789 | 596 | 726 |
| 6 | 802 | 760 | 727 | 702 | 716 | 680 | 587 | 720 |
| 7 | 794 | 752 | 719 | 695 | 707 | 672 | 580 | 716 |
| 8 | 789 | 746 | 713 | 690 | 700 | 666 | 575 | 712 |
| 9 | 784 | 741 | 707 | 685 | 694 | 661 | 571 | 709 |
| 10 | 780 | 737 | 703 | 681 | 689 | 656 | 568 | 706 |
| 11 | 776 | 734 | 698 | 677 | 683 | 653 | 565 | 703 |
| 12 | 772 | 730 | 695 | 674 | 678 | 649 | 563 | 701 |
| 13 | 768 | 727 | 691 | 671 | 673 | 645 | 559 | 698 |
| 14 | 764 | 724 | 688 | 667 | 668 | 642 | 557 | 695 |
| 15 | 761 | 721 | 685 | 664 | 663 | 639 | 554 | 692 |
| 16 | 758 | 717 | 681 | 660 | 657 | 635 | 550 | 690 |
| 17 | 755 | 714 | 677 | 656 | 652 | 632 | 547 | 686 |
| 18 | 751 | 710 | 673 | 652 | 647 | 627 | 543 | 683 |
| 19 | 746 | 707 | 668 | 647 | 641 | 623 | 540 | 680 |
| 20 | 742 | 703 | 663 | 642 | 635 | 618 | 536 | 676 |
| 21 | 737 | 700 | 657 | 636 | 629 | 613 | 532 | 672 |
| 22 | 732 | 695 | 651 | 630 | 623 | 608 | 527 | 667 |
| 23 | 726 | 690 | 646 | 623 | 616 | 602 | 522 | 663 |
| 24 | 722 | 686 | 640 | 617 | 610 | 596 | 517 | 658 |

(*) Voir *Tables de mortalité et leur développement ;* par Ad. Quetelet, p. 18.

| AGE. | Norwége. | Suède. | Angleterre. | France. | Belgique. | Pays-Bas. | Bavière. | Suisse. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 717 | 681 | 634 | 611 | 604 | 591 | 512 | 653 |
| 26 | 712 | 676 | 628 | 605 | 597 | 585 | 507 | 649 |
| 27 | 707 | 671 | 622 | 600 | 591 | 580 | 502 | 643 |
| 28 | 702 | 666 | 616 | 594 | 585 | 573 | 496 | 639 |
| 29 | 697 | 661 | 610 | 589 | 579 | 567 | 491 | 634 |
| 30 | 691 | 656 | 604 | 584 | 573 | 561 | 485 | 629 |
| 31 | 686 | 651 | 597 | 579 | 567 | 555 | 480 | 624 |
| 32 | 681 | 645 | 591 | 573 | 561 | 549 | 475 | 619 |
| 33 | 675 | 640 | 585 | 569 | 555 | 542 | 469 | 614 |
| 34 | 669 | 633 | 578 | 564 | 549 | 535 | 464 | 609 |
| 35 | 663 | 627 | 572 | 559 | 543 | 528 | 458 | 603 |
| 36 | 657 | 620 | 565 | 554 | 537 | 522 | 453 | 597 |
| 37 | 654 | 614 | 559 | 549 | 530 | 516 | 448 | 592 |
| 38 | 647 | 607 | 552 | 543 | 524 | 509 | 442 | 585 |
| 39 | 641 | 600 | 545 | 538 | 518 | 502 | 437 | 580 |
| 40 | 635 | 593 | 539 | 533 | 511 | 494 | 431 | 573 |
| 41 | 629 | 585 | 532 | 527 | 504 | 487 | 426 | 567 |
| 42 | 623 | 578 | 525 | 522 | 497 | 480 | 420 | 561 |
| 43 | 616 | 570 | 517 | 516 | 490 | 472 | 414 | 553 |
| 44 | 609 | 562 | 510 | 510 | 483 | 466 | 408 | 545 |
| 45 | 603 | 554 | 503 | 504 | 476 | 459 | 402 | 538 |
| 46 | 595 | 545 | 495 | 498 | 469 | 451 | 396 | 532 |
| 47 | 590 | 537 | 488 | 492 | 462 | 444 | 389 | 525 |
| 48 | 584 | 529 | 480 | 486 | 455 | 437 | 383 | 517 |
| 49 | 577 | 520 | 472 | 480 | 448 | 430 | 376 | 509 |
| 50 | 570 | 511 | 464 | 473 | 440 | 423 | 368 | 501 |
| 51 | 563 | 502 | 456 | 467 | 432 | 415 | 361 | 492 |
| 52 | 556 | 492 | 448 | 460 | 424 | 406 | 353 | 483 |
| 53 | 549 | 482 | 439 | 452 | 415 | 397 | 345 | 474 |
| 54 | 539 | 471 | 430 | 445 | 406 | 388 | 337 | 465 |

| AGE. | Norwége. | Suède. | Angleterre. | France. | Belgique. | Pays-Bas. | Bavière. | Suisse. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 532 | 460 | 421 | 436 | 397 | 378 | 328 | 455 |
| 56 | 524 | 449 | 412 | 428 | 387 | 368 | 319 | 445 |
| 57 | 514 | 438 | 402 | 419 | 377 | 358 | 310 | 434 |
| 58 | 505 | 426 | 391 | 410 | 367 | 348 | 300 | 422 |
| 59 | 496 | 414 | 381 | 400 | 356 | 337 | 290 | 411 |
| 60 | 486 | 401 | 370 | 389 | 345 | 327 | 280 | 399 |
| 61 | 476 | 388 | 358 | 378 | 334 | 317 | 270 | 386 |
| 62 | 465 | 375 | 347 | 366 | 322 | 305 | 260 | 372 |
| 63 | 454 | 361 | 335 | 354 | 310 | 294 | 247 | 358 |
| 64 | 441 | 347 | 322 | 340 | 297 | 281 | 235 | 341 |
| 65 | 428 | 332 | 309 | 326 | 284 | 269 | 223 | 323 |
| 66 | 413 | 316 | 296 | 312 | 271 | 254 | 210 | 302 |
| 67 | 400 | 299 | 282 | 297 | 258 | 240 | 197 | 282 |
| 68 | 384 | 281 | 268 | 281 | 244 | 226 | 184 | 261 |
| 69 | 366 | 264 | 253 | 265 | 230 | 211 | 172 | 242 |
| 70 | 349 | 246 | 238 | 249 | 216 | 197 | 159 | 225 |
| 71 | 329 | 228 | 223 | 232 | 201 | 182 | 146 | 206 |
| 72 | 308 | 210 | 207 | 216 | 186 | 168 | 133 | 188 |
| 73 | 289 | 192 | 192 | 199 | 170 | 154 | 120 | 170 |
| 74 | 269 | 174 | 176 | 182 | 154 | 139 | 107 | 152 |
| 75 | 250 | 157 | 161 | 165 | 139 | 126 | 95 | 134 |
| 76 | 231 | 140 | 146 | 149 | 125 | 112 | 83 | 120 |
| 77 | 211 | 124 | 131 | 133 | 112 | 99 | 72 | 104 |
| 78 | 193 | 108 | 117 | 118 | 99 | 86 | 62 | 85 |
| 79 | 175 | 92 | 103 | 103 | 87 | 74 | 53 | 72 |
| 80 | 157 | 78 | 90 | 89 | 75 | 64 | 45 | 57 |
| 81 | 139 | 66 | 78 | 77 | 65 | 54 | 38 | 49 |
| 82 | 122 | 54 | 67 | 65 | 55 | 43 | 31 | 40 |
| 83 | 105 | 44 | 56 | 55 | 46 | 35 | 26 | 33 |
| 84 | 89 | 35 | 47 | 45 | 38 | 28 | 21 | 27 |

| AGE. | Norwége. | Suède. | Angleterre. | France. | Belgique. | Pays-Bas. | Bavière. | Suisse. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 75 | 26 | 39 | 37 | 31 | 22 | 18 | 20 |
| 86 | 62 | 19 | 31 | 30 | 25 | 17 | 15 | 15 |
| 87 | 55 | 14 | 25 | 24 | 20 | 13 | 12 | 12 |
| 88 | 42 | 10 | 20 | 18 | 16 | 10 | 10 | 8 |
| 89 | 35 | 7 | 15 | 14 | 12 | 7 | 9 | 6 |
| 90 | 26 | 4 | 12 | 11 | 9 | 5 | 7 | 3 |
| 91 | 20 | 3 | 9 | 8 | 7 | 3 | 6 | 2 |
| 92 | 16 | 2 | 6 | 6 | 5 | 2 | 5 | 1 |
| 93 | 12 | 1 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 1 |
| 94 | 9 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 95 | 7 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | » |
| 96 | 5 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | » |
| 97 | 4 | » | 1 | 1 | 1 | » | 1 | » |
| 98 | 3 | » | 1 | 1 | 1 | » | 1 | » |
| 99 | 2 | » | » | » | » | » | » | » |
| 100 | 1 | » | » | » | » | » | » | » |
| 101 | 1 | » | » | » | » | » | » | » |

# NOTE

SUR

# UNE NOUVELLE ESPÈCE DE LEPIDOTUS,

PAR

**T.-C. WINKLER,**

Docteur en sciences.

# NOTE

SUR

# UNE NOUVELLE ESPÈCE DE LEPIDOTUS.

M. le professeur Dewalque, de Liége, vient de m'envoyer un fossile que je m'empresse de faire connaître aux paléontologistes. Ce fossile se compose de la plus grande partie des plaques et de quelques débris des os de la tête d'un poisson, provenant du lias, et qui appartient sans aucun doute au genre *Lepidotus*. On sait que les *Lepidotus* sont de grands poissons dont la forme générale a beaucoup d'analogie avec celle des *Cyprins*. Ils sont oblongs et épais, leur dos et leur ventre sont bombés, et le pédicelle de la queue est très-large. Ces poissons sont très-répandus dans les terrains jurassiques, surtout dans la section de ces couches qui constitue le lias. Tous les caractères mentionnés se retrouvent plus ou moins dans l'exemplaire de *Lepidotus* dont nous nous occupons en ce moment. On pourrait croire au premier coup d'œil que cet exemplaire doit être rapporté à l'espèce nommée *Lepidotus gigas*, Ag., mais, après avoir étudié les nombreux restes de cette espèce que possède le musée Teyler et les avoir confrontés avec l'échantillon en question, je dois dire que l'analogie présumée ne s'est pas soutenue. L'échantillon ne me paraît pas non plus pouvoir être rapporté à quelqu'une des autres espèces connues de *Lepidotus*. On sait que les espèces de ce genre diffèrent surtout par la forme et l'ornementation des écailles : ainsi les écailles du *L. gigas* sont aussi longues que hautes et à bords parfaitement lisses; celles du *L. semiserratus* ont quelques dents au bord postérieur; celles du *L. rugosus* ont une surface rugueuse; celles du *L. fimbriatus* ont une fine dentelure sur leur bord; celles du *L. ornatus* ont des rayons divergents sur les bords postérieurs; celles du *L. frondosus* sont sculptées sur leur base, etc. Aucun de ces caractères distinctifs ne se retrouve chez notre poisson du lias. Ses écailles, quoique mutilées pour la plus grande partie, ont néanmoins laissé assez

de restes et de traces pour qu'on puisse s'assurer qu'elles sont parfaitement lisses à la surface supérieure et aux bords, et qu'elles ne sont pas aussi hautes que longues comme celles du *L. gigas*, mais ont au contraire la forme de parallélogrammes. Il paraît en outre que chaque écaille a possédé une sorte de bord plus ou moins gonflé, et que la masse chitineuse qui la composait, a été disposée de manière à former des plis quadrangulaires.

Quelques vestiges de rayons de la nageoire dorsale se montrent au bord du bloc de pierre, mais je n'ai pu découvrir aucune trace de fulcres. Pour ce qui regarde les os de la tête, on n'en trouve que quelques débris des opercules; mais un fragment assez considérable du préopercule présente des granulations éparses, particularité que je n'ai pas rencontrée sur les préopercules du *Lepidotus gigas* qui sont à ma disposition. La couleur brune des écailles et des os de la tête contraste agréablement avec la teinte grisâtre de la pierre calcaire qui les contient. Je ne sais pas si l'on doit admettre que les écailles ont été naturellement brunes, ou bien si elles doivent cette couleur à une matière minérale, telle qu'une solution ferrugineuse, qui les aurait pénétrées.

La figure 1 nous présente l'échantillon entier (1).

Dans la figure 2 sont représentées, trois fois agrandies, trois écailles, dont une tout à fait dépourvue de son émail, et les autres partiellement, pour montrer les plis quadrangulaires dont nous avons parlé plus haut, et qui sont visibles à travers l'émail.

L'échantillon provient de l'étage toarcien (lias supérieur) de Saint-Mard, près de Virton, province du Luxembourg, où il a été recueilli par M. Mohimont, contrôleur des douanes, à Virton.

Il me semble qu'il convient de dédier l'espèce à cet ami dévoué de la science, et je propose de la nommer *Lepidotus Mohimonti*, Winkler.

Haarlem, 10 juillet 1873.

(1) La Note de M. Winkler était destinée au tome VI des *Mémoires*. Afin de ne pas en retarder l'impression, elle a été insérée dans le présent volume. Le lecteur s'expliquera la mention du tome VI qui se trouve au haut de la planche.

# TABLE DES MATIÈRES.

1. Candèze (E.). — Révision de la Monographie des Élatérides. (1er fascicule.)

2. Meyer (A.). — Cours de calcul des probabilités fait à l'Université de Liége de 1849 à 1857. (Publié sur les manuscrits de l'auteur par F. Folie.)

3. Winkler (T.-C.). — Note sur une nouvelle espèce de Lepidotus.

3 2044 106 293 525